RL 直列回路の交流過渡現象　目次へ戻る

2022 年 1 月 28 日 2023.2.7　2023.3.29　2023.5.14　2023.5.18　2025.9.17　訂正

ラプラス変換で求めます。

正弦波 $\sin\omega t$ に初期位相 $\theta$ がある場合、加法定理により、

$$\sin(\omega t+\theta)=\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta$$

となります。ラプラス変換 L は、

$$L(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\theta+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\theta$$

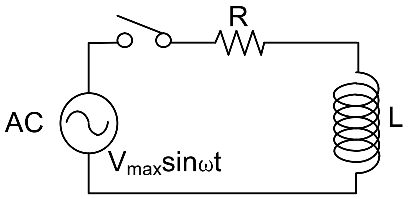
$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

になります。最大値が $V_{max}$ の正弦波の場合は、この式の頭に $V_{max}$ が付きます。

右図でスイッチを入れる t=0 で、電流が 0、

正弦波の位相を $\theta$ としますと、ラプラスの世界での電流 I(s)は、




$$I(s)=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\div(R+sL)$$

$$=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)(R+sL)}\quad\cdots①$$

となります。ラプラス逆変換しやすくする為に、分子分母に $\frac{1}{L}$ を掛けますと、

$$=\frac{\frac{1}{L}\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\cdot\frac{1}{L}\cdot(R+sL)}$$

$$=\frac{\frac{V_{max}}{L}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\frac{R}{L}\right)}\quad\cdots②$$

になります。部分分数分解を行うため、

$$=\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{C}{s+\frac{R}{L}}$$

と置きます。A、B、C を求めます。ヘビサイドの目隠し法を使います。ヘビサイドの目隠

し法については「部分分数分解」の章を御覧下さい。

定常項に関係する A の値を求める時は、左辺に①式を用いますと便利です。両辺に $(s-j\omega)$ を掛け、

$$(s-j\omega)\cdot\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)(R+sL)}=(s-j\omega)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{C}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s+j\omega)(R+sL)}=A+\frac{(s-j\omega)B}{s+j\omega}+\frac{(s-j\omega)C}{s+\frac{R}{L}}$$

$s=j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+j\omega\sin\theta)}{(j\omega+j\omega)(R+j\omega L)}=A+\frac{(j\omega-j\omega)B}{j\omega+j\omega}+\frac{(j\omega-j\omega)C}{j\omega+\frac{R}{L}}$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\omega(R+j\omega L)}=A+0+0$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\cdot(R+j\omega L)}=A$$

になります。分母の 2j を後ろに移動し、分子にオイラーの公式を使いますと、

$$\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R+j\omega L}\cdot\frac{1}{2j}=A$$

になります。

同じく定常項に関係する B の値を求める時も、左辺に①式を用いますと便利です。両辺に $(s+j\omega)$ を掛け、

$$(s+j\omega)\cdot\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)(R+sL)}=(s+j\omega)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{C}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(R+sL)}=\frac{(s+j\omega)A}{s-j\omega}+B+\frac{(s+j\omega)C}{s+\frac{R}{L}}$$

$s=-j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta-j\omega\sin\theta)}{(-j\omega-j\omega)(R-j\omega L)}=\frac{(-j\omega+j\omega)A}{-j\omega-j\omega}+B+\frac{(-j\omega+j\omega)C}{-j\omega+\frac{R}{L}}$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta - j\sin\theta)}{-2j\omega(R - j\omega L)} = 0 + B + 0$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta - j\sin\theta)}{-2j\cdot(R - j\omega L)} = B$$

になります。分母の－2j を後ろに移動し、分子にオイラーの公式を使いますと、

$$\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R - j\omega L}\cdot\frac{1}{-2j} = B$$

になります。

過渡項に関係する C の値を求める時は、左辺に②式を用いますと便利です。両辺に $\left(s + \frac{R}{L}\right)$ を掛け、

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)\cdot\frac{\frac{V_{max}}{L}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \left(s + \frac{R}{L}\right)\cdot\left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{C}{s + \frac{R}{L}}\right)$$

$$\frac{\frac{V_{max}}{L}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{\left(s + \frac{R}{L}\right)A}{s - j\omega} + \frac{\left(s + \frac{R}{L}\right)B}{s + j\omega} + C$$

$s = -\frac{R}{L}$ と置きますと、

$$\frac{\frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta - \frac{R}{L}\sin\theta\right)}{\left(-\frac{R}{L} - j\omega\right)\left(-\frac{R}{L} + j\omega\right)} = \frac{\left(-\frac{R}{L} + \frac{R}{L}\right)A}{-\frac{R}{L} - j\omega} + \frac{\left(-\frac{R}{L} + \frac{R}{L}\right)B}{-\frac{R}{L} + j\omega} + C$$

$$\frac{\frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta - \frac{R}{L}\sin\theta\right)}{\left(-\frac{R}{L} - j\omega\right)\left(-\frac{R}{L} + j\omega\right)} = 0 + 0 + C$$

$$\frac{\frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta - \frac{R}{L}\sin\theta\right)}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} = C$$

です。左辺の分子分母に $L^2$ を掛けますと、

$$\frac{L^2 \cdot \frac{V_{max}}{L}\left(\omega\cos\theta - \frac{R}{L}\sin\theta\right)}{L^2 \cdot \left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} = C$$

$$\frac{V_{max}(\omega L\cos\theta - R\sin\theta)}{R^2 + \omega^2 L^2} = C$$

になります。

A、B、C の値が出ましたので、ラプラス逆変換$L^{-1}$をして I を求めますと、

$$I = L^{-1}\left\{\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R + j\omega L}\cdot\frac{1}{2j}}{s - j\omega} + \frac{\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R - j\omega L}\cdot\frac{1}{-2j}}{s + j\omega} + \frac{\frac{V_{max}(\omega L\cos\theta - R\sin\theta)}{R^2 + \omega^2 L^2}}{s + \frac{R}{L}}\right\}$$

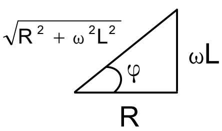
$$= \frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{R + j\omega L}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j\omega t} + \frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{R - j\omega L}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j\omega t} + \frac{V_{max}(\omega L\cos\theta - R\sin\theta)}{R^2 + \omega^2 L^2}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

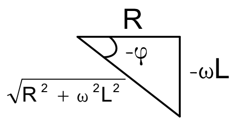
です。右辺第 1 項と第 2 項の分母の複素数を極形式に直し、第 3 項を 2 つに分けますと、

$$= \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\cdot e^{j\varphi}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\theta} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\cdot e^{-j\varphi}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j\theta}$$

$$+ \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot\frac{\omega L\cos\theta - R\sin\theta}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

になります。極形式の φ（ファイ）については下図をご覧下さい。




$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

$$-\varphi = \tan^{-1}\frac{-\omega L}{R} = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

右辺第 1 項と第 2 項の極形式の e を分母から出し、第 3 項を変形しますと、

$$= \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\theta}\cdot e^{-j\varphi} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j\theta}\cdot e^{j\varphi}$$

$$+ \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot\left(\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot\cos\theta - \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cdot\sin\theta\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

になります。e の指数を指数法則でまとめますと、

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}$$
$$+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\left(\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\cos\theta-\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\sin\theta\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

になります。また、第 3 項について前ページの図から、

$$\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\sin\varphi \qquad \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\cos\varphi$$

ですから、

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}$$
$$+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot(\sin\varphi\cdot\cos\theta-\cos\varphi\cdot\sin\theta)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}$$
$$+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\{-(\sin\theta\cdot\cos\varphi-\cos\theta\cdot\sin\varphi)\}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

となります。三角関数の加法定理により、第 3 項は、

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{2j}\cdot e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\frac{1}{-2j}\cdot e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}$$
$$-\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

になります。$\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=I_{max}$ としますと、

$$=I_{max}\cdot\frac{1}{2j}e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}-I_{max}\cdot\frac{1}{2j}e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}-I_{max}\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$=I_{max}\left\{\frac{e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}-e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}}{2j}-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right\}$$

になります。括弧内第 1 項は複素関数で表した sin ですから、

$$=I_{max}\left\{\sin(\omega t+\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right\}$$

になります。これが答えです。

目次へ戻る