RLC 直列回路の交流過渡現象(2)　　　　　　　　　2022 年 8 月 30 日　　目次へ戻る

2023.2.7　2023.2.9　2023.3.29　2023.5.14　2025.9.21　訂正

ラプラス変換で求めます。

(2)実数の重根（解）の場合

sinωt に初期位相 θ がある場合、加法定理により、

$$\sin(\omega t+\theta)=\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta$$

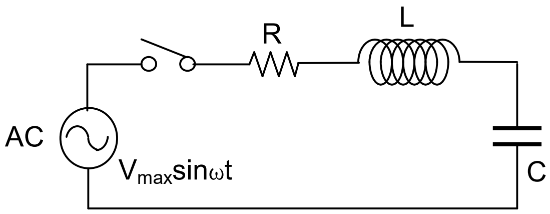
となります。ラプラス変換 L は、

$$L(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\theta+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\theta$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$



$$R^2=\frac{4L}{C}$$

になります。最大値が V_{max} の正弦波の場合は、この式の頭に V_{max} が付きます。

右図でスイッチを入れる t=0 で、電流が 0、コンデンサーの電荷も 0、電源 $V_{max}\sin\omega t$ の位相が θ の場合、ラプラスの世界での電流 I(s)は、

$$I(s)=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\div\left(R+Ls+\frac{1}{sC}\right)$$

$$=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}$$

となります。因数分解しやすくする為、分子分母に $\frac{s}{L}$ を掛けますと、

$$=\frac{\frac{s}{L}\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\cdot\frac{s}{L}\cdot\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}$$

$$=\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}$$

になります。分母の$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}$を＝0 と置いた時の根（解）は、

$$\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{4}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{L\cdot 4}{L\cdot LC}}$$

$$=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{L^2}\left(R^2-\frac{4L}{C}\right)}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

です。根号内の状態によって次の 3 種類に分かれます。

(1)　根号内が正の為、2 実根の場合。(1)をご覧下さい。

(2)　根号内が零の為、実数の重根（解）の場合。本章をご覧下さい。

(3)　根号内が負の為、共役複素数根の場合。(3)をご覧下さい。

(2)実数の重根（解）の場合

$$-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

において、

$$\alpha=\frac{R}{2L}\qquad\beta=\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

とし、根（解）を s_1、s_2 としますと、

$$s_1=-\alpha+\beta\qquad s_2=-\alpha-\beta$$

になります。分母は因数分解され、

$$=\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)(s-s_2)}$$

となりますが、$R^2=\frac{4L}{C}$の場合 β の根号内が零になります。すると β＝0 ですから、s_1 と s_2 が同じ$-\alpha$ になり、

$$=\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\{s-(-\alpha)\}\{s-(-\alpha)\}}$$

$$=\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

となります。ラプラス逆変換の為、部分分数分解を行いますが、分母に(　)^{2}と言う 2 重因数がある場合、部分分数分解の項を 1 つ増やし、

$$=\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\dfrac{R}{2L}}+\frac{E}{\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

と置きます。理由は「部分分数分解」の章を御覧下さい。A、B、D、E を求めます。A を求めるには、両辺に$(s-j\omega)$を掛け、

$$(s-j\omega)\cdot\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}=(s-j\omega)\cdot\left\{\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\dfrac{R}{2L}}+\frac{E}{\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}\right\}$$

$$\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s+j\omega)\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}=A+\frac{(s-j\omega)B}{s+j\omega}+\frac{(s-j\omega)D}{s+\dfrac{R}{2L}}+\frac{(s-j\omega)E}{\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

$s=j\omega$と置きますと、

$$\frac{\dfrac{j\omega\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+j\omega\sin\theta)}{(j\omega+j\omega)\left(j\omega+\dfrac{R}{2L}\right)^2}=A+\frac{(j\omega-j\omega)B}{j\omega+j\omega}+\frac{(j\omega-j\omega)D}{j\omega+\dfrac{R}{2L}}+\frac{(j\omega-j\omega)E}{\left(j\omega+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\frac{j\omega\dfrac{V_{max}}{L}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\omega\left(-\omega^2+j\dfrac{\omega R}{L}+\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}=A+0+0+0$$

$$\frac{\dfrac{V_{max}}{L}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2\left(-\omega^2+j\dfrac{\omega R}{L}+\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}=A$$

になります。分子分母にLを掛けますと、

$$\frac{L\cdot\frac{V_{max}}{L}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2\cdot L\cdot\left(-\omega^2+j\frac{\omega R}{L}+\frac{R^2}{4L^2}\right)}=A$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2\left(j\omega R-\omega^2 L+\frac{R^2}{4L}\right)}=A$$

になります。βの根号内が零の場合$R^2=\frac{4L}{C}$ですから、上式に代入しますと、

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2\left(j\omega R-\omega^2 L+\frac{4L}{C}\cdot\frac{1}{4L}\right)}=A$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2\left(j\omega R-\omega^2 L+\frac{1}{C}\right)}=A$$

になります。分母の括弧内から$j\omega$を前に出しますと、

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\omega\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)}=A$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)}=A$$

になります。分母の$\frac{1}{j\omega C}$の分子分母にjを掛けますと、

$$\frac{V_{max}(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\left(R+j\omega L+\frac{j\cdot 1}{j\cdot j\omega C}\right)}=A$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\left(R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}\right)}=A$$

になります。分母の虚数部をまとめますと、

$$\frac{V_{max}(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\left\{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}}=A$$

です。オイラーの公式を使いますと、

$$\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{2j}=A$$

です。

B を求めるには、両辺に$(s+j\omega)$を掛け、

$$(s+j\omega)\cdot\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}=(s+j\omega)\cdot\left\{\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\dfrac{R}{2L}}+\frac{E}{\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}\right\}$$

$$\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}=\frac{(s+j\omega)A}{s-j\omega}+B+\frac{(s+j\omega)D}{s+\dfrac{R}{2L}}+\frac{(s+j\omega)E}{\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

$s=-j\omega$と置きますと、

$$\frac{\dfrac{-j\omega\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta-j\omega\sin\theta)}{(-j\omega-j\omega)\left(-j\omega+\dfrac{R}{2L}\right)^2}=\frac{(-j\omega+j\omega)A}{-j\omega-j\omega}+B+\frac{(-j\omega+j\omega)D}{-j\omega+\dfrac{R}{2L}}+\frac{(-j\omega+j\omega)E}{\left(-j\omega+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\frac{-j\omega\cdot\dfrac{V_{max}}{L}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\omega\left(-\omega^2-j\dfrac{\omega R}{L}+\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}=0+B+0+0$$

$$\frac{\dfrac{V_{max}}{L}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{2\left(-\omega^2-j\dfrac{\omega R}{L}+\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}=B$$

になります。分子分母に L を掛けますと、

$$\frac{L\cdot\dfrac{V_{max}}{L}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{2\cdot L\cdot\left(-\omega^2-j\dfrac{\omega R}{L}+\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}=B$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{2\left(-j\omega R-\omega^2 L+\dfrac{R^2}{4L}\right)}=B$$

になります。β の根号内が零の場合、$R^2=\dfrac{4L}{C}$ ですから上式に代入しますと、

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{2\left(-j\omega R-\omega^2L+\dfrac{4L}{C}\cdot\dfrac{1}{4L}\right)}=B$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{2\left(-j\omega R-\omega^2L+\dfrac{1}{C}\right)}=B$$

になります。分母の括弧内から－$j\omega$ を前に出しますと、

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\omega\left(R-j\omega L+\dfrac{1}{-j\omega C}\right)}=B$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\left(R-j\omega L+\dfrac{1}{-j\omega C}\right)}=B$$

になります。分母の $\dfrac{1}{-j\omega C}$ の分子分母に j を掛けますと、

$$\frac{V_{max}(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\left(R-j\omega L+\dfrac{j\cdot 1}{-j\cdot j\omega C}\right)}=B$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\left(R-j\omega L+\dfrac{j}{\omega C}\right)}=B$$

になります。分母の虚数部をまとめますと、

$$\frac{V_{max}(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2\,j\left\{R-j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)\right\}}=B$$

です。オイラーの公式を使いますと、

$$\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R-j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{-2j}=B$$

です。

先に E を求めます。両辺に $\left(s+\dfrac{R}{2L}\right)^2$ を掛け、

$$\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2\cdot\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$=\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2\cdot\left\{\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\frac{R}{2L}}+\frac{E}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}\right\}$$

$$\frac{s\cdot\frac{V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}=\frac{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2A}{s-j\omega}+\frac{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2B}{s+j\omega}+\left(s+\frac{R}{2L}\right)D+E\cdot\cdot\cdot①$$

$s=-\frac{R}{2L}$ と置きますと、

$$\frac{-\frac{R}{2L}\cdot\frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{\left(-\frac{R}{2L}-j\omega\right)\left(-\frac{R}{2L}+j\omega\right)}=\frac{\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)^2A}{-\frac{R}{2L}-j\omega}+\frac{\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)^2B}{-\frac{R}{2L}+j\omega}+\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)D+E$$

$$\frac{-\frac{R}{2L}\cdot\frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2}=0+0+0+E$$

になります。分子分母に L を掛けますと、

$$\frac{L\cdot\left(-\frac{R}{2L}\right)\cdot\frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{L\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}}=E$$

$$\frac{-\frac{R}{2L}\cdot V_{max}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{L\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}}=E$$

になります。12 ページの②式により、

$$\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}^2=\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2 \qquad 但し\quad Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

ですので、

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2=\sqrt{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}=\frac{\omega Z}{L}$$

です。この結果を分母に代入して、

$$\frac{-\frac{R}{2L}\cdot V_{max}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{L\cdot\frac{\omega Z}{L}}=E$$

$$\frac{-\frac{R}{2L}\cdot V_{max}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{\omega Z}=E$$

になります。分子分母に$\frac{1}{\omega Z}$を掛けますと、

$$\frac{\frac{1}{\omega Z}\cdot\left(-\frac{R}{2L}\right)\cdot V_{max}\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{\frac{1}{\omega Z}\cdot\omega Z}=E$$

$$\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\left(-\frac{R}{2L}\right)\cdot\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)=E$$

になります。

D を求めます。7 ページの①式を再掲しますと、

$$\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}=\frac{A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{s-j\omega}+\frac{B\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{s+j\omega}+D\left(s+\frac{R}{2L}\right)+E$$

です。両辺を微分しますと、

$$\frac{d}{ds}\cdot\frac{\frac{V_{max}}{L}\omega s\cos\theta+\frac{V_{max}}{L}s^2\sin\theta}{s^2+\omega^2}=\frac{d}{ds}\cdot\frac{A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{s-j\omega}+\frac{d}{ds}\cdot\frac{B\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{s+j\omega}+\frac{d}{ds}\cdot D\left(s+\frac{R}{2L}\right)+\frac{d}{ds}\cdot E$$

になります、一つずつ微分して行きます。右辺第 1 項の微分は、

$$\frac{d}{ds}\cdot\frac{A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{s-j\omega}=\frac{\left\{\frac{d}{ds}\cdot A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2\right\}(s-j\omega)-A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2\left\{\frac{d}{ds}\cdot(s-j\omega)\right\}}{(s-j\omega)^2}$$

となります。$A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2$ の微分は合成関数の微分ですから、$y=Au^2$ 、$u=s+\frac{R}{2L}$ と置き、

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{ds}=\frac{d}{du}(Au^2)\cdot\frac{d}{ds}\left(s+\frac{R}{2L}\right)=2Au\cdot 1=2Au$$

となります。u を元に戻して、

$$=2A\left(s+\frac{R}{2L}\right)$$

です。したがって右辺第 1 項の微分は、

$$=\frac{2A\left(s+\frac{R}{2L}\right)(s-j\omega)-A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{(s-j\omega)^2}$$

となりました。次に右辺第 2 項の微分は、第 1 項の微分と同様に計算し、

$$\frac{d}{ds}\cdot\frac{B\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{s+j\omega}=\frac{2B\left(s+\frac{R}{2L}\right)(s+j\omega)-B\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{(s+j\omega)^2}$$

となります。右辺第 3 項、第 4 項の微分は、

$$\frac{d}{ds}\cdot D\left(s+\frac{R}{2L}\right)+\frac{d}{ds}\cdot E=D\cdot 1+0=D$$

となります。右辺全体の微分は、

$$\frac{2A\left(s+\frac{R}{2L}\right)(s-j\omega)-A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{(s-j\omega)^2}+\frac{2B\left(s+\frac{R}{2L}\right)(s+j\omega)-B\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{(s+j\omega)^2}+D$$

です。

左辺の微分は、

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{V_{max}}{L}\omega s\cos\theta+\frac{V_{max}}{L}s^2\sin\theta}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{V_{max}}{L}\omega s\cos\theta+\frac{V_{max}}{L}s^2\sin\theta\right)(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$\frac{-\left(\frac{V_{max}}{L}\omega s\cos\theta+\frac{V_{max}}{L}s^2\sin\theta\right)\frac{d}{ds}(s^2+\omega^2)}{}$$

$$=\frac{\left(\frac{V_{max}}{L}\omega\cos\theta+2\frac{V_{max}}{L}s\sin\theta\right)(s^2+\omega^2)-\left(\frac{V_{max}}{L}\omega s\cos\theta+\frac{V_{max}}{L}s^2\sin\theta\right)2s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$=\frac{\frac{V_{max}}{L}\omega s^2\cos\theta+2\frac{V_{max}}{L}s^3\sin\theta+\frac{V_{max}}{L}\omega^3\cos\theta+2\frac{V_{max}}{L}\omega^2 s\sin\theta}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$\frac{-2\frac{V_{max}}{L}\omega s^2\cos\theta-2\frac{V_{max}}{L}s^3\sin\theta}{}$$

$$=\frac{2\frac{V_{max}}{L}\omega^2 s\sin\theta-\frac{V_{max}}{L}\omega s^2\cos\theta+\frac{V_{max}}{L}\omega^3\cos\theta}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$=\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\{2\omega s\sin\theta-(s^2-\omega^2)\cos\theta\}}{(s^2+\omega^2)^2}$$

となります。

　全部の微分の結果は、

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\{2\omega s\sin\theta-(s^2-\omega^2)\cos\theta\}}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$=\frac{2A\left(s+\frac{R}{2L}\right)(s-j\omega)-A\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{(s-j\omega)^2}+\frac{2B\left(s+\frac{R}{2L}\right)(s+j\omega)-B\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}{(s+j\omega)^2}+D$$

となります。$s=-\frac{R}{2L}$ を代入しますと、

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\left[-2\omega\cdot\frac{R}{2L}\cdot\sin\theta-\left\{\left(-\frac{R}{2L}\right)^2-\omega^2\right\}\cos\theta\right]}{\left\{\left(-\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}^2}$$

$$=\frac{2A\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)\left(-\frac{R}{2L}-j\omega\right)-A\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)^2}{\left(-\frac{R}{2L}-j\omega\right)^2}+\frac{2B\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)\left(-\frac{R}{2L}+j\omega\right)-B\left(-\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}\right)^2}{\left(-\frac{R}{2L}+j\omega\right)^2}+D$$

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\left\{-\frac{\omega R}{L}\cdot\sin\theta-\left(\frac{R^2}{4L^2}-\omega^2\right)\cos\theta\right\}}{\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}^2}=0+0+D$$

です。分母だけ計算しますと、

$$\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}^2=\left(\frac{R}{2L}\right)^4+2\left(\frac{R}{2L}\right)^2\omega^2+\omega^4$$

$$=\frac{R^4}{16L^4}+\frac{R^2\omega^2}{2L^2}+\omega^4$$

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left(\frac{R^4}{16L^2\omega^2}+\frac{R^2}{2}+\omega^2L^2\right)$$

です。括弧内第 2 項 $\frac{R^2}{2}$ は、$R^2-\frac{R^2}{2}$ ですから、

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left(\frac{R^4}{16L^2\omega^2}+R^2-\frac{R^2}{2}+\omega^2L^2\right)$$

となり、並べ替えますと、

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left(R^2+\omega^2L^2-\frac{R^2}{2}+\frac{R^4}{16L^2\omega^2}\right)$$

です。β の根号内が零の場合、$R^2=\frac{4L}{C}$ ですから、括弧内第 3 項、第 4 項に代入し、

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left\{R^2+\omega^2L^2-\frac{4L}{C}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4L}{C}\right)^2\cdot\frac{1}{16L^2\omega^2}\right\}$$

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left(R^2+\omega^2L^2-\frac{4L}{C}\cdot\frac{1}{2}+\frac{16L^2}{C^2}\cdot\frac{1}{16L^2\omega^2}\right)$$

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left(R^2+\omega^2L^2-\frac{2L}{C}+\frac{1}{\omega^2C^2}\right)$$

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}$$

となりました。$R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2=Z^2$ としますと、

$$=\frac{\omega^2}{L^2}\cdot Z^2$$

$$=\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2 \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

になります。この結果を分母に代入し、

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\left\{-\frac{\omega R}{L}\cdot\sin\theta-\left(\frac{R^2}{4L^2}-\omega^2\right)\cos\theta\right\}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}=D$$

となります。$R^2=\frac{4L}{C}$ ですので、

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\left\{-\frac{\omega R}{L}\cdot\sin\theta-\left(\frac{4L}{C}\cdot\frac{1}{4L^2}-\omega^2\right)\cos\theta\right\}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}=D$$

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}\left\{-\frac{\omega R}{L}\cdot\sin\theta-\left(\frac{1}{CL}-\omega^2\right)\cos\theta\right\}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}=D$$

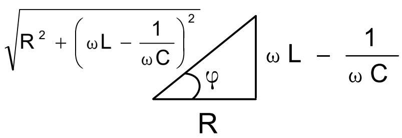
となります。分母$\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2$を２つに分け、

$$\frac{\frac{\omega}{L}\cdot V_{max}}{\frac{\omega Z}{L}}\cdot\frac{\left\{-\frac{\omega R}{L}\cdot\sin\theta-\left(\frac{1}{CL}-\omega^2\right)\cos\theta\right\}}{\frac{\omega Z}{L}}=D$$

$$\frac{V_{max}}{Z}\cdot\left\{-\frac{\frac{\omega R}{L}\cdot\sin\theta}{\frac{\omega Z}{L}}-\frac{\frac{L}{\omega}\cdot\left(\frac{1}{CL}-\omega^2\right)\cos\theta}{\frac{L}{\omega}\cdot\frac{\omega Z}{L}}\right\}=D$$

$$\frac{V_{max}}{Z}\cdot\left\{-\frac{R}{Z}\sin\theta-\frac{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)\cos\theta}{Z}\right\}=D$$

$$\frac{V_{max}}{Z}\cdot\left\{-\frac{R}{Z}\sin\theta+\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{Z}\cos\theta\right\}=D$$



$$\frac{V_{max}}{Z}\cdot(-\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\cos\theta)=D$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)=D$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)=D$$

となりました。部分分数分解は、

$$\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}=\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{2j}}{s-j\omega}+\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{-2j}}{s+j\omega}$$

$$+\frac{-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)}{s+\frac{R}{2L}}+\frac{\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\left(-\frac{R}{2L}\right)\cdot\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}$$

となります。ラプラス逆変換L^{-1}で電流Iを求めますと、

$$I=L^{-1}\left[\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{2j}}{s-j\omega}+\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{-2j}}{s+j\omega}\right.$$

$$\left.+\frac{-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)}{s+\frac{R}{2L}}+\frac{\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\left(-\frac{R}{2L}\right)\cdot\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j\omega t}+\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j\omega t}$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}-\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\frac{R}{2L}\cdot\left(\omega\cos\theta-\frac{R}{2L}\sin\theta\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$$

になりました。第１項、第２項の分母を極形式に直します。$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=Z$です。

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{Z\cdot e^{j\varphi}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j\omega t}+\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{Z\cdot e^{-j\varphi}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j\omega t}$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}+\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\frac{R}{2L}\cdot\left(\frac{R}{2L}\sin\theta-\omega\cos\theta\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$$

第１項、第２項のeを後ろに出しますと、

$$=\frac{V_{max}}{Z}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j\omega t+j\theta-j\varphi}+\frac{V_{max}}{Z}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j\omega t-j\theta+j\varphi}$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}+\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\frac{R}{2L}\cdot\left(\frac{R}{2L}\sin\theta-\omega\cos\theta\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$=\frac{V_{max}}{Z}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}-e^{-j(\omega t+j\theta-j\varphi)}}{2j}$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}+\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\frac{R}{2L}\cdot\left(\frac{R}{2L}\sin\theta-\omega\cos\theta\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$$

になります。指数関数表示を sin に直し、

$$=\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\omega t+\theta-\varphi)$$

$$-\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}+\frac{V_{max}}{\omega Z}\cdot\frac{R}{2L}\cdot\left(\frac{R}{2L}\sin\theta-\omega\cos\theta\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$$

になります。$\frac{V_{max}}{Z}=I_{max}$ と置きますと、

$$=I_{max}\cdot\left\{\sin(\omega t+\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{R}{2L}\cdot\left(\frac{R}{2L}\sin\theta-\omega\cos\theta\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}\right\}$$

になります。$\frac{R}{2L}$ を α としますと、

$$=I_{max}\cdot\left\{\sin(\omega t+\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}+\frac{\alpha}{\omega}\cdot(\alpha\sin\theta-\omega\cos\theta)\cdot t\cdot e^{-\alpha t}\right\}$$

になります。これが結論です。参考文献に載せました「交流理論」「交流回路と過渡現象」等の教科書の式とは違う形です。この式の過渡項だけを抜き出しますと、

$$I_{max}\cdot\left\{-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}+\frac{\alpha}{\omega}\cdot(\alpha\sin\theta-\omega\cos\theta)\cdot t\cdot e^{-\alpha t}\right\}$$

$$=-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}+I_{max}\frac{\alpha}{\omega}(\alpha\sin\theta-\omega\cos\theta)\cdot t\cdot e^{-\alpha t}$$

です。この章の最後の「参考：」の内容を使いますと、

$$\alpha=\omega\cos\varphi-\alpha\sin\varphi$$

$$\omega=\omega\sin\varphi+\alpha\cos\varphi$$

ですから、

$$=-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}$$

$$+I_{max}\frac{\alpha}{\omega}\{(\omega\cos\varphi-\alpha\sin\varphi)\sin\theta-(\omega\sin\varphi+\alpha\cos\varphi)\cos\theta\}\cdot t\cdot e^{-\alpha t}$$

$$=-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}$$

$$+I_{max}\frac{\alpha}{\omega}(\omega\sin\theta\cos\varphi-\omega\cos\theta\sin\varphi-\alpha\cos\theta\cos\varphi-\alpha\sin\theta\sin\varphi)\cdot t\cdot e^{-\alpha t}$$

$$=-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}$$

$$+I_{max}\frac{\alpha}{\omega}\{\omega(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)-\alpha(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)\}\cdot t\cdot e^{-\alpha t}$$

$$=-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}+I_{max}\frac{\alpha}{\omega}\{\omega\sin(\theta-\varphi)-\alpha\cos(\theta-\varphi)\}t\cdot e^{-\alpha t}$$

$$=-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}+I_{max}\cdot\alpha\sin(\theta-\varphi)t\cdot e^{-\alpha t}-I_{max}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega}\cos(\theta-\varphi)t\cdot e^{-\alpha t}$$

$$=I_{max}\cdot\alpha t\sin(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}-I_{max}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega}t\cos(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}$$

$$=I_{max}\cdot\left\{\alpha t\sin(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}-\sin(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}-\frac{\alpha^2}{\omega}t\cos(\theta-\varphi)e^{-\alpha t}\right\}$$

$$=I_{max}\cdot\left\{\alpha t\sin(\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)-\frac{\alpha^2}{\omega}t\cos(\theta-\varphi)\right\}\cdot e^{-\alpha t}$$

$$=I_{max}\cdot\left\{(\alpha t-1)\cdot\sin(\theta-\varphi)-\frac{\alpha^2}{\omega}\cdot t\cdot\cos(\theta-\varphi)\right\}\cdot e^{-\alpha t}$$

になります。定常項を加えますと、

$$I_{max}\cdot\sin(\omega t+\theta-\varphi)+I_{max}\cdot\left\{(\alpha t-1)\cdot\sin(\theta-\varphi)-\frac{\alpha^2}{\omega}\cdot t\cdot\cos(\theta-\varphi)\right\}\cdot e^{-\alpha t}$$

になります。教科書に載っている一般的な式になりました。

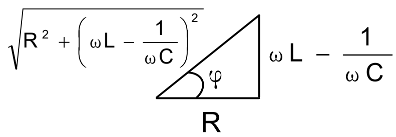
参考：$\alpha=\omega\cos\varphi-\alpha\sin\varphi$ 、$\omega=\omega\sin\varphi+\alpha\cos\varphi$ の件

$R^2=\dfrac{4L}{C}$ の場合、11 ページの分母の計算の結果は、12 ページ②式になります。つまり、

$$(\alpha^2+\omega^2)^2=\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2\right\}^2=\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2 \quad \text{但し} R^2=\frac{4L}{C}\text{、}Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

でしたので、

$$\alpha^2+\omega^2=\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2=\frac{\omega Z}{L}$$



です。$2\alpha\omega=2\cdot\frac{R}{2L}\cdot\omega=\frac{\omega R}{L}$ を利用しますと、

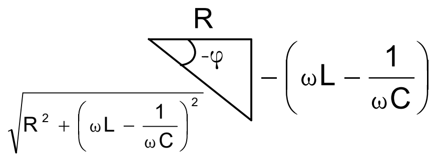
$$\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{\omega Z}{L}}=\frac{\omega R}{L}\bullet\frac{L}{\omega Z}=\frac{R}{Z}=\cos\varphi$$

となります。また、$\alpha^2-\omega^2=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\omega^2=\frac{4L}{C}\cdot\frac{1}{4L^2}-\omega^2=\frac{1}{CL}-\omega^2=-\frac{\omega}{L}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ を

利用しますと、

$$\frac{\alpha^2-\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{\frac{-\omega\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{L}}{\frac{\omega Z}{L}}=\frac{-\omega\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{L}\cdot\frac{L}{\omega Z}=\frac{-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{Z}$$

$$=\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$$



になります。これにより、

$$\begin{aligned}\omega\cos\varphi-\alpha\sin\varphi&=\omega\cdot\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2+\omega^2}+\alpha\frac{\alpha^2-\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\\&=\frac{\omega(2\alpha\omega)+\alpha(\alpha^2-\omega^2)}{\alpha^2+\omega^2}\\&=\frac{2\alpha\omega^2+\alpha^3-\alpha\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\\&=\frac{\alpha^3+\alpha\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\\&=\frac{\alpha(\alpha^2+\omega^2)}{\alpha^2+\omega^2}\\&=\alpha\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega\sin\varphi+\alpha\cos\varphi &= -\omega\cdot\frac{\alpha^2-\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}+\alpha\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2+\omega^2} \\
&= \frac{-\alpha^2\omega+\omega^3+2\alpha^2\omega}{\alpha^2+\omega^2} \\
&= \frac{\alpha^2\omega+\omega^3}{\alpha^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega(\alpha^2+\omega^2)}{\alpha^2+\omega^2} \\
&= \omega
\end{aligned}
$$

です。

目次へ戻る