

変数 関数	$-v$	$v + \frac{1}{2}$	$v+1$	$v+2$	$v + \frac{\tau}{2}$	$v + \tau$	$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	$v+1+\tau$
ϑ_0	ϑ_0	ϑ_3	ϑ_0	ϑ_0	$j\lambda\vartheta_1$	$-\mu\vartheta_0$	$\lambda\vartheta_2$	$-\mu\vartheta_0$
ϑ_1	$-\vartheta_1$	ϑ_2	$-\vartheta_1$	ϑ_1	$j\lambda\vartheta_0$	$-\mu\vartheta_1$	$\lambda\vartheta_3$	$\mu\vartheta_1$
ϑ_2	ϑ_2	$-\vartheta_1$	$-\vartheta_2$	ϑ_2	$\lambda\vartheta_3$	$\mu\vartheta_2$	$-j\lambda\vartheta_0$	$-\mu\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_3	ϑ_0	ϑ_3	ϑ_3	$\lambda\vartheta_2$	$\mu\vartheta_3$	$j\lambda\vartheta_1$	$\mu\vartheta_3$
計算	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$h^{\circ} - j^{\circ}$	1	2	4	5	6	11	16	22

$$\lambda = q^{\frac{1}{4}} z^{-1} = (e^{j\pi\tau})^{\frac{1}{4}} (e^{j\pi v})^{-1} = e^{-\frac{j\pi\tau}{4}} e^{-j\pi v} = e^{-j\pi v - \frac{j\pi\tau}{4}} = e^{-j\pi(v + \frac{\tau}{4})}$$

$$\mu = q^{-1} z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1} (e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau} e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v - j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v + \tau)}$$

各テータ関数の無限級数による定義は、以下の通りです。

$$\vartheta_0(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})$$

$$\vartheta_1(v) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})$$

表中の計算(1)～(8)は、以下の通りです。

(1) v を $-v$ にして $z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、 $z = e^{j\pi(-v)} = e^{-j\pi v} = (e^{j\pi v})^{-1} = z^{-1}$ となり、
 z は z^{-1} に変化しますので、

$$\begin{aligned} \vartheta_0(-v) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(z^{-1})^{2n} + (z^{-1})^{-2n}\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{-2n} + z^{2n}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_0(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(-v) &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(z^{-1})^{2n+1} - (z^{-1})^{-(2n+1)}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{-(2n+1)} - z^{2n+1}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1) \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} \\
&= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_1(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_2(-v) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(z^{-1})^{2n+1} + (z^{-1})^{-(2n+1)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{-(2n+1)} + z^{2n+1}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \vartheta_2(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(-v) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(z^{-1})^{2n} + (z^{-1})^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{-2n} + z^{2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_3(v)
\end{aligned}$$

となります。

(2) v を $v + \frac{1}{2}$ にすることは、 u を $u + K$ にすることに等しいです。

$$\therefore \frac{u+K}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{1}{2} = v + \frac{1}{2}$$

$$z = e^{j\pi v} \text{ に代入しますと、 } z = e^{j\pi(v+\frac{1}{2})} = e^{j\pi v + \frac{j\pi}{2}} = e^{j\pi v} e^{j\frac{\pi}{2}} = z(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = jz \text{ と}$$

なり、 z は jz に変化しますので、

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v + \frac{1}{2}) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(jz)^{2n} + (jz)^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (j^{2n} z^{2n} + j^{-2n} z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^n z^{2n} + (\frac{1}{-1})^n z^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (-1)^n (z^{2n} + z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_3(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v + \frac{1}{2}) &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(jz)^{2n+1} - (jz)^{-(2n+1)}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{j^{2n+1} z^{2n+1} - j^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}
\end{aligned}$$

$j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j$ 、 $j^{-(2n+1)} = j^{-2n-1} = (j^{-2})^n j^{-1} = (\frac{1}{j^2})^n \frac{1}{j} = (-1)^n \frac{1}{j} = -(-1)^n j$ ですので、

$$\begin{aligned}
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} [(-1)^n j z^{2n+1} - \{-(-1)^n j z^{-(2n+1)}\}] \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)^n j [z^{2n+1} - \{-z^{-(2n+1)}\}] \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} q^{(n+\frac{1}{2})^2} j [z^{2n+1} - \{-z^{-(2n+1)}\}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \vartheta_2(v)
\end{aligned}$$

$$\vartheta_2(v + \frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(jz)^{2n+1} + (jz)^{-(2n+1)}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{j^{2n+1} z^{2n+1} + j^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} (-1)^n j \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} \\
&= j \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} (-1)^n \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_1(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(jz)^{2n} + (jz)^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (j^{2n} z^{2n} + j^{-2n} z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \{(-1)^n z^{2n} - (-1)^n z^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (-1)^n (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_0(v)
\end{aligned}$$

となります。

(3) v を $v+1$ にするとは、 u を $u+2K$ にすることに等しいです。

$$\therefore \frac{u+2K}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{2K}{2K} = v+1$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、 $z = e^{j\pi(v+1)} = e^{j\pi v + j\pi} = e^{j\pi v} e^{j\pi} = z(\cos \pi + j \sin \pi) = -z$ となり、 z は $-z$ に変化しますので、

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v+1) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-z)^{2n} + (-z)^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} [\{(-z)^2\}^n + \{(-z)^{-2}\}^n] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_0(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v+1) &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-z)^{2n+1} - (-z)^{-(2n+1)}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-1)^{2n+1} z^{2n+1} - (-1)^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}
\end{aligned}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)z^{2n+1} - (-1)z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)\{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(v+1) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-z)^{2n+1} + (-z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^{2n+1} z^{2n+1} + (-1)^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)z^{2n+1} + (-1)z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)\{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_3(v+1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(-z)^{2n} + (-z)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(-1)^{2n} z^{2n} + (-1)^{-2n} z^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_3(v)$$

となります。

(4) v を $v+2$ にするとは、 u を $u+4K$ にすることに等しいです。

$$\because \frac{u+4K}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{4K}{2K} = v+2$$

$$z = e^{j\pi v} \text{ に代入しますと、 } z = e^{j\pi(v+2)} = e^{j\pi v + j2\pi} = e^{j\pi v} e^{j2\pi} = z(\cos 2\pi + j\sin 2\pi) = z$$

となり、 z は z に戻りますので、

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v+2) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \\ &= \vartheta_0(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v+2) &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} \\ &= \vartheta_1(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(v+2) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} \\ &= \vartheta_2(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v+2) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \\ &= \vartheta_3(v)\end{aligned}$$

となります。

(5) v を $v + \frac{\tau}{2}$ にするとは、 u を $u + jK'$ にすることに等しいです。

$$\therefore \frac{u + jK'}{2K} = \frac{u}{2K} + j \frac{K'}{2K} = v + \frac{\tau}{2}$$

$$z = e^{j\pi v} \text{ に代入しますと、 } z = e^{j\pi(v+\frac{\tau}{2})} = e^{j\pi v + j\pi \frac{\tau}{2}} = e^{j\pi v} e^{j\pi \frac{\tau}{2}} = q^{\frac{1}{2}} z \text{ となり、 } z \text{ は } q^{\frac{1}{2}} z \text{ に}$$

変化しますので、

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v + \frac{\tau}{2}) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(q^{\frac{1}{2}} z)^{2n} + (q^{\frac{1}{2}} z)^{-2n}\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{-n} z^{-2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-n} z^{-2n}\end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

上式第 2 項の n に 0 を代入すると第 2 項は 1 になり、第 1 項が省略出来、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

上式第 2 項の n も 0 からにする為、適宜変形し、

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1) q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} z - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} z \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} - z^{-2n-1}) \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = j\lambda \vartheta_1(v) \end{aligned}$$

$$\lambda = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} = (e^{j\pi\tau})^{-\frac{1}{4}} (e^{j\pi v})^{-1} = e^{-\frac{j\pi\tau}{4}} e^{-j\pi v} = e^{-j\pi v - \frac{j\pi\tau}{4}} = e^{-j\pi(v + \frac{\tau}{4})} \text{ です。}$$

$$\vartheta_1(v + \frac{\tau}{2}) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(q^{\frac{1}{2}} z)^{2n+1} - (q^{\frac{1}{2}} z)^{-(2n+1)}\}$$

$$\begin{aligned}
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} - q^{-(n+\frac{1}{2})} z^{-(2n+1)})\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-(n+\frac{1}{2})} z^{-(2n+1)} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n+\frac{3}{4}} z^{2n+1} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-\frac{1}{4}} z^{-(2n+1)}
\end{aligned}$$

第 1 項の q の指数について平方完成しますと、

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} z^{2n+1} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2 - \frac{1}{4}} z^{-(2n+1)}$$

$q^{-\frac{1}{4}}$ は n に無関係なので外に出し、

$$\begin{aligned}
&= -jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-(2n+1)} \\
&= -jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} z^{-1} \\
&= -jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第 2 項の $\sum$ 内は $n=0$ の時 1 になりますから外に出し、 $n=1$ からに変更し、

$$= jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

新しい第 2 項も $n=1$ からに変更し、

$$\begin{aligned}
&= jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n-1+1)^2} z^{2(n-1)+1} + jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^{-1} q^{n^2} z^{2n-1} + jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} - j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1) q^{n^2} z^{2n} z^{-1} + j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \right\} \\
&= j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\} = j \lambda \vartheta_0(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_2\left(v + \frac{\tau}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \left\{ (q^{\frac{1}{2}} z)^{2n+1} + (q^{\frac{1}{2}} z)^{-(2n+1)} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \left\{ (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-(n+\frac{1}{2})} z^{-(2n+1)}) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-(n+\frac{1}{2})} z^{-(2n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n+\frac{3}{4}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-\frac{1}{4}} z^{-(2n+1)}
\end{aligned}$$

第 1 項の q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2-\frac{1}{4}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-\frac{1}{4}} z^{-(2n+1)}$$

$q^{-\frac{1}{4}}$ は n に無関係ですので外に出し、

$$\begin{aligned}
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-(2n+1)} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} z^{-1}
\end{aligned}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

第 2 項の Σ 内は $n=0$ の時 1 になりますから外に出し、 $n=1$ からに変更し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

上式の第 2 項も $n=1$ からに変更し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1+1)^2} z^{2(n-1)+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \right\}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\} = \lambda \vartheta_3(v)$$

$$\vartheta_3(v + \frac{\tau}{2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{ (q^{\frac{1}{2}} z)^{2n} + (q^{\frac{1}{2}} z)^{-2n} \}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-n} z^{-2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-n} z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

上式第 2 項の n も 0 からにする為、適宜変形し、

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} + z^{-2n-1}) \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \lambda \vartheta_2(v) \end{aligned}$$

となります。

(6) v を $v + \tau$ にすることは、 u を $u + j2K'$ にすることに等しいです。

$$\therefore \frac{u + j2K'}{2K} = \frac{u}{2K} + j\frac{2K'}{2K} = \frac{u}{2K} + j\frac{K'}{K} = v + \tau$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、 $z = e^{j\pi(v+\tau)} = e^{j\pi v + j\pi\tau} = e^{j\pi v} e^{j\pi\tau} = qz$ となり、 z は qz に変化しますので、

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v + \tau) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(qz)^{2n} + (qz)^{-2n}\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^{2n} z^{2n} + q^{-2n} z^{-2n}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-2n} z^{-2n}\end{aligned}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-2n} z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2-1} z^{-2n} \\ &= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^2 z^{-2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^2 z^{-2} z^{-2n} \\ &= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\ &= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\ &= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\ &= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n-1+1)^2} z^{-2(n+1)+2} \\ &= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}\end{aligned}$$

第 2 項の $n=0$ の場合を外に出し、

$$\begin{aligned}&= -q^{-1} z^{-2} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\ &= -q^{-1} z^{-2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \right\}\end{aligned}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = -\mu \vartheta_0(v)$$

$$\mu = q^{-1}z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1}(e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau}e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v - j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v+\tau)} \text{ です。}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v+\tau) &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(qz)^{2n+1} - (qz)^{-(2n+1)}\} \\ &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{q^{2n+1}z^{2n+1} - q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\} \\ &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{2n+1}z^{2n+1} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-2n-1}z^{-2n-1} \\ &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+3n+\frac{5}{4}}z^{2n+1} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-n-\frac{3}{4}}z^{-2n-1}\end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned}&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2-1}z^{2n+1} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-1}z^{-2n-1} \\ &= -jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2}z^{2n+1} + jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^{-2n-1} \\ &= -jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2}z^2z^{-2}z^{2n+1} + jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^2z^{-2}z^{-2n-1} \\ &= -jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2}z^{2n+3} + jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^{-2n+1}\end{aligned}$$

第 1 項を $n=1$ から、第 2 項を $n=-1$ からに変更しますと、

$$\begin{aligned}&= -jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n-1+\frac{3}{2})^2}z^{2(n-1)+3} + jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2}z^{-2(n+1)+1} \\ &= -jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^{-1} q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n-2+3} + jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n (-1) q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-2n-2+1}\end{aligned}$$

$$= jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

第2項での $n=-1$ の場合は、第1項での $n=0$ の場合と同じなので、

$$= jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - jq^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= jq^{-1}z^{-2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \right\}$$

$$= jq^{-1}z^{-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} \right] = -\mu \vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(v + \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(qz)^{2n+1} + (qz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(q^{2n+1} z^{2n+1} + q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)})\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{2n+1} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-2n-1} z^{-2n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+3n+\frac{5}{4}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-n-\frac{3}{4}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2-1} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2-1} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{2n+1} + q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+3} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n+1}$$

第 1 項を $n=1$ から、第 2 項を $n=-1$ からに変更しますと、

$$= q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1+\frac{3}{2})^2} z^{2(n-1)+3} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2} z^{-2(n+1)+1}$$

$$= q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

第 2 項の $n=-1$ の場合は、第 1 項の $n=0$ の場合と同じなので、

$$= q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1}z^{-2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \right\}$$

$$= q^{-1}z^{-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} \right] = \mu \vartheta_2(v)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_3(v + \tau) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(qz)^{2n} + (qz)^{-2n}\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (q^{2n} z^{2n} + q^{-2n} z^{-2n}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n} \end{aligned}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-2n} z^{-2n} \end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2-1} z^{-2n}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^2 z^{-2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^2 z^{-2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-1+1)^2} z^{-2(n+1)+2} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第2項の $n=0$ の場合を外に出し、

$$\begin{aligned}
&= q^{-1} z^{-2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} z^{-2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} z^{-2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} z^{-2} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}) \\
&= q^{-1} z^{-2} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = \mu \vartheta_3(v)
\end{aligned}$$

となります。

(7) v を $v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ にするとは、 u を $u + K + jK'$ にすることに等しいです。

$$\therefore \frac{u + K + jK'}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{K}{2K} + j \frac{K'}{2K} = v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、 $z = e^{j\pi(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2})} = e^{j\pi v} e^{\frac{j\pi}{2}} e^{j\pi \tau} = j q^{\frac{1}{2}} z$ となり、 z は $j q^{\frac{1}{2}} z$ に変

化しますので、

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(j q^{\frac{1}{2}} z)^{2n} + (j q^{\frac{1}{2}} z)^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^n q^n z^{2n} + (\frac{1}{-1})^n q^{-n} z^{-2n}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^n q^n z^{2n} + (-1)^n q^{-n} z^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1^n q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-n} z^{-2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-n} z^{-2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2(n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} z \\
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}
\end{aligned}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} + z^{-2n-1})$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \lambda \vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_1(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(jq^{\frac{1}{2}}z)^{2n+1} - (jq^{\frac{1}{2}}z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{j^{2n+1} q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - j^{-(2n+1)} q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j, \quad j^{-(2n+1)} = j^{-2n-1} = (j^{-2})^n j^{-1} = (\frac{1}{j^2})^n \frac{1}{j} = (-1)^n \frac{1}{j} = -(-1)^n j \text{ ですので、}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^n j q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + (-1)^n j q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1}\}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)^n j (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1})$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} q^{(n+\frac{1}{2})^2} j (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n-1}$$

$q^{-\frac{1}{4}}$ は n に無関係なので外に出し、

$$\begin{aligned}
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n-1} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第2項のΣ内はn=0の時1になりますから外に出し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

上式第2項もn=1からに変更しますと

$$\begin{aligned}
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = \lambda \vartheta_3(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_2(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(jq^{\frac{1}{2}}z)^{2n+1} + (jq^{\frac{1}{2}}z)^{-(2n+1)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{j^{2n+1} q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} + j^{-(2n+1)} q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}
\end{aligned}$$

$j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j$ 、 $j^{-(2n+1)} = j^{-2n-1} = (j^{-2})^n j^{-1} = (\frac{1}{j^2})^n \frac{1}{j} = (-1)^n \frac{1}{j} = -(-1)^n j$ ですので、

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^n j q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - (-1)^n j q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}
\end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned}
&= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2 - \frac{1}{4}} z^{-(2n+1)} \\
&= j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} - j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n-1} \\
&= j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} - j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第 2 項の $n=0$ の時を外に出し、

$$= -j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} - j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

上式第 2 項も $n=1$ からに変更しますと

$$\begin{aligned}
&= -j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+1} - j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= -j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + j q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^{-1} q^{n^2} z^{2n-1} - j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= -j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} - j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} - j q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= -j q^{\frac{1}{4}} z^{-1} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}\}
\end{aligned}$$

$$= -jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = -j\lambda\vartheta_0(v)$$

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(jq^{\frac{1}{2}}z)^{2n} + (jq^{\frac{1}{2}}z)^{-2n}\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (j^{2n} q^n z^{2n} + j^{-2n} q^{-n} z^{-2n})\end{aligned}$$

$j^{2n} = (j^2)^n = (-1)^n$ 、 $j^{-2n} = (j^{-2})^n = (\frac{1}{j^2})^n = (\frac{1}{-1})^n = (-1)^n$ ですので、

$$\begin{aligned}&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{-n} z^{-2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-n} z^{-2n}\end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2} z^{-2(n+1)} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z z^{2n} \frac{1}{z} - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z z^{-2n-2} \frac{1}{z} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \\
&= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = j\lambda \vartheta_1(v)
\end{aligned}$$

となります。

(8) v を $v+1+\tau$ にするとは、 u を $u+2K+j2K'$ にすることに等しいです。

$$\therefore \frac{u+2K+j2K'}{2K} = v+1+\tau$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、 $z = e^{j\pi(v+1+\tau)} = e^{j\pi v} e^{j\pi} e^{j\pi\tau} = -qz$ となり、 z は $-qz$ に変化するので、

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v+1+\tau) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-qz)^{2n} + (-qz)^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^{2n} q^{2n} z^{2n} + (-1)^{-2n} q^{-2n} z^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{q^{2n} z^{2n} + (\frac{1}{-1})^{2n} q^{-2n} z^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^{2n} z^{2n} + q^{-2n} z^{-2n}) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-2n} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-2n} z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2-1} z^{-2n} \\
&= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^2 z^{-2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^2 z^{-2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+2} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n-1+1)^2} z^{-2(n+1)+2} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} - q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第 2 項の $n=0$ の場合を外に出して、

$$\begin{aligned}
&= -q^{-1}z^{-2} - q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} - q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n} \right\} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\} = -\mu \vartheta_0(v)
\end{aligned}$$

$$\mu = q^{-1}z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1}(e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau} e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v - j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v+\tau)} \text{ です。}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v+1+\tau) &= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-qz)^{2n+1} - (-qz)^{-(2n+1)}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-1)^{2n+1} q^{2n+1} z^{2n+1} - (-1)^{-(2n+1)} q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-1)^{2n} (-1) q^{2n+1} z^{2n+1} - (-1)^{-2n} (-1)^{-1} q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \left\{ (-1)^{2n} (-1) q^{2n+1} z^{2n+1} - \left(\frac{1}{-1}\right)^{2n} \left(\frac{1}{-1}\right) q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)} \right\} \\
&= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{-q^{2n+1} z^{2n+1} + q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{2n+1} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{-2n-1} z^{-2n-1}
\end{aligned}$$

$$= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+3n+\frac{5}{4}} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-n-\frac{3}{4}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned} &= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2-1} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-1} z^{-2n-1} \\ &= jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+1} - jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \\ &= jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{2n+1} - jq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{-2n-1} \\ &= jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+3} - jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n+1} \end{aligned}$$

第 1 項を $n=1$ から、第 2 項を $n=-1$ からに変更しますと、

$$\begin{aligned} &= jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n-1+\frac{3}{2})^2} z^{2(n-1)+3} - jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2} z^{-2(n+1)+1} \\ &= -jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \end{aligned}$$

第 2 項の $n=-1$ の場合は、第 1 項の $n=0$ の場合と同じなので、

$$\begin{aligned} &= -jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + jq^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \\ &= -jq^{-1} z^{-2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \right\} \\ &= -jq^{-1} z^{-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} \right] = \mu \vartheta_1(v) \end{aligned}$$

$$\vartheta_2(v+1+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-qz)^{2n+1} + (-qz)^{-(2n+1)}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-1)^{2n+1} q^{2n+1} z^{2n+1} + (-1)^{-2n-1} q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{(-1)^{2n} (-1) q^{2n+1} z^{2n+1} + \left(\frac{1}{-1}\right)^{2n} \left(\frac{1}{-1}\right) q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \{-q^{2n+1} z^{2n+1} - q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\} \\
&= - \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{2n+1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{-2n-1} z^{-2n-1} \\
&= - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+3n+\frac{5}{4}} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-n-\frac{3}{4}} z^{-2n-1}
\end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1} z^{-2n-1} \\
&= -q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2} z^{2n+1} - q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{-2n-1} \\
&= -q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2} z^2 z^{-2} z^{2n+1} - q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^2 z^{-2} z^{-2n-1} \\
&= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2} z^{2n+3} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{-2n+1}
\end{aligned}$$

第 1 項を $n=1$ から、第 2 項を $n=-1$ からに変更しますと、

$$\begin{aligned}
&= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{\left(n-1+\frac{3}{2}\right)^2} z^{2(n-1)+3} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} q^{\left(n+1-\frac{1}{2}\right)^2} z^{-2(n+1)+1} \\
&= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{-2n-1}
\end{aligned}$$

第 2 項の $n=-1$ の場合は、第 1 項の $n=0$ の場合と同じですので、

$$\begin{aligned}
&= -q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1} \right\} \\
&= -q^{-1}z^{-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} \right] = \mu \vartheta_2(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(v+1+\tau) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(-qz)^{2n} + (-qz)^{-2n}\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \left\{ (-1)^{2n} q^{2n} z^{2n} + \left(\frac{1}{-1}\right)^{2n} q^{-2n} z^{-2n} \right\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-2n} z^{-2n}
\end{aligned}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2-1} z^{-2n} \\
&= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^2 z^{-2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^2 z^{-2} z^{-2n} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{-2n+2} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-1+1)^2} z^{-2(n+1)+2} \\
&= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}
\end{aligned}$$

第 2 項の $n=0$ の場合を外に出し、

$$= q^{-1}z^{-2} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

第 1 項の n を 1 からに変更し、

$$\begin{aligned} &= q^{-1}z^{-2} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+2} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \\ &= q^{-1}z^{-2} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-1}z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \\ &= q^{-1}z^{-2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n} \right) \\ &= q^{-1}z^{-2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\} = \mu \vartheta_3(v) \end{aligned}$$

となります。以上です。

[目次へ戻る](#)