RC 直列回路の交流過渡現象　　　　　　　　　　2022 年 1 月 28 日　　　目次へ戻る

2023.2.7　2023.3.29　2023.5.14　2023.5.17　2025.9.17　訂正

ラプラス変換で求めます。

正弦波 $\sin\omega t$ に初期位相 θ がある場合、加法定理により、

$$\sin(\omega t+\theta)=\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta$$

となります。ラプラス変換 L は、

$$L(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\theta+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\theta$$

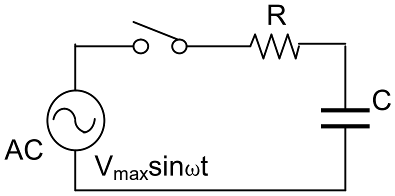
$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

となります。最大値が V_{max} の正弦波の場合は、この式の頭に V_{max} が付きます。

右図でスイッチを入れる t=0 で、電流が 0、コンデンサーの電荷も 0、正弦波の位相を θ とします。

ラプラスの世界での電流 I(s)は、



$$I(s)=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\div\left(R+\frac{1}{sC}\right)$$

$$=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(R+\dfrac{1}{sC}\right)}\quad\cdots①$$

となります。ラプラス逆変換しやすくする為に、分子分母に $\dfrac{s}{R}$ を掛けますと、

$$=\frac{\dfrac{s}{R}\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\cdot\dfrac{s}{R}\cdot\left(R+\dfrac{1}{sC}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}}{R}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s+\dfrac{1}{CR}\right)}\quad\cdots②$$

になります。部分分数分解を行うため、

$$=\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\dfrac{1}{RC}}$$

と置きます。A、B、D を求めます。ヘビサイドの目隠し法を使います。ヘビサイドの目隠し法については「部分分数分解」の章を御覧下さい。

定常項に関係する A の値を求める時は、左辺に①式を用いますと便利です。両辺に $(s-j\omega)$ を掛け、

$$(s-j\omega)\cdot\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(R+\dfrac{1}{sC}\right)}=(s-j\omega)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\dfrac{1}{RC}}\right)$$

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s+j\omega)\left(R+\dfrac{1}{sC}\right)}=A+\frac{(s-j\omega)B}{s+j\omega}+\frac{(s-j\omega)D}{s+\dfrac{1}{RC}}$$

$s=j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+j\omega\sin\theta)}{(j\omega+j\omega)\left(R+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}=A+\frac{(j\omega-j\omega)B}{j\omega+j\omega}+\frac{(j\omega-j\omega)D}{j\omega+\dfrac{1}{RC}}$$

$$\frac{V_{max}\omega\cdot(\cos\theta+j\sin\theta)}{2j\omega\cdot\left(R+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}=A+0+0$$

$$\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}=A$$

になります。オイラーの公式を使用しました。分母の分数の分子分母に j を掛け、

$$\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\dfrac{1}{\omega C}\right)}=A$$

になります。

同じく定常項に関係する B の値を求める時も、左辺に①式を用いますと便利です。両辺に $(s+j\omega)$ を掛け、

$$(s+j\omega)\bullet\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(R+\dfrac{1}{sC}\right)}=(s+j\omega)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s+\dfrac{1}{RC}}\right)$$

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)\left(R+\dfrac{1}{sC}\right)}=\frac{(s+j\omega)A}{s-j\omega}+B+\frac{(s+j\omega)D}{s+\dfrac{1}{RC}}$$

$s=-j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta - j\omega\sin\theta)}{(-j\omega - j\omega)\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{(-j\omega + j\omega)A}{-j\omega - j\omega} + B + \frac{(-j\omega + j\omega)D}{-j\omega + \frac{1}{RC}}$$

$$\frac{V_{max}\omega\cdot(\cos\theta - j\sin\theta)}{-2j\omega\cdot\left(R + \frac{1}{-j\omega C}\right)} = 0 + B + 0$$

$$\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\cdot\left(R - \frac{1}{j\omega C}\right)} = B$$

になります。オイラーの公式を使用しました。分母の分数の分子分母に j を掛け、

$$\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\cdot\left(R + j\frac{1}{\omega C}\right)} = B$$

になります。

過渡項に関係する D の値を求める時は、左辺に②式を用いますと便利です。両辺に

$s + \frac{1}{RC}$ を掛け、

$$\left(s + \frac{1}{CR}\right)\cdot\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{R}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)\left(s + \frac{1}{CR}\right)} = \left(s + \frac{1}{CR}\right)\cdot\left(\frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

$$\frac{\frac{s\cdot V_{max}}{R}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{\left(s + \frac{1}{CR}\right)A}{s - j\omega} + \frac{\left(s + \frac{1}{CR}\right)B}{s + j\omega} + D$$

$s = -\frac{1}{CR}$ と置きますと、

$$\frac{-\frac{1}{CR}\cdot\frac{V_{max}}{R}\left(\omega\cos\theta - \frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\left(-\frac{1}{CR} - j\omega\right)\left(-\frac{1}{CR} + j\omega\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{CR} + \frac{1}{CR}\right)A}{-\frac{1}{CR} - j\omega} + \frac{\left(-\frac{1}{CR} + \frac{1}{CR}\right)B}{-\frac{1}{CR} + j\omega} + D$$

$$\frac{-\frac{1}{CR}\cdot\frac{V_{max}}{R}\left(\omega\cos\theta - \frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\left(-\frac{1}{CR} - j\omega\right)\left(-\frac{1}{CR} + j\omega\right)} = 0 + 0 + D$$

$$\frac{-\frac{1}{CR}\cdot\frac{V_{max}}{R}\left(\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2+\omega^2}=D$$

$$\frac{\frac{-V_{max}}{CR^2}\left(\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}=D$$

になります。

A、B、D の値が出ました。I を求める為、ラプラス逆変換L^{-1}をしますと、

$$I=L^{-1}\left\{\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}}{s-j\omega}+\frac{\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}}{s+j\omega}+\frac{\frac{\frac{-V_{max}}{CR^2}\left(\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}}{s+\frac{1}{RC}}\right\}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{-j\omega t}-\frac{\frac{V_{max}}{CR^2}\left(\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。第 3 項を 2 つに分けますと、

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{-j\omega t}-\frac{\frac{V_{max}}{CR^2}}{\sqrt{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}}\cdot\frac{\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta}{\sqrt{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。第 3 項の分子分母に$\frac{R}{\omega}$を掛けますと、

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{-j\omega t}-\frac{\frac{R}{\omega}\cdot\frac{V_{max}}{CR^2}}{\frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}}\cdot\frac{\frac{R}{\omega}\cdot\left(\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2}}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{-j\omega t}-\frac{\frac{R}{\omega}\cdot\frac{V_{max}}{CR^2}}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2\right)}}\cdot\frac{\frac{R}{\omega}\cdot\left(\omega\cos\theta-\frac{1}{CR}\sin\theta\right)}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{C^2R^2}+\omega^2\right)}}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

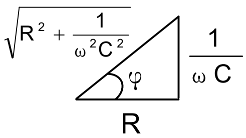
$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{-j\omega t}-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\frac{R\cos\theta-\frac{1}{\omega C}\sin\theta}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\cdot\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\cdot\left(R+j\frac{1}{\omega C}\right)}\cdot e^{-j\omega t}$$

$$-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos\theta-\frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\sin\theta\right)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。ここで、

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{\omega C}}{R}=\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$$



$$\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}=\cos\varphi \qquad \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}=\sin\varphi$$

ですので、第 1 項、第 2 項の分母の複素数を極形式に直し、第 3 項の括弧内を書き直しますと、

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\cdot e^{-j\varphi}}\cdot e^{j\omega t}-\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\cdot e^{j\varphi}}\cdot e^{-j\omega t}$$

$$-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。第 1 項、第 2 項の各 e を分数の後ろに出しますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\theta}\cdot e^{j\varphi}-\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j\theta}\cdot e^{-j\varphi}$$

$$-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。第 1 項、第 2 項は指数法則、第 3 項は三角関数の加法定理により、

$$=\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{j\omega t+j\theta+j\varphi}-\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{-j\omega t-j\theta-j\varphi}-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

となります。計算を進めますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{j(\omega t+\theta+\varphi)}-\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot e^{-j(\omega t+\theta+\varphi)}-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\theta+\varphi)}}{2j}-\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\frac{e^{-j(\omega t+\theta+\varphi)}}{2j}-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\theta+\varphi)}-e^{-j(\omega t+\theta+\varphi)}}{2j}-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。第 1 項後半は複素関数表示の sin ですから、

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\sin(\omega t+\theta+\varphi)-\frac{\frac{V_{max}}{\omega CR}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

となります。第 2 項の分子分母に ωCR を掛けますと、

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\sin(\omega t+\theta+\varphi)-\frac{V_{max}}{\omega CR\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

になります。$\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}=I_{max}$ と置きますと、

$$=I_{max}\cdot\left\{\sin(\omega t+\theta+\varphi)-\frac{1}{\omega CR}\cdot\cos(\theta+\varphi)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\right\}$$

になります。これが答えです。

目次へ戻る