

ラプラス変換で求めます。

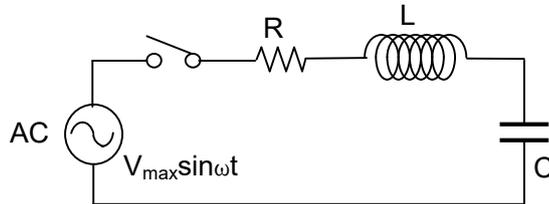
(3) 共役複素数根の場合

$\sin \omega t$ に初期位相 θ がある場合、加法定理により、

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta$$

となります。ラプラス変換 L は、

$$\begin{aligned} & L(\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cos \theta + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin \theta \\ &= \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \end{aligned}$$



になります。最大値が V_{\max} の正弦波の場合は、この式の頭に V_{\max} が付きます。

右図でスイッチを入れる $t=0$ で、電流が 0、コンデンサーの電荷も 0、電源 $V_{\max} \sin \omega t$ の位相が θ の場合、ラプラスの世界での電流 $I(s)$ は、

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_{\max} (\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \div \left(R + Ls + \frac{1}{sC} \right) \\ &= \frac{V_{\max} (\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega) \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となります。因数分解しやすくする為、分子分母に $\frac{s}{L}$ を掛けると、

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{s}{L} \cdot V_{\max} (\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega) \cdot \frac{s}{L} \cdot \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} \\ &= \frac{s \cdot V_{\max} (\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L (s - j\omega)(s + j\omega) \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)} \end{aligned}$$

になります。分母の $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$ を $=0$ と置いた時の根（解）は、

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} &= -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{L \cdot 4}{L \cdot LC}} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C} \right)} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \end{aligned}$$

です。根号内、 $R^2 - \frac{4L}{C}$ の状態によって次の3種類に分かれます。

- (1) 根号内为正の為、2実根の場合。(1)をご覧ください。
- (2) 根号内が零の為、実数の重根の場合。(2)をご覧ください。
- (3) 根号内が負の為、共役複素数根の場合。本章をご覧ください。

共役複素数根の場合、 $R^2 < \frac{4L}{C}$ の為、根号内が負になります。根号内の計算を逆にして、

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$$

にします。根（解）を s_1 、 s_2 としますと、 β の前に j が付き、

$$s_1 = -\alpha + j\beta \quad s_2 = -\alpha - j\beta$$

となり、共役（きょうやく）複素数の根になります。

因数定理により、分母の $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$ は因数分解され、

$$\begin{aligned} &\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} \\ &= \frac{L}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s - s_1)(s - s_2)} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となります。ラプラス逆変換の為、部分分数分解を行いますので、

$$= \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2}$$

と置きます。A、B、D、E を求めます。ヘビサイドの目隠し法を使います。ヘビサイドの目隠し法については「部分分数分解」の章を御覧下さい。

定常項に関係するAの値を求める時は、左辺に①式を用い、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s-j\omega)$ を掛け、

$$(s-j\omega) \cdot \frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = (s-j\omega) \cdot \left(\frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2} \right)$$

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = A + \frac{(s-j\omega)B}{s+j\omega} + \frac{(s-j\omega)D}{s-s_1} + \frac{(s-j\omega)E}{s-s_2}$$

$s = j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + j\omega \sin \theta)}{(j\omega+j\omega)\left(j\omega L+R+\frac{1}{j\omega C}\right)} = A + \frac{(j\omega-j\omega)B}{j\omega+j\omega} + \frac{(j\omega-j\omega)D}{j\omega-s_1} + \frac{(j\omega-j\omega)E}{j\omega-s_2}$$

$$\frac{V_{\max}\omega(\cos \theta + j \sin \theta)}{2j\omega\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)} = A$$

$$\frac{V_{\max}(\cos \theta + j \sin \theta)}{2j\left(R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\right)} = A$$

$$\frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j\left\{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}} = A$$

です。オイラーの公式、 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ を使いました。

同じく定常項に関するBの値を求める時も、左辺に①式を用い、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s+j\omega)$ を掛け、

$$(s + j\omega) \cdot \frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega) \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} = (s + j\omega) \cdot \left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2} \right)$$

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega) \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{(s + j\omega)A}{s - j\omega} + B + \frac{(s + j\omega)D}{s - s_1} + \frac{(s + j\omega)E}{s - s_2}$$

$s = -j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta - j\omega \sin \theta)}{(-j\omega - j\omega) \left(-j\omega L + R + \frac{1}{-j\omega C} \right)} = \frac{(-j\omega + j\omega)A}{-j\omega - j\omega} + B + \frac{(-j\omega + j\omega)D}{-j\omega - s_1} + \frac{(-j\omega + j\omega)E}{-j\omega - s_2}$$

$$\frac{V_{\max} \omega (\cos \theta - j \sin \theta)}{-2j\omega \left(R - j\omega L - \frac{1}{j\omega C} \right)} = B$$

$$\frac{V_{\max} (\cos \theta - j \sin \theta)}{-2j \left(R - j\omega L + j \frac{1}{\omega C} \right)} = B$$

$$\frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} = B$$

です。オイラーの公式、 $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$ を使いました。

過渡項に関する D の値を求める時は、左辺に②式を用い、

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s - s_1)$ を掛け、

$$(s - s_1) \cdot \frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = (s - s_1) \cdot \left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2} \right)$$

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{(s-s_1)A}{s-j\omega} + \frac{(s-s_1)B}{s+j\omega} + D + \frac{(s-s_1)E}{s-s_2}$$

$s = s_1$ と置きますと、

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L} = \frac{(s_1-s_1)A}{s_1-j\omega} + \frac{(s_1-s_1)B}{s_1+j\omega} + D + \frac{(s_1-s_1)E}{s_1-s_2}$$

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L} = D$$

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{(s_1^2 + j\omega s_1 - j\omega s_1 + \omega^2)(s_1 - s_2)} = D$$

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L} = D$$

$$\frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} = D$$

です。

同じく過渡項に関する E の値を求める時も、左辺に②式を用い、

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s-s_2)$ を掛け、

$$(s-s_2) \cdot \frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = (s-s_2) \cdot \left(\frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2} \right)$$

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{(s-s_2)A}{s-j\omega} + \frac{(s-s_2)B}{s+j\omega} + \frac{(s-s_2)D}{s-s_2} + E$$

$s = s_2$ と置きますと、

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = \frac{(s_2-s_2)A}{s_2-j\omega} + \frac{(s_2-s_2)B}{s_2+j\omega} + \frac{(s_2-s_2)D}{s_2-s_2} + E$$

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = E$$

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = E$$

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = E$$

$$\frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} = E$$

です。

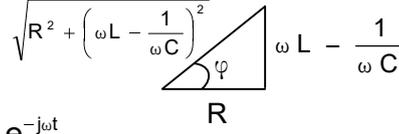
A、B、D、E が求まりました。ラプラス逆変換をして I を求めますと、

$$I = L^{-1} \left[\frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j \left\{ R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \frac{1}{s-j\omega} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \frac{1}{s+j\omega} \right. \\ \left. + \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \frac{1}{s-s_1} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} \frac{1}{s-s_2} \right] \\ = \frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j \left\{ R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{-j\omega t}$$

$$+ \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \cdot e^{s_1 t} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} \cdot e^{s_2 t}$$

になります。上式の前 2 項が定常項です。後ろ 2 項が過渡項です。定常項、過渡項に分けて計算します。

(1)定常項の計算

$$\frac{V_{\max} \cdot e^{j0}}{2j \left\{ R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j0}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{-j\omega t}$$


分母の中括弧内複素数を極形式に直しますと、(右上の図をご覧ください。)

$$= \frac{V_{\max} \cdot e^{j0}}{2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j0}}{-2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{-j\omega t}$$

$$= \frac{V_{\max}}{2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\varphi} + \frac{V_{\max}}{-2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{-j0} \cdot e^{j\varphi}$$

$$= \frac{V_{\max}}{2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{j(\omega t + \theta - \varphi)} + \frac{V_{\max}}{-2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{-j(\omega t + \theta - \varphi)}$$

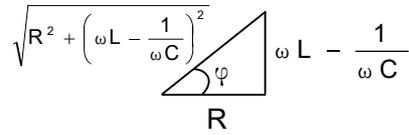
$$= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \frac{e^{j(\omega t + \theta - \varphi)}}{2j} + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \frac{e^{-j(\omega t + \theta - \varphi)}}{-2j}$$

$$= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \left(\frac{e^{j(\omega t + \theta - \varphi)} - e^{-j(\omega t + \theta - \varphi)}}{2j} \right)$$

$$= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \sin(\omega t + \theta - \varphi)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ と置きますと、}$$

$$= \frac{V_{\max}}{Z} \cdot \sin(\omega t + \theta - \varphi)$$



$$\frac{V_{\max}}{Z} = I_{\max} \text{ としますと、}$$

$$= I_{\max} \cdot \sin(\omega t + \theta - \varphi)$$

になりました。 θ はスイッチオン時の正弦波初期位相、 φ はインピーダンスの角度です。

(2) 過渡項の計算

$$\begin{aligned} & \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \cdot e^{s_1 t} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} \cdot e^{s_2 t} \\ &= \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{L(s_2^2 + \omega^2) \cdot -(s_1 - s_2)} \\ &= \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} - \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \\ &= \frac{V_{\max}}{L(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{s_1^2 + \omega^2} - \frac{s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{s_2^2 + \omega^2} \right\} \end{aligned}$$

です。 $s_1 - s_2 = -\alpha + j\beta - (-\alpha - j\beta) = -\alpha + j\beta + \alpha + j\beta = 2j\beta$ ですから、

$$= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \left\{ \frac{s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{s_1^2 + \omega^2} - \frac{s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{s_2^2 + \omega^2} \right\}$$

です。中括弧内を通分しますと、

$$\begin{aligned} &= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \left\{ \frac{s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)(s_2^2 + \omega^2) e^{s_1 t} - s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)(s_1^2 + \omega^2) e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\} \\ &= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \left[\frac{s_1 \{ \omega(s_2^2 + \omega^2) \cos \theta + s_1(s_2^2 + \omega^2) \sin \theta \} e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{-s_2\{\omega(s_1^2 + \omega^2)\cos\theta + s_2(s_1^2 + \omega^2)\sin\theta\} e^{s_2 t}}{(s_2^2 + \omega^2)} \right]$$

です。通分した分母を計算しますと、

$$\begin{aligned} (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) &= \{(-\alpha + j\beta)^2 + \omega^2\}\{(-\alpha - j\beta)^2 + \omega^2\} \\ &= \{(-\alpha + j\beta)(-\alpha + j\beta) + \omega^2\}\{(-\alpha - j\beta)(-\alpha - j\beta) + \omega^2\} \\ &= (\alpha^2 - j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2)(\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2) \\ &= \alpha^4 + j2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\omega^2 - j2\alpha^3\beta + 4\alpha^2\beta^2 + j2\alpha\beta^3 - j2\alpha\beta\omega^2 \\ &\quad - \alpha^2\beta^2 - j2\alpha\beta^3 + \beta^4 - \beta^2\omega^2 + \alpha^2\omega^2 + j2\alpha\beta\omega^2 - \beta^2\omega^2 + \omega^4 \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\omega^2 + \beta^4 - 2\beta^2\omega^2 + \omega^4 \\ &= (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\omega^2 + \beta^4 - 2\beta^2\omega^2 + \omega^4) + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= (\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\omega^2 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \beta^2\omega^2 - \alpha^2\omega^2 - \beta^2\omega^2 + \omega^4) + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= \{\alpha^4 - \alpha^2(j\beta)^2 - \alpha^2\omega^2 - \alpha^2(j\beta)^2 + (j\beta)^4 + (j\beta)^2\omega^2 - \alpha^2\omega^2 + (j\beta)^2\omega^2 + \omega^4\} + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= \alpha^2\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (j\beta)^2\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - \omega^2\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= \{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= \{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2 \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

になります。③式に α と β の値を代入しますと、

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \left(j \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \right)^2 - \omega^2 \right\}^2 + \left(2 \cdot \frac{R}{2L} \cdot \omega \right)^2 \\ &= \left[\frac{R^2}{4L^2} - \left\{ -\frac{1}{4L^2} \left(\frac{4L}{C} - R^2 \right) \right\} - \omega^2 \right]^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left\{ \frac{R^2}{4L^2} - \left(-\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2} \right) - \omega^2 \right\}^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left\{ \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 \right\}^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^2 C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2} \\
&= \frac{R^2 \omega^2}{L^2} + \frac{1}{L^2 C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 \\
&= \frac{\omega^2}{L^2} \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{2L}{C} + \omega^2 L^2 \right) \\
&= \frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right) \right\} \\
&= \frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\} \cdots \cdots \textcircled{4}
\end{aligned}$$

になりました。通分した分母の計算は上手く行き、インピーダンスの絶対値の2乗に $\frac{\omega^2}{L^2}$ を掛けた形になります。通分しませんでしたと根号が取れず、この様に上手く行きません。

③式で、 $(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)$ を $\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2$ に変形した訳は以下の通りです。

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{R}{2L} \\
j\beta &= j \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}
\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \left(\frac{R}{2L} \right)^2 = \frac{R^2}{4L^2} \\
(j\beta)^2 &= \left(j \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \right)^2 = -\frac{1}{4L^2} \left(\frac{4L}{C} - R^2 \right) = -\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}
\end{aligned}$$

です。 α^2 から $(j\beta)^2$ を引きますと、

$$\alpha^2 - (j\beta)^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \left(-\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2} \right) = \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

になります。更に ω^2 を引きますと、

$$\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 = \frac{1}{LC} - \omega^2 = -\omega^2 + \frac{1}{LC} = -\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

になり、 $-\frac{\omega}{L}$ を掛けたリアクタンス成分が出ます。

また、

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

ですから 2 を掛けると、

$$2\alpha = 2 \cdot \frac{R}{2L} = \frac{R}{L}$$

になります。更に ω を掛けると、

$$2\alpha\omega = \frac{\omega R}{L}$$

となり、 $\frac{\omega}{L}$ を掛けた抵抗成分が出ます。

$\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と $2\alpha\omega$ をそれぞれ 2 乗して足しますと、

$$\begin{aligned} \{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2 &= \left\{ -\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}^2 + \left(\frac{\omega R}{L} \right)^2 \\ &= \frac{\omega^2}{L^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{L^2} \\ &= \frac{\omega^2}{L^2} R^2 + \frac{\omega^2}{L^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \\ &= \frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

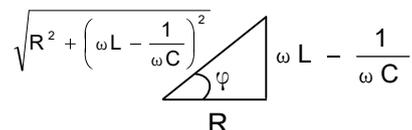
になり、 $\frac{\omega^2}{L^2}$ を掛けたインピーダンスの絶対値の 2 乗が出ます。

この $\frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}$ の式で、 $R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = Z^2$ としますと、

$$(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) = \{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2 = \frac{\omega^2}{L^2} Z^2$$

です。この式を平方根にしますと、

$$\sqrt{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} = \frac{\omega Z}{L}$$



です。 $2\alpha\omega = \frac{\omega}{L}R$ を上式で割りますと、

$$\frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)}} = \frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{\omega Z}{L}} = \frac{\omega R}{L} \cdot \frac{L}{\omega Z} = \frac{R}{Z} = \cos \varphi \cdots \textcircled{5}$$

になりインピーダンスの $\cos \varphi$ が生じます。 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 = -\frac{\omega}{L}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ を割りますと、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2}{\sqrt{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)}} &= \frac{-\omega\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\frac{\omega Z}{L}} \\ &= \frac{-\omega\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{L} \cdot \frac{L}{\omega Z} \\ &= \frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{Z} \quad \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \begin{array}{c} R \\ \triangleleft -\varphi \end{array} - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= \sin(-\varphi) \\ &= -\sin \varphi \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

になりインピーダンスの $-\sin \varphi$ が生じます。

インピーダンスのリアクタンス成分と抵抗成分とを分ける為に、

$$(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) = \{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2$$

と変形致しました。

通分後の分子前半 $s_1\{\omega(s_2^2 + \omega^2)\cos \theta + s_1(s_2^2 + \omega^2)\sin \theta\} \cdot e^{s_1 t}$ 中の $\omega(s_2^2 + \omega^2)$ を計算します。ここでもリアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned} \omega(s_2^2 + \omega^2) &= \omega\{(-\alpha - j\beta)^2 + \omega^2\} \\ &= \omega\{(-\alpha - j\beta)(-\alpha - j\beta) + \omega^2\} \\ &= \omega(\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2) \\ &= \alpha^2\omega + j2\alpha\beta\omega - \beta^2\omega + \omega^3 \\ &= -\alpha^2\omega - \beta^2\omega + \omega^3 + 2\alpha^2\omega + j2\alpha\beta\omega \end{aligned}$$

$$= -\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega$$

です。更に中括弧の前にある $s_1 = -\alpha + j\beta = -(\alpha - j\beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned} s_1 \cdot \omega(s_2^2 + \omega^2) &= -(\alpha - j\beta)[-\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega] \\ &= \omega(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha - j\beta)(\alpha + j\beta)2\alpha\omega \\ &= \omega(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega \end{aligned}$$

になりました。通分後の分子前半、中括弧内の $s_1(s_2^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned} s_1(s_2^2 + \omega^2) &= (-\alpha + j\beta)\{(-\alpha - j\beta)^2 + \omega^2\} \\ &= (-\alpha + j\beta)\{(-\alpha - j\beta)(-\alpha - j\beta) + \omega^2\} \\ &= (-\alpha + j\beta)(\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2) \\ &= -\alpha^3 - j2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 + j\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 - j\beta^3 + j\beta\omega^2 \\ &= -\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha\omega^2 - j\alpha^2\beta - j\beta^3 + j\beta\omega^2 - 2\alpha\omega^2 \\ &= -\alpha\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - j\beta\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2 \\ &= (-\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2 \\ &= -(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2 \end{aligned}$$

更に中括弧の前にある $s_1 = -\alpha + j\beta = -(\alpha - j\beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned} s_1 \cdot s_1(s_2^2 + \omega^2) &= -(\alpha - j\beta)[-(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2] \\ &= (\alpha - j\beta)(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2 \end{aligned}$$

です。

通分後の分子後半 $s_2\{\omega(s_1^2 + \omega^2)\cos\theta + s_2(s_1^2 + \omega^2)\sin\theta\} \cdot e^{s_2t}$ 中の $\omega(s_1^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned} \omega(s_1^2 + \omega^2) &= \omega\{(-\alpha + j\beta)^2 + \omega^2\} \\ &= \omega\{(-\alpha + j\beta)(-\alpha + j\beta) + \omega^2\} \\ &= \omega(\alpha^2 - j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2) \\ &= \alpha^2\omega - j2\alpha\beta\omega - \beta^2\omega + \omega^3 \\ &= -\alpha^2\omega - \beta^2\omega + \omega^3 + 2\alpha^2\omega - j2\alpha\beta\omega \\ &= -\omega(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2) + 2\alpha^2\omega - j2\alpha\beta\omega \\ &= -\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega \end{aligned}$$

です。更に中括弧の前にある $s_2 = -\alpha - j\beta = -(\alpha + j\beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned} s_2 \cdot \omega(s_1^2 + \omega^2) &= -(\alpha + j\beta)[-\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega] \\ &= \omega(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)2\alpha\omega \\ &= \omega(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega \end{aligned}$$

です。

通分後の分子後半、中括弧内の $s_2(s_1^2 + \omega^2)$ を計算します。

リアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned} s_2(s_1^2 + \omega^2) &= (-\alpha - j\beta)\{-\alpha + j\beta + \omega^2\} \\ &= (-\alpha - j\beta)\{-\alpha + j\beta + \omega^2\} \\ &= (-\alpha - j\beta)(\alpha^2 - j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2) \\ &= -\alpha^3 + j2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 - j\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + j\beta^3 - j\beta\omega^2 \\ &= -\alpha^3 - \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 + j\alpha^2\beta + j\beta^3 - j\beta\omega^2 \\ &= -\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha\omega^2 + j\alpha^2\beta + j\beta^3 - j\beta\omega^2 - 2\alpha\omega^2 \\ &= -\alpha\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + j\beta\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2 \\ &= (-\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2 \\ &= -(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2 \end{aligned}$$

です。更に中括弧の前にある $s_2 = -\alpha - j\beta = -(\alpha + j\beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned} s_2 \cdot s_2(s_1^2 + \omega^2) &= -(\alpha + j\beta)[-(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2] \\ &= (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega^2 \end{aligned}$$

です。以上の結果を使い元の式を書き直しますと、

$$\begin{aligned} &= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \bullet \frac{[\{\omega(\alpha - j\beta)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega\} \cos \theta]}{(s_1^2 + \omega^2)} \\ &\quad + \frac{[\{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2\} \sin \theta]}{(s_1^2 + \omega^2)} e^{s_1 t} \\ &= \frac{-[\{\omega(\alpha + j\beta)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega\} \cos \theta]}{(s_2^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega^2\} \sin \theta] e^{s_2 t}}{\omega(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} \cos \theta \cdot e^{s_1 t} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(\alpha^2 + \beta^2)\{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \sin \theta \cdot e^{s_1 t}} + \frac{(\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2 \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\omega(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} \cos \theta \cdot e^{s_2 t}} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(\alpha^2 + \beta^2)\{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \sin \theta \cdot e^{s_2 t}} \\
= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} & \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2 \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& - \frac{\omega(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& \left. - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha + j\beta)2\alpha\omega^2 \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\}
\end{aligned}$$

となります。分子分母に $\frac{\omega Z}{L}$ を掛け、⑤式、⑥式を使いますと、

$$\begin{aligned}
= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} & \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& \left. - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \{ \alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 \} \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\} \\
= \frac{V_{\max}}{2j\beta L} & \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& \left. \begin{aligned}
& - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

です。 $(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) = \frac{\omega^2}{L^2} Z^2 = \left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2$ ですので、

$$\begin{aligned}
& = \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \right. \\
& \quad + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} + \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \\
& \quad - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \\
& \quad \left. - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \right\} \\
& = \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - j\beta)(-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} + \frac{\omega(\alpha - j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} \\
& - \frac{\omega(\alpha + j\beta)(-\sin\varphi) \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}} \\
& \left. \begin{aligned}
& - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}} - \frac{\omega(\alpha + j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}}
\end{aligned} \right\} \\
= & \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \cdot \frac{1}{\frac{\omega Z}{L}} \left\{ \omega(\alpha - j\beta)(-\sin\varphi) \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} \right. \\
& + (\alpha^2 + \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} + \omega(\alpha - j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} \\
& - \omega(\alpha + j\beta)(-\sin\varphi) \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} \\
& \left. - (\alpha^2 + \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} - \omega(\alpha + j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} \right\}
\end{aligned}$$

となります。括弧内の-を前に出しますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \cdot \frac{1}{\frac{\omega Z}{L}} \left\{ -\omega(\alpha - j\beta)\sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} \right. \\
& - (\alpha^2 + \beta^2)\sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} + \omega(\alpha - j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} \\
& + \omega(\alpha + j\beta)\sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} \\
& \left. + (\alpha^2 + \beta^2)\sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} - \omega(\alpha + j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} \right\}
\end{aligned}$$

になります。加法定理が成り立つように並べかえますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{V_{\max}}{2j\beta L} \cdot \frac{L}{\omega Z} \left\{ \omega(\alpha - j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} - \omega(\alpha - j\beta) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} \right. \\
& - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} \\
& \left. - \omega(\alpha + j\beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} + \omega(\alpha + j\beta) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t} + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t} \} \\
= & \frac{V_{\max}}{2j\beta\omega Z} \cdot \{ \omega(\alpha - j\beta)(\sin \theta \cdot \cos \varphi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_1 t} \\
& - (\alpha^2 + \beta^2)(\cos \theta \cdot \cos \varphi + \sin \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_1 t} \\
& - \omega(\alpha + j\beta)(\sin \theta \cdot \cos \varphi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_2 t} \\
& + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos \theta \cdot \cos \varphi + \sin \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_2 t} \}
\end{aligned}$$

になります。加法定理を行いますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{V_{\max}}{2j\beta\omega Z} \cdot [\{ \omega(\alpha - j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{s_1 t} \\
& - \{ \omega(\alpha + j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{s_2 t}]
\end{aligned}$$

です。 $\frac{V_{\max}}{Z} = I_{\max}$ とし、 s_1 、 s_2 に数値を代入しますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot [\{ \omega(\alpha - j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{(-\alpha + j\beta)t} \\
& - \{ \omega(\alpha + j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{(-\alpha - j\beta)t}] \\
= & \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot [\{ \omega(\alpha - j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{-\alpha t} e^{j\beta t} \\
& - \{ \omega(\alpha + j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}] \\
= & \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot \{ \omega(\alpha - j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{j\beta t} - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{j\beta t} \\
& - \omega(\alpha + j\beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} \} \\
= & \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha - j\beta) \cdot e^{j\beta t} - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{j\beta t} \\
& - \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha + j\beta) \cdot e^{-j\beta t} + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} \} \\
= & \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha - j\beta) \cdot e^{j\beta t} - \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha + j\beta) \cdot e^{-j\beta t} \\
& - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{j\beta t} + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} \}
\end{aligned}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot [\sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{ \omega(\alpha - j\beta) \cdot e^{j\beta t} - \omega(\alpha + j\beta) \cdot e^{-j\beta t} \} \\ - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \{ e^{j\beta t} - e^{-j\beta t} \}]$$

$e^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t$ 、 $e^{-j\beta t} = \cos\beta t - j\sin\beta t$ 、 $e^{j\beta t} - e^{-j\beta t} = 2j\sin\beta t$ を使いますと、

$$= \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot [\sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{ \omega(\alpha - j\beta)(\cos\beta t + j\sin\beta t) - \omega(\alpha + j\beta)(\cos\beta t - j\sin\beta t) \} \\ - (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot 2j\sin\beta t]$$

$$= \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (\alpha\omega\cos\beta t + j\alpha\omega\sin\beta t - j\beta\omega\cos\beta t + \beta\omega\sin\beta t \\ - \alpha\omega\cos\beta t + j\alpha\omega\sin\beta t - j\beta\omega\cos\beta t - \beta\omega\sin\beta t) - (\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot 2j\sin\beta t \}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2j\alpha\omega\sin\beta t - 2j\beta\omega\cos\beta t) - (\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot 2j\sin\beta t \}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2j\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2j\omega)(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) - 2j(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t \}$$

$$= I_{\max} \left\{ \frac{1}{2j\beta\omega} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2j\omega)(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) - \frac{1}{2j\beta\omega} \cdot 2j(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) - \frac{1}{\beta\omega} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t \right\}$$

三角関数の合成公式により、(この章の最後に説明が有ります。)

$\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin\left(\beta t - \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)$ です。 $\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} = \Phi$ とします。

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{1}{\beta\omega} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sin\beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t - \Phi) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta\omega} \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sin\beta t \right\}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}\right)^2$$

$$= \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{4L^2} \left(\frac{4L}{C} - R^2\right)$$

$$= \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

$$= \frac{1}{LC}$$

ですから、

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}}{2L \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{2L \cdot \frac{1}{LC}}{2L \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{L} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{C}}}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{C \cdot \frac{2}{C}}{C \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\theta - \varphi) \sin(\beta t - \Phi) - \frac{2}{\omega C \cdot \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\theta - \varphi) \sin \beta t \right\}$$

となります。定常項を加えますと、

$$I = I_{\max} \cdot \left\{ \sin(\omega t + \theta - \varphi) + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\theta - \varphi) \sin(\beta t - \Phi) \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\omega C \cdot \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\theta - \varphi) \sin \beta t \right\}$$

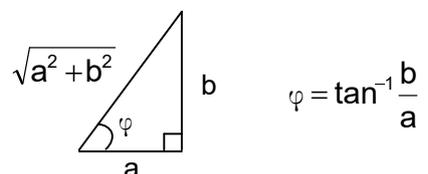
です。

三角関数の合成公式について

三角関数の合成公式について説明致します。

$$a \sin \theta - b \cos \theta$$

と言う式があったとします。aを底辺、bを高さとする直角三角形を作りますと、



$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi$ 、 $b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi$ となります。この値を $a \sin \theta - b \cos \theta$ に代入しますと、

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi \sin \theta - \sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta - \varphi) \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned}$$

となります。これを三角関数の合成公式と言います。

[目次へ戻る](#)