sとは何か　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2011年2月5日　目次へ戻る

1、正弦波の微分

y＝$V_m \sin \omega t$を時間tで微分します。V_mは正弦波の最大値です。合成関数の微分法を用い、y＝$V_m \sin u$、u＝ωtと置きますと、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d}{du}V_m \sin u \frac{d}{dt}\omega t = V_m \frac{d}{du}\sin u \frac{d}{dt}\omega t = V_m(\cos u)\omega = V_m\omega \cos \omega t$$

になります。$V_m \sin u$のV_mは定数なので、微分後も残ります。合成関数の微分法ですので、最後にuをωtに戻しています。0[rad]のcos値は、$\frac{\pi}{2}$[rad]のsin値と同じです。その先の角度でも同じ関係が続きます。$\cos\theta$と$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$は同値ですので、

$$\cos\omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

と置き換えます。微分結果は、

$$V_m\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})\ \cdots①$$

です。$V_m \sin \omega t$の大きさがω（角周波数）倍され、位相が$\frac{\pi}{2}$[rad]（90度）進んだ正弦波となりました。ωが付いているので、周波数が高いほど振幅が大きくなります。

このを$V_m\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$、更に時間tで微分します。y＝$V_m \omega \sin u$、$u = \omega t + \frac{\pi}{2}$と置き、合成関数の微分法を用いますと、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d}{du}V_m\omega \sin u \frac{d}{dt}(\omega t + \frac{\pi}{2}) = V_m\omega(\cos u)\omega = V_m\omega^2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

になります。$V_m \omega \sin u$の$V_m \omega$は定数なので、微分後も残ります。$\cos\theta$の値は$\sin(\theta＋\frac{\pi}{2})$と同値ですから、

$$\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t + \pi)$$

と置き換えます。微分結果は、

$$V_m\omega^2 \sin(\omega t + \pi)\ \cdots②$$

となり、最初の$V_m \sin \omega t$に比べ、大きさがω^2倍され、位相がπ[rad]（180度）進んだ正弦波となりました。

この$V_m \omega^2 \sin(\omega t＋\pi)$を更に時間tで微分します。y＝$V_m \omega^2 \sin u$、u＝$\omega t＋\pi$と置き、合成

関数の微分法を用いますと、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d}{du}V_m\omega^2\sin u\frac{d}{dt}(\omega t+\pi) = V_m\omega^2(\cos\ u)\omega = V_m\omega^3\cos(\ \omega t+\pi)$$

になります。$V_m\omega^2\sin u$ の $V_m\omega^2$ は定数なので、微分後も残ります。$\cos\theta$ の値は $\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$ と同値ですから、

$$\cos(\ \omega t+\pi) = \sin(\ \omega t+\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin(\ \omega t+\frac{3\pi}{2})$$

と置き換えます。微分結果は、

$$V_m\omega^3\sin(\ \omega t+\frac{3\pi}{2})\ \cdot\cdot\cdot③$$

となり、一番最初の $\sin\omega t$ に比べ、大きさが ω^3 倍され、位相が $\frac{3\pi}{2}$ [rad]（270 度）進んだ正弦波となりました。

きりがありませんので止めますが、$V_m\sin\omega t$ を時間 t で微分して行きますと、一回の微分ごとに大きさが ω 倍（角周波数倍）され、位相が $\frac{\pi}{2}$[rad]（90 度）ずつ進むことが分ります。

2、正弦波の積分

次に $y=V_m\sin\omega t$ を時間 t で積分します。$\omega t=u$ と置きます。$\omega t=u$ の両辺を t で微分しますと、

$$\frac{d}{dt}\omega t = \frac{d}{dt}u$$

$$\omega = \frac{du}{dt}$$

$$dt = \frac{1}{\omega}du$$

になります。積分は、

$$\int V_m\sin\ \omega tdt = \int V_m\sin\ u\frac{1}{\omega}du = V_m\frac{1}{\omega}\int\sin\ udu = -V_m\frac{1}{\omega}\cos\ u+C = -V_m\frac{1}{\omega}\cos\ \omega t+C$$

となります。置換積分ですので、最後に u を ωt に戻しています。

$$-\cos\omega t = \cos(\omega t-\pi) = \sin(\omega t-\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

ですから、積分定数を無視すれば、

$$V_m\frac{1}{\omega}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$$ ・・・④

です。$V_m \sin \omega t$ の大きさが $\frac{1}{\omega}$ （角周波数分の 1）になり、位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad]（90 度）遅れた正弦波となります。$\frac{1}{\omega}$ が付いているので、周波数が高いほど振幅が小さくなります。

出てきた $V_m\frac{1}{\omega}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$ を更に時間 t で積分します。$\omega t-\frac{\pi}{2}=u$ と置き、$\omega t-\frac{\pi}{2}=u$ の両辺を t で微分しますと、

$$\frac{d}{dt}(\omega t-\frac{\pi}{2})=\frac{d}{dt}u$$

$$\omega=\frac{du}{dt}$$

$$dt=\frac{1}{\omega}du$$

になります。積分は、

$$\int V_m\frac{1}{\omega}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})dt=\int V_m\frac{1}{\omega}\sin u\frac{1}{\omega}du=V_m\frac{1}{\omega^2}\int \sin u du=-V_m\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})+C$$

となります。置換積分ですので、最後に u を ωt に戻しています。

$$-\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})=\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}-\pi)=\sin(\omega t-\frac{\pi}{2}-\pi+\frac{\pi}{2})=\sin(\omega t-\pi)$$

ですから、積分定数を無視すれば、

$$V_m\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t-\pi)$$ ・・・⑤

です。最初の $V_m \sin \omega t$ に比べ、大きさが $\frac{1}{\omega^2}$ になり、位相が π [rad]（180 度）遅れた正弦波となります。

出てきた $V_m\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t-\pi)$ を更に時間 t で積分します。$\omega t-\pi=u$ と置き、$\omega t-\pi=u$ の両辺を t で微分しますと、

$$\frac{d}{dt}(\omega t-\pi)=\frac{d}{dt}u$$

$$\omega=\frac{du}{dt}$$

$$dt=\frac{1}{\omega}du$$

になります。積分は、

$$\int V_m \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t-\pi)dt = \int V_m \frac{1}{\omega^2}\sin u \frac{1}{\omega}du = V_m \frac{1}{\omega^3}\int \sin u du = -V_m \frac{1}{\omega^3}\cos(\omega t-\pi)+C$$

となります。置換積分ですので、最後に u を ωt に戻しています。

$$-\cos(\omega t-\pi) = \cos(\omega t-\pi-\pi) = \sin(\omega t-2\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t-\frac{3}{2}\pi)$$

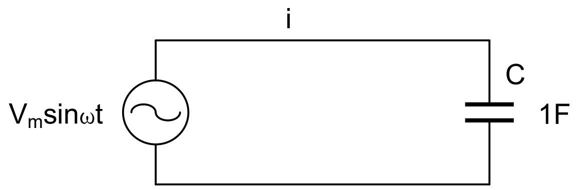
ですから、積分定数を無視すれば、

$$V_m \frac{1}{\omega^3}\sin(\omega t-\frac{3}{2}\pi) \quad ・・・⑥$$

です。一番最初の $V_m \sin \omega t$ に比べ、大きさが $\frac{1}{\omega^3}$ になり、位相が $\frac{3\pi}{2}$ [rad]（270 度）遅れた正弦波となります。

きりがありませんので止めますが、$V_m \sin \omega t$ を時間 t で積分して行きますと、一回の積分ごとに大きさが $\frac{1}{\omega}$ 倍され、位相が $\frac{\pi}{2}$[rad]（90 度）ずつ遅れることが分ります。

3、ラプラス変換による微分



キルヒホッフの法則によれば、回路への供給電圧と回路での電圧降下は、常に等しいです。上図のコンデンサーでの電圧降下は、$\frac{Q}{C}$ です。分母の C は静電容量、分子の Q は電荷です。電荷 Q は、流れ始めから現在までの電流を積分したものですから、$Q=\int_0^t idt$ です。したがってコンデンサーでの電圧降下は、$\frac{\int_0^t idt}{C}$ となります。この電圧降下が供給電圧と等しいのですから、

$$\frac{\int_0^t idt}{C} = V_m \sin\omega t$$

と言う方程式になります。簡単化の為に静電容量 C を 1[F]（ファラッド）にしますと、

$$\int_0^t idt = V_m \sin\omega t$$

と言う式になります。i を求める為、この方程式をラプラス変換します。

$$\frac{i(s)}{s} = V_m \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{V_m\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

$$i(s) = \frac{sV_m\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

となり、最大値 V_m の正弦波のラプラス変換に、s が掛かる形になりました。
　右辺の部分分数変換を行います。

$$\frac{sV_m\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{A}{s + j\omega} + \frac{B}{s - j\omega}$$

とおきます。A を求めるには、両辺に s＋jω を掛け、

$$\frac{sV_m\omega(s + j\omega)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{A(s + j\omega)}{s + j\omega} + \frac{B(s + j\omega)}{s - j\omega}$$

約分した後、s＝－jω にすれば、

$$\left[\frac{sV_m\omega}{s - j\omega} = A + \frac{B(s + j\omega)}{s - j\omega}\right]_{s=-j\omega}$$

$$\frac{-j\omega V_m\omega}{-j\omega - j\omega} = A$$

$$\frac{-j\omega V_m\omega}{-2j\omega} = A$$

$$\frac{\omega V_m}{2} = A$$

となり A が求まります。B を求めるには、両辺に s－jω を掛け、

$$\frac{sV_m\omega(s - j\omega)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{A(s - j\omega)}{s + j\omega} + \frac{B(s - j\omega)}{s - j\omega}$$

約分した後、s=jω にすれば、

$$\left[\frac{sV_m\omega}{s + j\omega} = \frac{A(s - j\omega)}{s + j\omega} + B\right]_{s=j\omega}$$

$$\frac{j\omega V_m\omega}{j\omega + j\omega} = B$$

$$\frac{j\omega V_m\omega}{2j\omega}=B$$

$$\frac{\omega V_m}{2}=B$$

となり B が求まります。したがって部分分数は、

$$i(s)=\frac{\frac{\omega V_m}{2}}{s+j\omega}+\frac{\frac{\omega V_m}{2}}{s-j\omega}$$

となります。ラプラス逆変換しますと、

$$\begin{aligned}i&=\frac{\omega V_m}{2}e^{-j\omega t}+\frac{\omega V_m}{2}e^{j\omega t}\\&=\omega V_m\left(\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right)\\&=\omega V_m\cos\omega t\\&=\omega V_m\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

になります。正弦波のラプラス変換に s が作用すると、大きさが ω 倍になり、位相が $\frac{\pi}{2}$ 進みます。これは 1、で行った正弦波を微分することと同じです。

4、ラプラス変換による積分

キルヒホッフの法則によれば、回路への供給電圧と回路での電圧降下は常に等しいです。

上図のコイルでの電圧降下は $L\frac{di}{dt}$ です。L はコイルのインダクタンスです。電流を時間 t で微分した値にインダクタンスを掛けた値がコイルでの電圧降下です。この電圧降下が供給電圧と等しいのですから、

$$L\frac{di}{dt}=V_m\sin\omega t$$

と言う微分方程式になります。簡単化の為に L を 1[H]（ヘンリー）にしますと、

$$\frac{di}{dt} = V_m \sin\omega t$$

になります。i を求める為、この微分方程式をラプラス変換しますと、

$$si(s) = V_m \bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{V_m\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

$$i(s) = \frac{V_m\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)s}$$

になり、最大値 V_m の正弦波のラプラス変換に、$\frac{1}{s}$ が掛かる形になりました。右辺の部分分数変換を行います。

$$\frac{V_m\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)s} = \frac{A}{s+j\omega} + \frac{B}{s-j\omega} + \frac{C}{s}$$

とおきます。A を求めるには、両辺に s＋jω を掛け、

$$\frac{V_m\omega(s+j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)s} = \frac{A(s+j\omega)}{s+j\omega} + \frac{B(s+j\omega)}{s-j\omega} + \frac{C(s+j\omega)}{s}$$

約分した後、s＝−jω にすれば、

$$\left[\frac{V_m\omega}{(s-j\omega)s} = A + \frac{B(s+j\omega)}{s-j\omega} + \frac{C(s+j\omega)}{s}\right]_{s=-j\omega}$$

$$\frac{V_m\omega}{(-j\omega-j\omega)(-j\omega)} = A$$

$$\frac{V_m\omega}{(-2j\omega)(-j\omega)} = A$$

$$\frac{V_m}{-2\omega} = A$$

となり A が求まります。B を求めるには、両辺に s−jω を掛け、

$$\frac{V_m\omega(s-j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)s} = \frac{A(s-j\omega)}{s+j\omega} + \frac{B(s-j\omega)}{s-j\omega} + \frac{C(s-j\omega)}{s}$$

約分した後、s＝jω にすれば、

$$\left[\frac{V_m\omega}{(s+j\omega)s} = \frac{A(s-j\omega)}{s+j\omega} + B + \frac{C(s-j\omega)}{s}\right]_{s=j\omega}$$

$$\frac{V_m\omega}{(j\omega+j\omega)j\omega} = B$$

$$\frac{V_m\omega}{(2j\omega)j\omega} = B$$

$$\frac{V_m}{-2\omega} = B$$

となりBが求まります。Cを求めるには、両辺にsを掛け、

$$\frac{V_m\omega s}{(s+j\omega)(s-j\omega)s} = \frac{As}{s+j\omega} + \frac{Bs}{s-j\omega} + \frac{Cs}{s}$$

約分した後、s＝0にすれば、

$$\left[\frac{V_m\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} = \frac{As}{s+j\omega} + \frac{Bs}{s-j\omega} + C\right]_{s=0}$$

$$\frac{V_m\omega}{(+j\omega)(-j\omega)} = C$$

$$\frac{V_m}{\omega} = C$$

となりCが求まります。部分分数は、

$$i(s) = \frac{\frac{V_m}{-2\omega}}{s+j\omega} + \frac{\frac{V_m}{-2\omega}}{s-j\omega} + \frac{\frac{V_m}{\omega}}{s}$$

となります。ラプラス逆変換しますと、

$$\begin{aligned} i &= \frac{V_m}{-2\omega}e^{-j\omega t} + \frac{V_m}{-2\omega}e^{j\omega t} + \frac{V_m}{\omega} \\ &= -\frac{V_m}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right) + \frac{V_m}{\omega} \\ &= -\frac{V_m}{\omega}\cos\omega t + \frac{V_m}{\omega} \end{aligned}$$

$$= \frac{V_m}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{V_m}{\omega}$$

になります。初期条件無しのラプラス変換では、t=0 で i=0 になる様に、積分定数$\frac{V_m}{\omega}$が付きます。これは微分すると 0 になる、供給電圧とは無関係の電流が流れていることを表しています。このような電流は、あったとしても電線内にわずかに含まれる抵抗成分により消費され、やがては無くなってしまうため、交流回路では考えないことになっています。したがって、

$$i = \frac{1}{\omega}V_m\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

が答です。正弦波のラプラス変換に$\frac{1}{s}$が作用すると大きさが$\frac{1}{\omega}$になり、位相が$\frac{\pi}{2}$遅れます。これは 2、で行った正弦波を積分することと同じです。

5、まとめ

　人の耳は周波数には敏感ですが、位相に鈍感です。位相については目をつぶり、ωの位置に関連した増幅（つまりこれがフィルター）が欲しい時は、正弦波を微分積分すれば良いです。

　正弦波の大きさは、1 回の微分でω倍されます。1 回の積分で$\frac{1}{\omega}$倍されます。

　ωが 1 個欲しい時は、伝達関数の分子に s が 1 個あれば良いです。

　$\frac{1}{\omega}$が 1 個欲しい時は、伝達関数の分母に s が 1 個あれば良いです。

6、s と交流理論とのつながり

　ラプラス変換で解く正弦波応答は、複素関数で表した正弦波を、ラプラス変換して使用しました。つまり正弦波、

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t} \quad ・・・⑦$$

においてラプラス変換、$L[Ae^{\alpha t}] = \frac{A}{s-\alpha}$です（L[　]はラプラス変換を表します）から、

$$L[\frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}] = \frac{\frac{1}{2j}}{s - j\omega} - \frac{\frac{1}{2j}}{s + j\omega}$$

$$= \frac{\frac{1}{2j}(s + j\omega) - \frac{1}{2j}(s - j\omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

$$= \frac{\frac{s}{2j} + \frac{\omega}{2} - \frac{s}{2j} + \frac{\omega}{2}}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

$$= \frac{\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

となります。つまり、

$$L\left[\sin\ \omega t\right] = \frac{\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

です。安定な伝達関数 G(s)の回路に、最大値 V_m の正弦波を加えた場合の、出力のラプラス変換は、ラプラスの世界でのかけ算になりますから、

$$Y(s) = L\ [V_m \sin \omega t]G(s) = \frac{V_m \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} G(s)$$

となります。右辺を部分分数に展開します。次のように展開されます。

$$\frac{V_m \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} G(s) = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{C}{G(s)\text{の分母}}$$

展開係数 A は、上式両辺に s－jω をかけ、s＝jω と置きます。

$$A = \left[G(s)\frac{V_m \omega}{s + j\omega}\right]_{s = j\omega} = V_m G(j\omega)\frac{\omega}{2j\omega} = V_m \frac{1}{2j} G(j\omega)$$

展開係数 B は、両辺に s－jω をかけ、s＝－jω と置きます。

$$B = \left[G(s)\frac{V_m \omega}{s - j\omega}\right]_{s = -j\omega} = V_m G(-j\omega)\frac{\omega}{-2j\omega} = V_m \frac{1}{-2j} G(-j\omega)$$

次のように部分分数に展開されます。

$$\frac{V_m\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}G(s)=\frac{\frac{V_mG(j\omega)}{2j}}{s-j\omega}+\frac{\frac{V_mG(-j\omega)}{-2j}}{s+j\omega}+\frac{C}{G(s)\text{の分母}}$$

ラプラス逆変換、$L^{-1}[\frac{A}{s-\alpha}]=Ae^{\alpha t}$です（$L^{-1}[\ ]$はラプラス逆変換を表します）から、

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=V_mG(j\omega)\frac{1}{2j}e^{j\omega t}+V_mG(-j\omega)\frac{1}{-2j}e^{-j\omega t}+\text{過渡項}$$

$$=V_mG(j\omega)\frac{1}{2j}e^{j\omega t}-V_mG(-j\omega)\frac{1}{2j}e^{-j\omega t}+\text{過渡項}\quad\cdots⑧$$

$$=V_m|G(j\omega)|e^{j\theta}\frac{1}{2j}e^{j\omega t}-V_m|G(-j\omega)|e^{-j\theta}\frac{1}{2j}e^{-j\omega t}+\text{過渡項}$$

$$=V_m|G(j\omega)|\frac{1}{2j}e^{j(\omega t+\theta)}-V_m|G(-j\omega)|\frac{1}{2j}e^{-(j\omega t+\theta)}+\text{過渡項}$$

$$=V_m|G(j\omega)|(\frac{e^{j(\omega t+\theta)}-e^{-(j\omega t+\theta)}}{2j})+\text{過渡項}$$

$$=V_m|G(j\omega)|\sin(\omega t+\theta)+\text{過渡項}$$

となります。

伝達関数の s に共役（きょうやく）数 jω とーjω を代入していますから、G(jω)と G(ーjω)も共役になります。（周波数伝達関数から伝達関数への章の 2、をご覧下さい。）

途中⑧の次で G(jω)と G(ーjω)という複素数を、極座標表示にかえています。

G(jω)と G(ーjω)は共役ですから、絶対値は同じで偏角は反対向きです。極座標表示では G(jω)の方の絶対値を使いました。

e の項をまとめると $\frac{1}{2j}$ が働き、実数の sin に戻ります。⑦式で紹介した様に、$\frac{1}{2j}$ が付いたものをラプラス変換したのですから、逆変換したものに $\frac{1}{2j}$ が付いて来るのは当然です。

安定な伝達関数なので、過渡項はすぐに減衰します。過渡項に付いては、s＝jω の章 5 ページ付近をご覧下さい。

最後の式から分る事は、入力正弦波の振幅は、伝達関数の s に＋jω（またはーjω）を代入

した複素数の絶対値倍され、出力されると言うことと、入力正弦波の位相は、伝達関数の s に＋jω を代入した複素数の偏角だけ、ひねられて出力されると言うことです。

実数の正弦波が起こす応答ですが、ラプラス変換を使って解く正弦波応答では、ラプラス逆変換直後は、⑧の一つ前の式の様に複素関数で出て来ます。

実数の sin を複素数で表している為、反時計回りの $e^{j\omega t}$ と、その共役である時計回りの $e^{-j\omega t}$ が、常に反対方向に回転している必要があります。$\frac{1}{2j}$ も付いて来ます。

反時計回りと時計回りに回転する共役複素数に、大きさの変化とひねりを加える複素数があります。

反時計回りの $e^{j\omega t}$ に大きさの変化とひねりを与えるのは、伝達関数の s に jω を代入した複素数 G(jω)です。

時計回りの $e^{-j\omega t}$ に大きさの変化とひねりを与えるのは、伝達関数の s に－jω を代入した複素数 G(－jω)です。

回転する共役複素数 $e^{j\omega t}$ と $e^{-j\omega t}$ に、それぞれ共役複素数の G(jω)と G(－jω)が働くことにより、実数である出力正弦波の振幅と位相が変化するのです。「s=jω とは何か」の章の 1、にもっと詳しい説明があります。

普通の回路では、入力に正弦波を入れた場合、途中も、出力も、どこもかしこも同一角周波数の正弦波ですから、正弦波の大きさ関係と位相関係のみが話題となります。

そのため、入力が正弦波に限定されている交流理論では、フェーザーの考えが出て来ました。

ラプラス変換の方法で出てくる、反時計回りの複素数 $e^{j\omega t}$ の回転を都合の良いところで止め、$e^{j\theta}$ にした状態で、回路の各部分の電圧や電流の大きさと位相のみを問題にします。

⑧式から第 2 項と過渡項を捨て、第 1 項から $\frac{1}{2j}$ を除き、ある時刻で回転を止め、最大値 V_m を実効値 V_{RMS} に代えたものが、交流理論のフェーザーとなります。

回転を止めて計算するフェーザー表示の交流理論では、G(s)の s に jω を代入した複素数 G(jω)のみが、そのフェーザーに作用します。

$V_{RMS}e^{j\theta}$ の大きさを変え、ひねりを加えるのは、G(s)の s に jω を代入した複素数 G(jω)です。これが交流理論における s＝jω の意味になります。

伝達関数 G(s)として s のみがあった場合はどうでしょうか。s＝jω ですから、$V_{RMS}e^{j\theta}$ に jω がかけられることとなります。

$$j\omega V_{RMS}e^{j\theta} = j\omega V_{RMS}(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$= \omega V_{RMS}j(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$= \omega V_{RMS}(-\sin\theta + j\cos\theta)$$

$$= \omega V_{RMS}\{\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + j\sin(\theta + \frac{\pi}{2})\}$$

フェーザーに jω を掛けると、大きさが ω 倍され、位相が $\frac{\pi}{2}$[rad]（90 度）進みます。

本章の 1、では正弦波を時間 t で微分しました。大きさが ω（角周波数）倍され、位相が $\frac{\pi}{2}$[rad]　(90 度) 進みました。フェーザーにおいて、jω は微分のことだということが分かります。複素平面でフェーザー表示した一つの正弦波は、一回の微分ごとに jω 倍されます。大きさは ω 倍、位相は j 倍です。

目次へ戻る