

2023.2.7 2023.2.9 2023.3.29 2023.4.20 2023.5.14 2025.9.21 訂正

ラプラス変換で求めます。

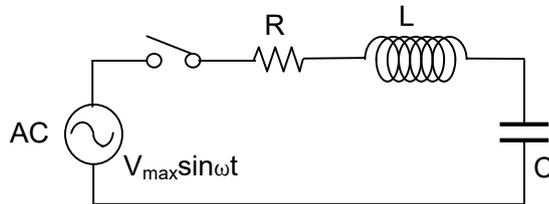
(1) 2 実根の場合

$\sin \omega t$ に初期位相 θ がある場合、加法定理により、

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta$$

となります。ラプラス変換 L は、

$$\begin{aligned} L(\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cos \theta + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin \theta \\ &= \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \end{aligned}$$



になります。最大値が V_{\max} の正弦波の場合は、この式の頭に V_{\max} が付きます。

右図でスイッチを入れる $t=0$ で、電流が 0、コンデンサーの電荷も 0、電源 $V_{\max} \sin \omega t$ の位相が θ の場合、ラプラスの世界での電流 $I(s)$ は、

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \div \left(R + Ls + \frac{1}{sC} \right) \\ &= \frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega) \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となります。因数分解しやすくする為、分子分母に $\frac{s}{L}$ を掛けますと、

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{s}{L} \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega) \cdot \frac{s}{L} \cdot \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} \\ &= \frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L (s - j\omega)(s + j\omega) \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)} \end{aligned}$$

になります。分母の $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$ を $=0$ と置いた時の根（解）は、

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} &= -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{L \cdot 4}{L \cdot LC}} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \end{aligned}$$

です。根号内、 $R^2 - \frac{4L}{C}$ の状態によって次の3種類に分かれます。

- (1) 根号内为正の為、2実根の場合。本章をご覧下さい。
- (2) 根号内が零の為、実数の重根の場合。(2)をご覧下さい。
- (3) 根号内が負の為、共役複素数根の場合。(3)をご覧下さい。

2実根の場合、

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

とし、根（解）を s_1, s_2 としますと、

$$s_1 = -\alpha + \beta \quad s_2 = -\alpha - \beta$$

になります。因数定理により、分母の $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$ は因数分解され、

$$\begin{aligned} &\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} \\ &= \frac{L}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s - s_1)(s - s_2)} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となります。ラプラス逆変換の為、部分分数分解を行いますので、

$$= \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2}$$

と置きます。A、B、D、Eを求めます。ヘビサイドの目隠し法を使います。ヘビサイドの目隠し法については「部分分数分解」の章を御覧下さい。

定常項に関するAの値を求める時は、左辺に①式を用い

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s-j\omega)$ を掛け、

$$(s-j\omega) \cdot \frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = (s-j\omega) \cdot \left(\frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2} \right)$$

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = A + \frac{(s-j\omega)B}{s+j\omega} + \frac{(s-j\omega)D}{s-s_1} + \frac{(s-j\omega)E}{s-s_2}$$

$s = j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + j\omega \sin \theta)}{(j\omega + j\omega)\left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = A + \frac{(j\omega - j\omega)B}{j\omega + j\omega} + \frac{(j\omega - j\omega)D}{j\omega - s_1} + \frac{(j\omega - j\omega)E}{j\omega - s_2}$$

$$\frac{V_{\max}\omega(\cos \theta + j \sin \theta)}{2j\omega\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} = A$$

$$\frac{V_{\max}(\cos \theta + j \sin \theta)}{2j\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)} = A$$

$$\frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j\left\{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right\}} = A$$

です。オイラーの公式、 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ を使いました。

同じく定常項に関する B の値を求める時も、左辺に①式を用い、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s+j\omega)$ を掛け、

$$(s + j\omega) \cdot \frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega) \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} = (s + j\omega) \cdot \left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2} \right)$$

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{(s - j\omega) \left(Ls + R + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{(s + j\omega)A}{s - j\omega} + B + \frac{(s + j\omega)D}{s - s_1} + \frac{(s + j\omega)E}{s - s_2}$$

$s = -j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{\max}(\omega \cos \theta - j\omega \sin \theta)}{(-j\omega - j\omega) \left(-j\omega L + R + \frac{1}{-j\omega C} \right)} = \frac{(-j\omega + j\omega)A}{-j\omega - j\omega} + B + \frac{(-j\omega + j\omega)D}{-j\omega - s_1} + \frac{(-j\omega + j\omega)E}{-j\omega - s_2}$$

$$\frac{V_{\max} \omega (\cos \theta - j \sin \theta)}{-2j\omega \left(R - j\omega L - \frac{1}{j\omega C} \right)} = B$$

$$\frac{V_{\max} (\cos \theta - j \sin \theta)}{-2j \left(R - j\omega L + j \frac{1}{\omega C} \right)} = B$$

$$\frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} = B$$

です。オイラーの公式、 $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$ を使いました。

過渡項に関する D の値を求める時は、左辺に②式を用い、

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s - s_1)$ を掛け、

$$(s - s_1) \cdot \frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = (s - s_1) \cdot \left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2} \right)$$

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{(s - s_1)A}{s - j\omega} + \frac{(s - s_1)B}{s + j\omega} + D + \frac{(s - s_1)E}{s - s_2}$$

$s = s_1$ と置きますと、

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L} = \frac{(s_1 - s_1)A}{s_1 - j\omega} + \frac{(s_1 - s_1)B}{s_1 + j\omega} + D + \frac{(s_1 - s_1)E}{s_1 - s_2}$$

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L} = D$$

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{(s_1^2 + j\omega s_1 - j\omega s_1 + \omega^2)(s_1 - s_2)} = D$$

$$\frac{s_1 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L} = D$$

$$\frac{L}{(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} = D$$

$$\frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} = D$$

です。

同じく過渡項に関係する E の値を求める時も、左辺に②式を用い、

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s - s_2)$ を掛け、

$$(s - s_2) \cdot \frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = (s - s_2) \cdot \left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - s_1} + \frac{E}{s - s_2} \right)$$

$$\frac{s \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s \sin \theta)}{L} = \frac{(s - s_2)A}{s - j\omega} + \frac{(s - s_2)B}{s + j\omega} + \frac{(s - s_2)D}{s - s_1} + E$$

$s = s_2$ と置きますと、

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = \frac{(s_2 - s_2)A}{s_2 - j\omega} + \frac{(s_2 - s_2)B}{s_2 + j\omega} + \frac{(s_2 - s_2)D}{s_2 - s_2} + E$$

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{(s_2 - j\omega)(s_2 + j\omega)(s_2 - s_1)} = E$$

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = E$$

$$\frac{L}{(s_2^2 + j\omega s_2 - j\omega s_2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} = E$$

$$\frac{s_2 \cdot V_{\max}(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L} = E$$

$$\frac{L}{(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} = E$$

$$\frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} = E$$

です。

A、B、D、Eの値が求まりました。ラプラス逆変換をしてIを求めますと、

$$I = L^{-1} \left[\frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j \left\{ R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \frac{1}{s - j\omega} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \frac{1}{s + j\omega} \right]$$

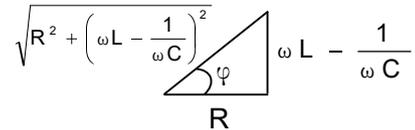
$$+ \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \frac{1}{s - s_1} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} \frac{1}{s - s_2}$$

$$= \frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j \left\{ R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{-j\omega t}$$

$$+ \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \cdot e^{s_1 t} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} \cdot e^{s_2 t}$$

になります。上式の前 2 項が定常項です。後ろ 2 項が過渡項です。定常項、過渡項に分けて計算します。

(1)定常項の計算



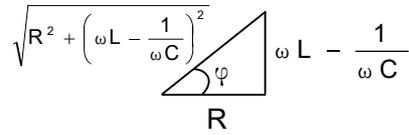
$$\frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j \left\{ R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \left\{ R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}} \cdot e^{-j\omega t}$$

分母の中括弧内複素数を極形式に直しますと、(右上の図をご覧下さい。)

$$\begin{aligned} &= \frac{V_{\max} \cdot e^{j\theta}}{2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot e^{j\varphi}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{\max} \cdot e^{-j\theta}}{-2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot e^{-j\varphi}} \cdot e^{-j\omega t} \\ &= \frac{V_{\max}}{2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\varphi} + \frac{V_{\max}}{-2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{j\varphi} \\ &= \frac{V_{\max}}{2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{j(\omega t + \theta - \varphi)} + \frac{V_{\max}}{-2j \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot e^{-j(\omega t + \theta - \varphi)} \\ &= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \frac{e^{j(\omega t + \theta - \varphi)}}{2j} + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \frac{e^{-j(\omega t + \theta - \varphi)}}{-2j} \\ &= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \left(\frac{e^{j(\omega t + \theta - \varphi)} - e^{-j(\omega t + \theta - \varphi)}}{2j} \right) \\ &= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot \sin(\omega t + \theta - \varphi) \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ と置きますと、}$$

$$= \frac{V_{\max}}{Z} \cdot \sin(\omega t + \theta - \varphi)$$



$$\frac{V_{\max}}{Z} = I_{\max} \text{ としますと、}$$

$$= I_{\max} \cdot \sin(\omega t + \theta - \varphi)$$

になりました。

(2) 過渡項の計算

$$\frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} \cdot e^{s_1 t} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)} \cdot e^{s_2 t}$$

$$= \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} + \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{L(s_2^2 + \omega^2)\{-(s_1 - s_2)\}}$$

$$= \frac{V_{\max} \cdot s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{L(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)} - \frac{V_{\max} \cdot s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{L(s_2^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)}$$

$$= \frac{V_{\max}}{L(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{s_1^2 + \omega^2} - \frac{s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{s_2^2 + \omega^2} \right\}$$

です。 $s_1 - s_2 = -\alpha + \beta - (-\alpha - \beta) = -\alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\beta$ ですから、

$$= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \left\{ \frac{s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta) \cdot e^{s_1 t}}{s_1^2 + \omega^2} - \frac{s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta) \cdot e^{s_2 t}}{s_2^2 + \omega^2} \right\}$$

です。中括弧内の分数を通分しますと、

$$= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \left\{ \frac{s_1(\omega \cos \theta + s_1 \sin \theta)(s_2^2 + \omega^2) \cdot e^{s_1 t} - s_2(\omega \cos \theta + s_2 \sin \theta)(s_1^2 + \omega^2) \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\}$$

$$= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \left[\frac{\mathbf{s}_1 \{ \omega(\mathbf{s}_2^2 + \omega^2) \cos \theta + \mathbf{s}_1(\mathbf{s}_2^2 + \omega^2) \sin \theta \} \cdot \mathbf{e}^{s_1 t}}{(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2)} \right. \\ \left. \frac{-\mathbf{s}_2 \{ \omega(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2) \cos \theta + \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2) \sin \theta \} \cdot \mathbf{e}^{s_2 t}}{(\mathbf{s}_2^2 + \omega^2)} \right]$$

になります。通分した分母を計算しますと、

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_1^2 + \omega^2)(\mathbf{s}_2^2 + \omega^2) &= \{(-\alpha + \beta)^2 + \omega^2\} \{(-\alpha - \beta)^2 + \omega^2\} \\ &= \{(-\alpha + \beta)(-\alpha + \beta) + \omega^2\} \{(-\alpha - \beta)(-\alpha - \beta) + \omega^2\} \\ &= (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \omega^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \omega^2) \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\omega^2 - 2\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^3 - 2\alpha\beta\omega^2 \\ &\quad + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 + \beta^4 + \beta^2\omega^2 + \alpha^2\omega^2 + 2\alpha\beta\omega^2 + \beta^2\omega^2 + \omega^4 \\ &= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\omega^2 + \beta^4 + 2\beta^2\omega^2 + \omega^4 \\ &= (\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\omega^2 + \beta^4 + 2\beta^2\omega^2 + \omega^4) + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= (\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\omega^2 - \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \beta^2\omega^2 - \alpha^2\omega^2 + \beta^2\omega^2 + \omega^4) + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= \alpha^2(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - \beta^2(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - \omega^2(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + 4\alpha^2\omega^2 \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2 \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

になります。③式に α と β の値を代入しますと、

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \left(\frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \right)^2 - \omega^2 \right\}^2 + \left(2 \cdot \frac{R}{2L} \cdot \omega \right)^2 \\ &= \left\{ \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{4L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C} \right) - \omega^2 \right\}^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left\{ \frac{R^2}{4L^2} - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \omega^2 \right\}^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\ &= \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^2 C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2} \\
&= \frac{R^2 \omega^2}{L^2} + \frac{1}{L^2 C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 \\
&= \frac{\omega^2}{L^2} \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{2L}{C} + \omega^2 L^2 \right) \\
&= \frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right) \right\} \\
&= \frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\} \cdots \textcircled{4}
\end{aligned}$$

になりました。通分した分母の計算は上手く行き、インピーダンスの絶対値の2乗に $\frac{\omega^2}{L^2}$ を掛けた形になります。通分しませんでしたと根号が取れず、この様に上手く行きません。

③式で、 $(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)$ を $(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2$ に変形した訳は以下の通りです。

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\beta = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

ですから、

$$\alpha^2 = \left(\frac{R}{2L} \right)^2 = \frac{R^2}{4L^2}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \right)^2 = \frac{1}{4L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C} \right) = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}$$

です。 α^2 から β^2 を引きますと、

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \right) = \frac{1}{LC}$$

となります。更に ω^2 を引きますと、

$$\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2 = \frac{1}{LC} - \omega^2 = -\omega^2 + \frac{1}{LC} = -\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

になり、 $-\frac{\omega}{L}$ を掛けたリアクタンス成分が出ます。

また、

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

ですから2を掛けますと、

$$2\alpha = 2 \cdot \frac{R}{2L} = \frac{R}{L}$$

になります。更に ω を掛けますと、

$$2\alpha\omega = \frac{\omega R}{L}$$

となり、 $\frac{\omega}{L}$ を掛けた抵抗成分が出ます。

$\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2$ と $2\alpha\omega$ をそれぞれ2乗して足しますと、

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2 &= \left\{ -\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}^2 + \left(\frac{\omega R}{L} \right)^2 \\ &= \frac{\omega^2}{L^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{L^2} \\ &= \frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

になり、 $\frac{\omega^2}{L^2}$ を掛けたインピーダンスの絶対値の2乗が出ます。

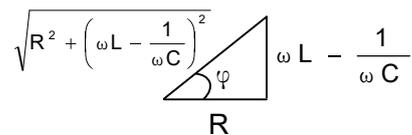
この $\frac{\omega^2}{L^2} \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}$ の式で、 $R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = Z^2$ としますと、

$$(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) = (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2 = \frac{\omega^2}{L^2} Z^2$$

となります。両辺を平方根にしますと、

$$\sqrt{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} = \frac{\omega Z}{L}$$

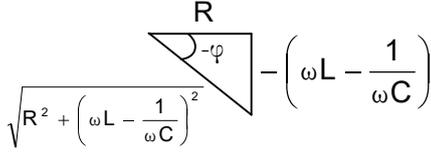
です。 $2\alpha\omega = \frac{\omega}{L}R$ を上式で割りますと、



$$\frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)}} = \frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{\omega Z}{L}} = \frac{\omega R}{L} \cdot \frac{L}{\omega Z} = \frac{R}{Z} = \cos \varphi \cdots \textcircled{5}$$

になりインピーダンスの $\cos \varphi$ が生じます。 $\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2 = -\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ を割りますと、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2}{\sqrt{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)}} &= \frac{-\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\frac{\omega Z}{L}} \\ &= \frac{-\omega \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{L} \cdot \frac{L}{\omega Z} \\ &= \frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{Z} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sin(-\varphi) \\ &= -\sin \varphi \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

になりインピーダンスの $-\sin \varphi$ が生じます。

インピーダンスのリアクタンス成分と抵抗成分とを分ける為に、

$$(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) = (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2$$

と変形致しました。

通分後の分子前半 $s_1 \{ \omega(s_2^2 + \omega^2) \cos \theta + s_1(s_2^2 + \omega^2) \sin \theta \} \cdot e^{s_1 t}$ 中の $\omega(s_2^2 + \omega^2)$ を計算します。ここでもリアクタンス成分 $\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned} \omega(s_2^2 + \omega^2) &= \omega \{ (-\alpha - \beta)^2 + \omega^2 \} \\ &= \omega \{ (-\alpha - \beta)(-\alpha - \beta) + \omega^2 \} \\ &= \omega(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \omega^2) \\ &= \alpha^2\omega + 2\alpha\beta\omega + \beta^2\omega + \omega^3 \\ &= -\alpha^2\omega + \beta^2\omega + \omega^3 + 2\alpha^2\omega + 2\alpha\beta\omega \\ &= -\omega(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + 2\alpha^2\omega + 2\alpha\beta\omega \\ &= -\omega(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha + \beta)2\alpha\omega \end{aligned}$$

です。更に中括弧の前にある $s_1 = -\alpha + \beta = -(\alpha - \beta)$ を掛けますと、

$$s_1 \cdot \omega(s_2^2 + \omega^2) = -(\alpha - \beta) \{ -\omega(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha + \beta)2\alpha\omega \}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)2\alpha\omega \\
&= \omega(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - (\alpha^2 - \beta^2)2\alpha\omega
\end{aligned}$$

になりました。通分後の分子前半、中括弧内の $s_1(s_2^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned}
s_1(s_2^2 + \omega^2) &= (-\alpha + \beta) \{ (-\alpha - \beta)^2 + \omega^2 \} \\
&= (-\alpha + \beta) \{ (-\alpha - \beta)(-\alpha - \beta) + \omega^2 \} \\
&= (-\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \omega^2) \\
&= -\alpha^3 - 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 + \beta\omega^2 \\
&= -\alpha^3 + \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 - \alpha^2\beta + \beta^3 + \beta\omega^2 \\
&= -\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha\omega^2 - \alpha^2\beta + \beta^3 + \beta\omega^2 - 2\alpha\omega^2 \\
&= -\alpha(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - \beta(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2 \\
&= (-\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2 \\
&= -(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2
\end{aligned}$$

更に中括弧の前にある $s_1 = -\alpha + \beta = -(\alpha - \beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned}
s_1 \cdot s_1(s_2^2 + \omega^2) &= -(\alpha - \beta) \{ -(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2 \} \\
&= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha - \beta)2\alpha\omega^2 \\
&= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha - \beta)2\alpha\omega^2
\end{aligned}$$

です。

通分後の分子後半 $s_2\{\omega(s_1^2 + \omega^2)\cos\theta + s_2(s_1^2 + \omega^2)\sin\theta\} \cdot e^{s_2t}$ の中括弧内の $\omega(s_1^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned}
\omega(s_1^2 + \omega^2) &= \omega \{ (-\alpha + \beta)^2 + \omega^2 \} \\
&= \omega \{ (-\alpha + \beta)(-\alpha + \beta) + \omega^2 \} \\
&= \omega(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \omega^2) \\
&= \alpha^2\omega - 2\alpha\beta\omega + \beta^2\omega + \omega^3 \\
&= -\alpha^2\omega + \beta^2\omega + \omega^3 + 2\alpha^2\omega - 2\alpha\beta\omega \\
&= -\omega(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + 2\alpha^2\omega - 2\alpha\beta\omega \\
&= -\omega(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha - \beta)2\alpha\omega
\end{aligned}$$

です。更に中括弧の前にある $s_2 = -\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_2 \cdot \omega(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2) &= -(\alpha + \beta)\{-\omega(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha - \beta)2\alpha\omega\} \\
&= \omega(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)2\alpha\omega \\
&= \omega(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - (\alpha^2 - \beta^2)2\alpha\omega
\end{aligned}$$

です。

通分後の分子後半、中括弧内の $\mathbf{s}_2(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_2(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2) &= (-\alpha - \beta)\{(-\alpha + \beta)^2 + \omega^2\} \\
&= (-\alpha - \beta)\{(-\alpha + \beta)(-\alpha + \beta) + \omega^2\} \\
&= (-\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \omega^2) \\
&= -\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 - \beta\omega^2 \\
&= -\alpha^3 + \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 + \alpha^2\beta - \beta^3 - \beta\omega^2 \\
&= -\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha\omega^2 + \alpha^2\beta - \beta^3 - \beta\omega^2 - 2\alpha\omega^2 \\
&= -\alpha(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + \beta(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2 \\
&= (-\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2 \\
&= -(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2
\end{aligned}$$

です。更に中括弧の前にある $\mathbf{s}_2 = -\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$ を掛けますと、

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2) &= -(\alpha + \beta)\{-(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega^2\} \\
&= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha + \beta)2\alpha\omega^2 \\
&= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha + \beta)2\alpha\omega^2
\end{aligned}$$

です。以上の結果を使い元の式を書き直しますと、

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \bullet \frac{[\{\omega(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - (\alpha^2 - \beta^2)2\alpha\omega\} \cos \theta]}{(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2)} \\
&\quad + \frac{[\{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha - \beta)2\alpha\omega^2\} \sin \theta]}{\phantom{(\mathbf{s}_1^2 + \omega^2)}} \cdot \mathbf{e}^{s_1 t} \\
&\quad - \frac{[\{\omega(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) - (\alpha^2 - \beta^2)2\alpha\omega\} \cos \theta]}{(\mathbf{s}_2^2 + \omega^2)} \\
&\quad + \frac{[\{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) + (\alpha + \beta)2\alpha\omega^2\} \sin \theta]}{\phantom{(\mathbf{s}_2^2 + \omega^2)}} \cdot \mathbf{e}^{s_2 t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right. \\
&\quad + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha - \beta)2\alpha\omega^2 \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
&\quad - \frac{\omega(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
&\quad \left. - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha + \beta)2\alpha\omega^2 \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\}
\end{aligned}$$

となります。分子分母に $\frac{\omega Z}{L}$ を掛け、⑤式、⑥式を使いますと、

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right. \\
&\quad + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
&\quad - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
&\quad \left. - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot (\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot 2\alpha\omega \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L} \cdot (s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\} \\
&= \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \\
& \left. - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2)} \right\}
\end{aligned}$$

$(s_1^2 + \omega^2)(s_2^2 + \omega^2) = \frac{\omega^2}{L^2} Z^2 = \left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2$ でしたから、

$$\begin{aligned}
& = \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \right. \\
& \quad + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} + \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \\
& \quad - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \\
& \quad \left. - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{\omega Z}{L} (-\sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \frac{\omega Z}{L} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2} \right\} \\
& = \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \left\{ \frac{\omega(\alpha - \beta)(-\sin \varphi) \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} + \frac{\omega(\alpha - \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}} \\
& - \frac{\omega(\alpha + \beta)(-\sin\varphi) \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}} \\
& \left. \begin{aligned}
& - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}} - \frac{\omega(\alpha + \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t}}{\frac{\omega Z}{L}}
\end{aligned} \right\} \\
= & \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \frac{1}{\frac{\omega Z}{L}} \left\{ \omega(\alpha - \beta)(-\sin\varphi) \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} \right. \\
& + (\alpha^2 - \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} + \omega(\alpha - \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} \\
& - \omega(\alpha + \beta)(-\sin\varphi) \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} \\
& \left. - (\alpha^2 - \beta^2)(-\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} - \omega(\alpha + \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} \right\}
\end{aligned}$$

括弧内の-を前に出しますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \frac{1}{\frac{\omega Z}{L}} \left\{ -\omega(\alpha - \beta) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} \right. \\
& - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} + \omega(\alpha - \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} \\
& + \omega(\alpha + \beta) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} \\
& \left. + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} - \omega(\alpha + \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} \right\}
\end{aligned}$$

になります。加法定理が成り立つように並べかえますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{V_{\max}}{2\beta L} \cdot \frac{L}{\omega Z} \left\{ \omega(\alpha - \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} - \omega(\alpha - \beta) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} \right. \\
& - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_1 t} - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_1 t} \\
& \left. - \omega(\alpha + \beta) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot e^{s_2 t} + \omega(\alpha + \beta) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot e^{s_2 t} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \cdot e^{s_2 t} + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot e^{s_2 t} \} \\
= & \frac{V_{\max}}{2\beta\omega Z} \cdot \{ \omega(\alpha - \beta)(\sin \theta \cdot \cos \varphi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_1 t} \\
& - (\alpha^2 - \beta^2)(\cos \theta \cdot \cos \varphi + \sin \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_1 t} \\
& - \omega(\alpha + \beta)(\sin \theta \cdot \cos \varphi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_2 t} \\
& + (\alpha^2 - \beta^2)(\cos \theta \cdot \cos \varphi + \sin \theta \cdot \sin \varphi) \cdot e^{s_2 t} \}
\end{aligned}$$

になります。加法定理を行いますと、

$$\begin{aligned}
= & \frac{V_{\max}}{2\beta\omega Z} \cdot [\{ \omega(\alpha - \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{s_1 t} \\
& - \{ \omega(\alpha + \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{s_2 t}]
\end{aligned}$$

となります。ここで $\frac{V_{\max}}{Z} = I_{\max}$ とします。 $s_1 = -\alpha + \beta$ 、 $s_2 = -\alpha - \beta$ ですから、

$$\begin{aligned}
= & \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot [\{ \omega(\alpha - \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{(-\alpha + \beta)t} \\
& - \{ \omega(\alpha + \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{(-\alpha - \beta)t}] \\
= & \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot [\{ \omega(\alpha - \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{-\alpha t} e^{\beta t} \\
& - \{ \omega(\alpha + \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \} \cdot e^{-\alpha t} e^{-\beta t}] \\
= & \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot \{ \omega(\alpha - \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{\beta t} - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{\beta t} \\
& - \omega(\alpha + \beta) \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-\beta t} + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-\beta t} \} \\
= & \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha - \beta) \cdot e^{\beta t} - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{\beta t} \\
& - \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha + \beta) \cdot e^{-\beta t} + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-\beta t} \} \\
= & \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha - \beta) \cdot e^{\beta t} - \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \omega(\alpha + \beta) \cdot e^{-\beta t} \\
& - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{\beta t} + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} e^{-\beta t} \}
\end{aligned}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot [\sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{ \omega(\alpha - \beta) \cdot e^{\beta t} - \omega(\alpha + \beta) \cdot e^{-\beta t} \} \\ - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \{ e^{\beta t} - e^{-\beta t} \}]$$

$e^{\beta t} = \cosh \beta t + \sinh \beta t$ 、 $e^{-\beta t} = \cosh \beta t - \sinh \beta t$ 、 $e^{\beta t} - e^{-\beta t} = 2 \sinh \beta t$ を使いますと、

$$= \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot [\sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{ \omega(\alpha - \beta)(\cosh \beta t + \sinh \beta t) - \omega(\alpha + \beta)(\cosh \beta t - \sinh \beta t) \} \\ - (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot 2 \sinh \beta t]$$

$$= \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (\alpha\omega \cosh \beta t + \alpha\omega \sinh \beta t - \beta\omega \cosh \beta t - \beta\omega \sinh \beta t \\ - \alpha\omega \cosh \beta t + \alpha\omega \sinh \beta t - \beta\omega \cosh \beta t + \beta\omega \sinh \beta t) - (\alpha^2 - \beta^2) \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} 2 \sinh \beta t \}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2\alpha\omega \sinh \beta t - 2\beta\omega \cosh \beta t) - 2(\alpha^2 - \beta^2) \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot \sinh \beta t \}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2\beta\omega} \cdot \{ \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot 2\omega (\alpha \sinh \beta t - \beta \cosh \beta t) - 2(\alpha^2 - \beta^2) \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot \sinh \beta t \}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{1}{2\beta\omega} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot 2\omega (\alpha \sinh \beta t - \beta \cosh \beta t) - \frac{1}{2\beta\omega} 2(\alpha^2 - \beta^2) \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (\alpha \sinh \beta t - \beta \cosh \beta t) - \frac{1}{\beta\omega} \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

双曲線関数の合成公式により、

$$\alpha \sinh \beta t - \beta \cosh \beta t = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sinh \left(\beta t - \tanh^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) \text{ です。 } \tanh^{-1} \frac{\beta}{\alpha} = \Phi \text{ としますと、}$$

(双曲線関数の合成公式は「双曲線関数について」の章をご参照下さい。)

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{1}{\beta\omega} \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta \omega} \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

です。

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\beta = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \left(\frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \right)^2 \\ &= \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{4L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C} \right) \\ &= \frac{R^2}{4L^2} - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \\ &= \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

ですから、

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \cdot \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}}{2L \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{2L \cdot \frac{1}{LC}}{2L \cdot \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

$$= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \frac{L}{\sqrt{LC}}}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{2 \cdot \frac{1}{C}}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{C \cdot 2 \cdot \frac{1}{C}}{C \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sinh \beta t \right\} \\
&= I_{\max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\theta - \varphi) \sinh(\beta t - \Phi) - \frac{2}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\theta - \varphi) \sinh \beta t \right\}
\end{aligned}$$

となります。定常項を加えますと、

$$I = I_{\max} \cdot \left\{ \sin(\omega t + \theta - \varphi) + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\theta - \varphi) \sinh(\beta t - \Phi) \right. \\
\left. - \frac{2}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\theta - \varphi) \sinh \beta t \right\}$$

が答えです。

[目次へ戻る](#)