負べきの多項式も因数分解出来ます。$\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+6=x^{-2}+5x^{-1}+6$ と言う、負べきの多項式を因数分解したい場合、$\frac{1}{x}=y$ と置き、$y^2+5y+6=0$ と言う方程式を考えます。方程式の根は y=－2 と y=－3 ですので、$y^2+5y+6=(y+2)(y+3)$ と因数分解します。

y を元に戻し、$\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+6=(\frac{1}{x}+2)(\frac{1}{x}+3)$ と因数分解出来ます。

$\frac{1}{x}=y$ ですから $x=\frac{1}{y}$ です。$\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+6=0$ の根は、$x=-\frac{1}{2}$ と $x=-\frac{1}{3}$ です。

$\frac{1}{x}-a=0$ が成り立つのは $\frac{1}{x}$ が a の時ですから、$x=\frac{1}{a}$ です。a そのものを根にしたい場合は、$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=0$ と言う式にすれば良いです。

上記の負べきの多項式、$\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+6$ に、正べきの多項式、x^2+3x+2 をかけ合わせます。$x^2+3x+2=0$ と置いた時、根は－1 と－2 ですので、$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ です。

$$(\frac{1}{x}+2)(\frac{1}{x}+3)(x+1)(x+2)=\frac{2}{x^2}+\frac{13}{x}+28+23x+6x^2$$

となり､負べきと正べきがくっ付いた形の多項式が出来ます。=0 と置き､根をさがしますと、$-\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{3}$、－1、－2 であることがわかります。式を展開しても、方程式の根は根です。

負べきの項を含む、指定した根を持つ多項式を作るには、ひとまず多項式を因数分解したとして、根で零になる因数を並べ、全部かけ合わせればそう言う多項式になります。

例えば、根を a、b、c・・・e、f、g・・・としたい場合、

$$(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})(\frac{1}{x}-\frac{1}{b})(\frac{1}{x}-\frac{1}{c})\bullet\bullet\bullet\bullet(x-e)(x-f)(x-g)\bullet\bullet\bullet\bullet$$

です。ところで、どの教科書にもありますが、周期 2π の波の関数 f(x)の複素フーリエ級数展開の式は、

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jnx}$$

になります。この式を周期 4K の波、f(u)の複素フーリエ級数展開の式に変更します。f(u)の 1 周期−2K→0→2K を、f(x)の 1 周期−π→0→π に縮めれば良いので、上式の x の所を、

$$\frac{\pi}{2K}\cdot u$$

に変更します。これで u の−2K→0→2K が、−π→0→π に縮まります。上式の u に−2K、2K 等を代入し試して下さい。周期 4K の波、f(u)の複素フーリエ級数展開の式は、

$$f(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{jn\pi u}{2K}}$$

です。この式を展開しますと、

$$f(u)=\bullet\bullet\bullet+c_{-3}e^{\frac{-j3\pi u}{2K}}+c_{-2}e^{\frac{-j2\pi u}{2K}}+c_{-1}e^{\frac{-j1\pi u}{2K}}+c_0e^{\frac{0}{2K}}+c_1e^{\frac{j1\pi u}{2K}}+c_2e^{\frac{j2\pi u}{2K}}+c_3e^{\frac{j3\pi u}{2K}}+\bullet\bullet\bullet$$

$$=\bullet\bullet\bullet+c_{-3}\frac{1}{e^{\frac{j3\pi u}{2K}}}+c_{-2}\frac{1}{e^{\frac{j2\pi u}{2K}}}+c_{-1}\frac{1}{e^{\frac{j1\pi u}{2K}}}+c_0+c_1e^{\frac{j1\pi u}{2K}}+c_2e^{\frac{j2\pi u}{2K}}+c_3e^{\frac{j3\pi u}{2K}}+\bullet\bullet\bullet$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{e^{\frac{jn\pi u}{2K}}}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{\frac{jn\pi u}{2K}}$$

になります。ここで、

$$v=\frac{u}{2K}、e^{j\pi v}=z、つまり、e^{\frac{j\pi u}{2K}}=z$$

と置きますと、

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

になります。

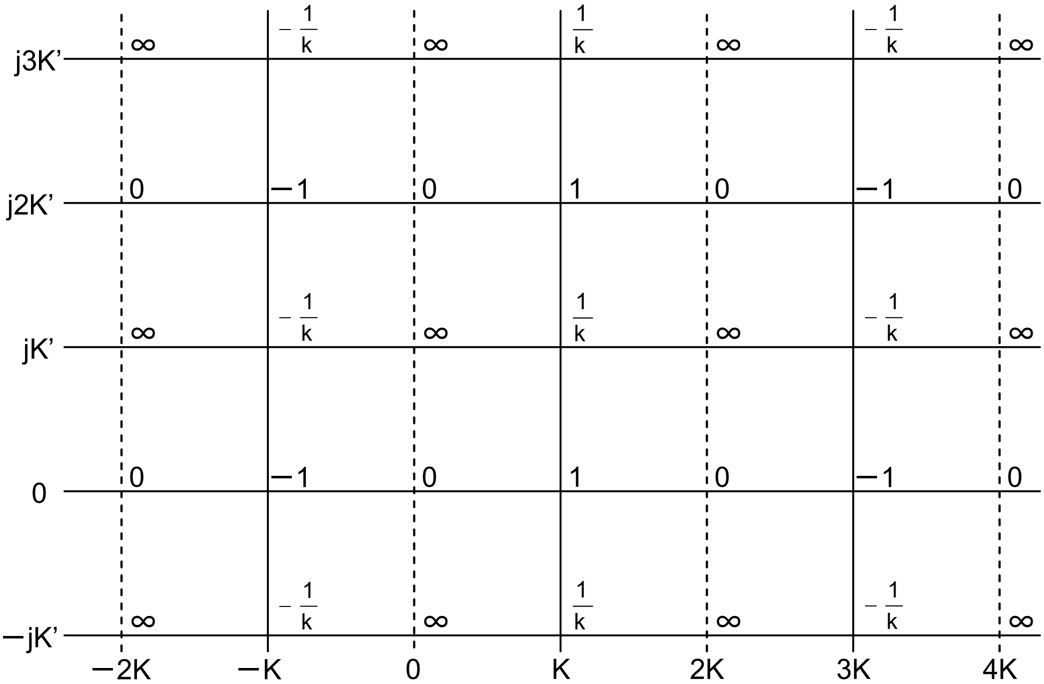
　負べきの項を含む指定した根を持つ多項式を作るには、ひとまず多項式を因数分解したとして、根で零になる因数を並べて、全部をかけ合わせればそう言う多項式になるのでした。

　この複素フーリエ級数展開の無限級数も $\frac{1}{z}$ と z を使い、根で零になる因数を並べて、かけ合わせれば作れる筈です。

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{c}\right)\bullet\bullet\bullet\bullet(z-e)(z-f)(z-g)\bullet\bullet\bullet\bullet$$

です。ここでは、sn 関数が極になる時の変数を与えると関数の値が零になる、周期 4K の波の関数をフーリエ級数で作ります。

sn 関数の全ての極での変数値は、m と n を全ての整数（0 および±自然数）として、$2mK+j(2n+1)K'$ で表されます。sn の基本周期平行四辺形と特定の点における値は下図の通りです。紙面の都合で、－2K～4K、－jK'～j3K'しか描いていませんが、この平行四辺形は上下左右に無限に広がっています。



$z=e^{\frac{j\pi u}{2K}}$ 式の u に、sn 関数の極の変数値を代入しますと、

$$e^{\frac{j\pi\{2mK+j(2n+1)K'\}}{2K}}=e^{\frac{-\pi(2n+1)K'+j\pi 2mK}{2K}}=e^{\frac{-\pi(2n+1)K'}{2K}}\bullet e^{j\pi m}$$

$$=e^{\frac{-\pi K'(2n+1)}{2K}}\bullet(e^{j\pi})^m=e^{\frac{-\pi K'(2n+1)}{2K}}\bullet(\cos\pi+j\sin\pi)^m$$

$$=e^{\frac{-\pi K'(2n+1)}{2K}}\bullet(-1)^m=(-1)^m\bullet e^{-\pi\frac{K'}{K}\bullet\frac{(2n+1)}{2}}=(-1)^m\bullet e^{-\pi\frac{K'}{K}(n+\frac{1}{2})}$$

と言う実数になります。ここで $e^{j\pi\tau}=q$、$\tau=\dfrac{jK'}{K}$、つまり、$e^{-\pi\frac{K'}{K}}=q$ と置きますと、

$$= (-1)^m q^{n+\frac{1}{2}} = \pm q^{n+\frac{1}{2}}$$

になります。変数値$u = 2mK + j(2n+1)K'$で零点を持つ周期 4K の波は、フーリエ級数展開した時、n を全ての整数（0 および±自然数）として、$z = \pm q^{n+\frac{1}{2}}$で零になれば良いです。

求めるフーリエ級数は、n が全ての整数の時の因数の積です。したがって、$u = 2mK + j(2n+1)K'$で零点を持つ、周期 4K のフーリエ級数 f(u) 改め f(z)は、n のマイナス側を負べきの根、n の 0 とプラス側を正べきの根として、

$$f(z) = \prod_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{q^{n+\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q^{n+\frac{1}{2}}}\right)\prod_{n=0}^{\infty}\left(z + q^{n+\frac{1}{2}}\right)\left(z - q^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \prod_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{q^{n+\frac{1}{2}+n+\frac{1}{2}}}\right)\prod_{n=0}^{\infty}\left(z^2 - q^{n+\frac{1}{2}+n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \prod_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{q^{2n+1}}\right)\prod_{n=0}^{\infty}\left(z^2 - q^{2n+1}\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{q^{2(-n)+1}}\right\}\prod_{n=0}^{\infty}\left(z^2 - q^{2n+1}\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{q^{-(2n-1)}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{z^2 - q^{2(n-1)+1}\right\}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{q^{-(2n-1)}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left(z^2 - q^{2n-1}\right)$$

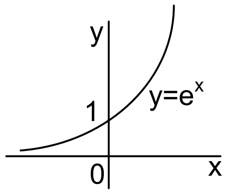
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2} - q^{2n-1}\right)\left(z^2 - q^{2n-1}\right)$$

と言う無限積になります。

しかし、このままの無限積では収束しません。収束する無限積は n が増加するにつれ、因数が 1 に近づいていかなければなりません。総乗記号 π（パイ）内の 2 つの因数が、n の増加により 1 に近づくとは思えません。

ここでq^{2n-1}は次の数です。

$$q^{2n-1} = e^{-\pi\frac{K'}{K}(2n-1)} = e^{-2n\pi\frac{K'}{K}+\pi\frac{K'}{K}} = e^{-2n\pi\frac{K'}{K}} \bullet e^{\pi\frac{K'}{K}}$$



目次にある完全楕円積分表をご覧頂ければ、$\frac{K'}{K}$は正であることが分ります。$\frac{K'}{K}$が正の場

合、$e^{-2n\pi\frac{K'}{K}}$ は n が大きくなったとき限りなく 0 に近づいて行きます。e^x グラフの左半部分です。$e^{\pi\frac{K'}{K}}$ は正の定数なので、$e^{-2n\pi\frac{K'}{K}} \bullet e^{\pi\frac{K'}{K}}$ は全体として 0 に近づいて行きます。つまり q^{2n-1} は、n が正で大きくなった時 0 に近づいて行く数です。

無限積を収束させる為、$\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z^2}-q^{2n-1})(z^2-q^{2n-1})$ に次のような変形を行います。

$(\frac{1}{z^2}-q^{2n-1})$ に z^2 をかけますと、

$$z^2(\frac{1}{z^2}-q^{2n-1}) = 1-q^{2n-1}z^2$$

になります。上記の通り、q^{2n-1} は n が正で大きくなった時 0 に近づいて行く数ですので、

$$\lim_{n\to\infty}(1-q^{2n-1}z^2) = 1$$

になります。

次に (z^2-q^{2n-1}) に $\frac{1}{z^2}$ をかけますと、

$$\frac{z^2}{z^2}-\frac{q^{2n-1}}{z^2} = 1-\frac{q^{2n-1}}{z^2} = 1-q^{2n-1}z^{-2}$$

になります。前述の通り q^{2n-1} は、n が正で大きくなった時 0 に近づいて行く数ですので、

$$\lim_{n\to\infty}(1-q^{2n-1}z^{-2}) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{q^{2n-1}}{z^2}) = 1$$

になります。したがって、

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z^2}-q^{2n-1})(z^2-q^{2n-1}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2}(\frac{1}{z^2}-q^{2n-1})(z^2-q^{2n-1}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}z^2(\frac{1}{z^2}-q^{2n-1})\frac{1}{z^2}(z^2-q^{2n-1}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}) \end{aligned}$$

となります。片方で z^2 をかけ、片方で $\frac{1}{z^2}$ をかけました。

$u = 2mK + j(2n+1)K'$ で零点を持つ周期 4K の波は、フーリエ級数展開した時、n を全ての整数（0 および±自然数）として、$z = \pm q^{n+\frac{1}{2}}$ で零になれば良いのでした。上で出来た無限

積の因数それぞれの零点を求めます。無限積の$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)$が零になるのは、$z^2=\frac{1}{q^{2n-1}}$の時です。その時の z を求めますと、

$$z=\pm\sqrt{\frac{1}{q^{2n-1}}}=\pm\sqrt{q^{-(2n-1)}}=\pm\sqrt{q^{-2n+1}}=\pm\sqrt{q^{2(-n+\frac{1}{2})}}=\pm\sqrt{\left(q^{-n+\frac{1}{2}}\right)^2}=\pm q^{-n+\frac{1}{2}}$$

になります。$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)$は、$z=\pm q^{n+\frac{1}{2}}$において n がマイナスの時、零になります。

無限積の$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^{-2})$は、$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1}z^{-2})$と同じです。

$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1}z^{-2})=\prod_{n=0}^{\infty}(1-\frac{q^{2n+1}}{z^2})$が零になるのは、$z^2=q^{2n+1}$の時です。z を求めますと、

$$z=\pm\sqrt{q^{2n+1}}=\pm\sqrt{q^{2(n+\frac{1}{2})}}=\pm\sqrt{\left(q^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}=\pm q^{n+\frac{1}{2}}$$

になります。$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^{-2})=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1}z^{-2})$は、$z=\pm q^{n+\frac{1}{2}}$において n が 0 とプラスの時、零になります。

q は実数ですから、無限積を無限級数に展開した場合、各項のフーリエ係数は実数になります。これは余弦波しかない偶関数を表します。

2、上記無限積の無限級数展開

上記フーリエ級数の因数分解無限積を無限級数表示に直します。各項のフーリエ係数の決定作業です。まず無限積の代わりに n＝1 から m までの積、

$$f(z)=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

を考え、n＝1 で実際に展開を行って見ますと、

$$(1-qz^2)(1-qz^{-2})=1-qz^{-2}-qz^2+q^2=-qz^{-2}+1+q^2-qz^2$$

になります。次に n＝2 で実際に展開を行って見ますと、

$$(1-q^3z^2)(1-q^3z^{-2})=1-q^3z^{-2}-q^3z^2+q^6=-q^3z^{-2}+1+q^6-q^3z^2$$

になります。n＝1 、n＝2 の展開をかけ合わせますと、

$$
\begin{aligned}
&(-qz^{-2}+1+q^2-qz^2)(-q^3z^{-2}+1+q^6-q^3z^2)= \\
&q^4z^{-4}-qz^{-2}-q^7z^{-2}+q^4-q^3z^{-2}+1+q^6-q^3z^2-q^5z^{-2}+q^2+q^8-q^5z^2+q^4-qz^2-q^7z^2+q^4z^4 \\
&=q^4z^{-4}-qz^{-2}-q^3z^{-2}-q^5z^{-2}-q^7z^{-2}+1+q^2+2q^4+q^6+q^8-qz^2-q^3z^2-q^5z^2-q^7z^2+q^4z^4 \\
&=q^4z^{-4}+(-q-q^3-q^5-q^7)z^{-2}+(1+q^2+2q^4+q^6+q^8)+(-q-q^3-q^5-q^7)z^2+q^4z^4
\end{aligned}
$$

になります。つまり、この積を級数に展開しますと、

$$f(z)=\sum_{n=1}^{m}a_{-n}z^{-n}+a_0+\sum_{n=1}^{m}a_nz^n$$

のかたちになりそうです。ところが積、

$$f(z)=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

の z に−z を代入して f (−z)を求めますと、

$$z=e^{j\pi v}\quad v=\frac{u}{2K}\quad \text{つまり、}z=e^{j\frac{\pi u}{2K}}\quad -z=-e^{j\frac{\pi u}{2K}}\text{であり、}$$

$(-z)^2=(-e^{j\frac{\pi u}{2K}})^2=(-1)^2(e^{j\frac{\pi u}{2K}})^2=z^2$ ですので、

$$
\begin{aligned}
f(-z)&=\prod_{n=1}^{m}\{1-q^{2n-1}(-z)^2\}\{1-q^{2n-1}(-z)^{-2}\} \\
&=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^2)\{1-q^{2n-1}\frac{1}{(-z)^2}\} \\
&=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}) \\
&=f(z)
\end{aligned}
$$

になります。z を代入した時と同じであり、これは偶関数を表しています。偶関数であると z^n に奇数乗の項は現れません。さらに、

$$f(z)=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

の z に $\frac{1}{z}$ を代入して $f(\frac{1}{z})$ を求めますと、

$$
\begin{aligned}
f(\frac{1}{z}) &= \prod_{n=1}^{m}\{1-q^{2n-1}(z^{-1})^{2}\}\{1-q^{2n-1}(z^{-1})^{-2}\} \\
&= \prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^{-2})(1-q^{2n-1}z^{2}) \\
&= f(z)
\end{aligned}
$$

になり、変数の逆数を代入しても答えが同じになります。

$$
f(z) = \sum_{n=1}^{m} a_{-n}z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n z^n
$$

において、項 $a_{-n}z^{-n}$ の z に $\frac{1}{z}$ を代入した時 $a_{-n}z^{n}$ となります。また項 $a_n z^n$ の z に $\frac{1}{z}$ を代入すると $a_n z^{-n}$ となります。$f(\frac{1}{z}) = f(z)$ になる為には a_n と a_{-n} が等しくなければなりません。以上の 2 点から f(z)は、つぎの形に級数展開される筈です。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=1}^{m} a_n z^{-2n} + a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n z^{2n} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n (z^{2n} + z^{-2n})
\end{aligned}
$$

さて、$f(z) = \prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^{2})(1-q^{2n-1}z^{-2})$ の計算は、n ごとに括弧どうしの積を求めた後、(n＝1 の積)･(n＝2 の積)･････(n＝m の積)とかけ合わせて行くのが普通です。

n＝1 の場合の括弧どうしの積は、

$$1+q^2-q(z^2+z^{-2})$$

n＝2 は、

$$1+q^6-q^3(z^2+z^{-2})$$

n＝3 は、

$$1+q^{10}-q^5(z^2+z^{-2})$$

n＝4 は、

$$1+q^{14}-q^7(z^2+z^{-2})$$

n＝5 は、

$$1+q^{18}-q^9(z^2+z^{-2})$$

n＝m は、

$$1+q^{4m-2}-q^{2m-1}(z^2+z^{-2})$$

となります。次に n 違いの積をかけ合わせて行きますが、n＝1 と n＝2 とのかけ算の最後の部分は、

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + qq^3(z^2+z^{-2})(z^2+z^{-2})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + qq^3(2+z^4+z^{-4})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + 2qq^3+qq^3(z^4+z^{-4})$$

となります。この式と n＝3 とのかけ算の最後の部分は、

$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet - qq^3q^5(z^4+z^{-4})(z^2+z^{-2})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet - qq^3q^5(z^2+z^{-2}+z^6+z^{-6})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet - qq^3q^5(z^2+z^{-2})-qq^3q^5(z^6+z^{-6})$$

となります。この式と n＝4 の積とのかけ算の最後の部分は、

$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + qq^3q^5q^7(z^6+z^{-6})(z^2+z^{-2})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + qq^3q^5q^7(z^4+z^{-4}+z^8+z^{-8})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + qq^3q^5q^7(z^4+z^{-4})+qq^3q^5q^7(z^8+z^{-8})$$

となります。この式と n＝5 の積とのかけ算の最後の部分は、

$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet - qq^3q^5q^7q^9(z^8+z^{-8})(z^2+z^{-2})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet - qq^3q^5q^7q^9(z^6+z^{-6}+z^{10}+z^{-10})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet - qq^3q^5q^7q^9(z^6+z^{-6})-qq^3q^5q^7q^9(z^{10}+z^{-10})$$

となります。途中を省略して、n＝m－1 の積までのかけ算と n＝m の積とのかけ算の、最後の部分は、

$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + (-1)^m qq^3q^5q^7q^9 \bullet\bullet\bullet q^{2m-3}q^{2m-1}\{z^{2m-2}+z^{-(2m-2)}\}(z^2+z^{-2})$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + (-1)^m qq^3q^5q^7q^9 \bullet\bullet\bullet q^{2m-3}q^{2m-1}\{z^{2m-4}+z^{-(2m-4)}+z^{2m}+z^{-2m}\}$$
$$=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + (-1)^m qq^3q^5q^7q^9 \bullet\bullet\bullet q^{2m-3}q^{2m-1}\{z^{2m-4}+z^{-(2m-4)}\}$$
$$+(-1)^m qq^3q^5q^7q^9 \bullet\bullet\bullet q^{2m-3}q^{2m-1}(z^{2m}+z^{-2m})$$

となります。最後の項は、$(-1)^m qq^3q^5q^7q^9 \bullet\bullet\bullet q^{2m-3}q^{2m-1}(z^{2m}+z^{-2m})$ となり、最後の項の係数 a_m は、$(-1)^m qq^3q^5q^7q^9 \bullet\bullet\bullet q^{2m-3}q^{2m-1}=(-1)^m q^{1+3+5+7+9+\bullet\bullet\bullet+(2m-3)+(2m-1)}=(-1)^m q^{m^2}$ と

なります。q の指数、$1+3+5+7+9+\bullet\bullet\bullet+(2m-3)+(2m-1)$ が m^2 になる理由は次の通りです。自然数奇数級数の第 m 項は 2m−1 です。この級数をひっくり返して元の級数と項どうし加えますと、

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 1+ & 3+ & 5+ & 7+\bullet\bullet\bullet\bullet+ & (2m-7)+ & (2m-5)+ & (2m-3)+ & (2m-1) \\ +) & (2m-1)+ & (2m-3)+ & (2m-5)+ & (2m-7)+\bullet\bullet\bullet\bullet+ & 7+ & 5+ & 3+ & 1 \\ \hline & 2m+ & 2m+ & 2m+ & 2m+\bullet\bullet\bullet\bullet+ & 2m+ & 2m+ & 2m+ & 2m \end{array}$$

になります。全ての項の上下の和は 2m です。これが m 項ありますから、2 列の総和は $2m\bullet m=2m^2$ です。1 列の和はこの半分ですから m^2 になります。

次に、積 $f(z)=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$ の z を q z にしてみますと、

$$f(qz)=\prod_{n=1}^{m}\{1-q^{2n-1}(qz)^2\}\{1-q^{2n-1}(qz)^{-2}\}$$

$$=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n-1}q^2z^2)(1-q^{2n-1}q^{-2}z^{-2})$$

$$=\prod_{n=1}^{m}(1-q^{2n+1}z^2)(1-q^{2n-3}z^{-2})$$

になります。n＝1 の時、f(z) と f(qz) は、

$$f(z)=(1-qz^2)(1-qz^{-2})$$
$$f(qz)=(1-q^3z^2)(1-q^{-1}z^{-2})$$

になります。n＝2 の時、

$$f(z)=(1-q^3z^2)(1-q^3z^{-2})$$
$$f(qz)=(1-q^5z^2)(1-qz^{-2})$$

になります。n＝3 の時、

$$f(z)=(1-q^5z^2)(1-q^5z^{-2})$$
$$f(qz)=(1-q^7z^2)(1-q^3z^{-2})$$

になります。n＝m−2 の時、

$$f(z)=(1-q^{2m-5}z^2)(1-q^{2m-5}z^{-2})$$
$$f(qz)=(1-q^{2m-3}z^2)(1-q^{2m-7}z^{-2})$$

になります。n＝m−1 の時、

$$f(z)=(1-q^{2m-3}z^2)(1-q^{2m-3}z^{-2})$$
$$f(qz)=(1-q^{2m-1}z^2)(1-q^{2m-5}z^{-2})$$

になります。n＝m の時、

$$f(z)=(1-q^{2m-1}z^{2})(1-q^{2m-1}z^{-2})$$
$$f(qz)=(1-q^{2m+1}z^{2})(1-q^{2m-3}z^{-2})$$

になります。

各式を注意深くながめますと、

n＝1 の時の $f(z)$ の $(1-qz^{-2})$ は、n＝2 の時の $f(qz)$ に現れます。
n＝2 の時の $f(z)$ の $(1-q^{3}z^{-2})$ は、n＝3 の時の $f(qz)$ に現れます。以下略。
n＝1 の時の $f(qz)$ の $(1-q^{3}z^{2})$ は、n＝2 の時の $f(z)$ に現れます。
n＝2 の時の $f(qz)$ の $(1-q^{5}z^{2})$ は、n＝3 の時の $f(z)$ に現れます。以下略。
n＝m－2 の時の $f(z)$ の $(1-q^{2m-5}z^{-2})$ は、n＝m－1 の時の $f(qz)$ に現れます。
n＝m－1 の時の $f(z)$ の $(1-q^{2m-3}z^{-2})$ は、n＝m の時の $f(qz)$ に現れます。
n＝m－2 の時の $f(qz)$ の $(1-q^{2m-3}z^{2})$ は、n＝m－1 の時の $f(z)$ に現れます。
n＝m－1 の時の $f(qz)$ の $(1-q^{2m-1}z^{2})$ は、n＝m の時の $f(z)$ に現れます。

結局、$f(z)$ の積のうち、n＝1 の時の $(1-qz^{2})$ と n＝m の時の $(1-q^{2m-1}z^{-2})$ は、$f(qz)$ の積には現れません。

一方 $f(qz)$ の積のうち、n＝1 の時の $(1-q^{-1}z^{-2})$ と n＝m の時の $(1-q^{2m+1}z^{2})$ は $f(z)$ の積には現れません。

従って、$f(z)$ の積から $(1-qz^{2})$ と $(1-q^{2m-1}z^{-2})$ を消し、$(1-q^{-1}z^{-2})$ と $(1-q^{2m+1}z^{2})$ を付け加えれば、$f(qz)$ の積になります。つまり、

$$f(qz)=\frac{(1-q^{-1}z^{-2})(1-q^{2m+1}z^{2})}{(1-qz^{2})(1-q^{2m-1}z^{-2})}\bullet f(z)$$

です。この式を変形し、

$$(1-qz^{2})(1-q^{2m-1}z^{-2})f(qz)=(1-q^{-1}z^{-2})(1-q^{2m+1}z^{2})f(z)$$

という式が出来ます。ここで、左辺の $(1-qz^{2})(1-q^{2m-1}z^{-2})$ を展開しますと、

$$1-q^{2m-1}z^{-2}-qz^{2}+q^{2m}$$

となりますが、これを、

$$q^{2m}-q^{2m-1}z^{-2}-qz^{2}+1$$

と並べかえますと、右辺の$1-q^{-1}z^{-2}$で割ることが出来る事が分ります。実際に割りますと、

$$(q^{2m}-qz^{2})f(qz)=(1-q^{2m+1}z^{2})f(z)\ \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

になります。この項等式①の両辺に級数を展開したもの、

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{m}a_n(z^{2n}+z^{-2n})=a_0+a_1(z^2+z^{-2})+a_2(z^4+z^{-4})+a_3(z^6+z^{-6})\bullet\bullet\bullet$$

$$=a_0+a_1z^2+a_1z^{-2}+a_2z^4+a_2z^{-4}+a_3z^6+a_3z^{-6}\bullet\bullet\bullet$$

$$f(qz)=a_0+\sum_{n=1}^{m}a_n\{(qz)^{2n}+(qz)^{-2n}\}$$

$$=a_0+a_1(q^2z^2+q^{-2}z^{-2})+a_2(q^4z^4+q^{-4}z^{-4})+a_2(q^6z^6+q^{-6}z^{-6})\bullet\bullet\bullet$$

$$=a_0+a_1q^2z^2+a_1q^{-2}z^{-2}+a_2q^4z^4+a_2q^{-4}z^{-4}+a_3q^6z^6+a_3q^{-6}z^{-6}\bullet\bullet\bullet$$

を代入しますと、①式左辺は、

$$(q^{2m}-qz^2)f(qz)=(q^{2m}-qz^2)(a_0+a_1q^2z^2+a_1q^{-2}z^{-2}+a_2q^4z^4+a_2q^{-4}z^{-4}+a_3q^6z^6+a_3q^{-6}z^{-6}\bullet\bullet\bullet)$$

$$=a_0(q^{2m}-qz^2)+a_1q^2z^2(q^{2m}-qz^2)+a_1q^{-2}z^{-2}(q^{2m}-qz^2)+a_2q^4z^4(q^{2m}-qz^2)$$

$$+a_2q^{-4}z^{-4}(q^{2m}-qz^2)+a_3q^6z^6(q^{2m}-qz^2)+a_3q^{-6}z^{-6}(q^{2m}-qz^2)\bullet\bullet\bullet$$

$$=a_0q^{2m}-a_0qz^2+a_1q^{2m}q^2z^2-a_1q^3z^4+a_1q^{2m}q^{-2}z^{-2}-a_1q^{-1}+a_2q^{2m}q^4z^4-a_2q^5z^6$$

$$+a_2q^{2m}q^{-4}z^{-4}-a_2q^{-3}z^{-2}+a_3q^{2m}q^6z^6-a_3q^7z^8+a_3q^{2m}q^{-6}z^{-6}-a_3q^{-5}z^{-4}\bullet\bullet\bullet$$

$$=\bullet\bullet\bullet+a_3q^{2m}q^{-6}z^{-6}+a_2q^{2m}q^{-4}z^{-4}-a_3q^{-5}z^{-4}+a_1q^{2m}q^{-2}z^{-2}-a_2q^{-3}z^{-2}+a_0q^{2m}-a_1q^{-1}$$

$$+a_1q^{2m}q^2z^2-a_0qz^2+a_2q^{2m}q^4z^4-a_1q^3z^4+a_3q^{2m}q^6z^6-a_2q^5z^6-a_3q^7z^8\bullet\bullet\bullet$$

$$=\bullet\bullet\bullet+a_3q^{2m}q^{-6}z^{-6}+(a_2q^{2m-4}-a_3q^{-5})z^{-4}+(a_1q^{2m-2}-a_2q^{-3})z^{-2}+(a_0q^{2m+0}-a_1q^{-1})z^0$$

$$+(a_1q^{2m+2}-a_0q)z^2+(a_2q^{2m+4}-a_1q^3)z^4+(a_3q^{2m+6}-a_2q^5)z^6-a_3q^7z^8\bullet\bullet\bullet$$

になります。但し上式では本章８ページの仮定により、z の０乗及び負べきの項の係数で本来 a_{-n} と表されるはずの所が a_n と表されています。一方①式右辺は、

$$(1-q^{2m+1}z^2)f(z)=(1-q^{2m+1}z^2)(a_0+a_1z^2+a_1z^{-2}+a_2z^4+a_2z^{-4}+a_3z^6+a_3z^{-6}\bullet\bullet\bullet)$$

$$=a_0(1-q^{2m+1}z^2)+a_1z^2(1-q^{2m+1}z^2)+a_1z^{-2}(1-q^{2m+1}z^2)+a_2z^4(1-q^{2m+1}z^2)+a_2z^{-4}(1-q^{2m+1}z^2)$$

$$+a_3z^6(1-q^{2m+1}z^2)+a_3z^{-6}(1-q^{2m+1}z^2)\bullet\bullet\bullet$$

$$=a_0-a_0q^{2m+1}z^2+a_1z^2-a_1q^{2m+1}z^4+a_1z^{-2}-a_1q^{2m+1}+a_2z^4-a_2q^{2m+1}z^6+a_2z^{-4}-a_2q^{2m+1}z^{-2}$$

$$+a_3z^6-a_3q^{2m+1}z^8+a_3z^{-6}-a_3q^{2m+1}z^{-4}\bullet\bullet\bullet$$

$$=\bullet\bullet\bullet+a_3z^{-6}+a_2z^{-4}-a_3q^{2m+1}z^{-4}+a_1z^{-2}-a_2q^{2m+1}z^{-2}+a_0-a_1q^{2m+1}$$

$$+a_1z^2-a_0q^{2m+1}z^2+a_2z^4-a_1q^{2m+1}z^4+a_3z^6-a_2q^{2m+1}z^6-a_3q^{2m+1}z^8\bullet\bullet\bullet$$

$$=\bullet\bullet\bullet+a_3z^{-6}+(a_2-a_3q^{2m+1})z^{-4}+(a_1-a_2q^{2m+1})z^{-2}+(a_0-a_1q^{2m+1})z^0+(a_1-a_0q^{2m+1})z^2$$

$$+(a_2-a_1q^{2m+1})z^4+(a_3-a_2q^{2m+1})z^6-a_3q^{2m+1}z^8\bullet\bullet\bullet$$

となります。上式でも本章８ページの仮定により、z の０乗及び負べきの項の係数で本来 a_{-n} と表されるはずの所が a_n と表されています。

両辺の z^{2n} の係数を比較しますと、

$$a_nq^{2m+2n}-a_{n-1}q^{2n-1}=a_n-a_{n-1}q^{2m+1}$$

が成り立っています。z の０乗及び負べきの項では n がーn だと考えて下さい。移項し変形しますと、

$$a_{n-1}q^{2m+1}-a_{n-1}q^{2n-1}=a_n-a_nq^{2m+2n}$$

$$a_{n-1}(q^{2m+1}-q^{2n-1})=(1-q^{2m+2n})a_n$$

$$a_{n-1}=\frac{1-q^{2m+2n}}{q^{2m+1}-q^{2n-1}}\bullet a_n$$

$$a_{n-1} = -\frac{1-q^{2m+2n}}{q^{2n-1}(1-q^{2m-2n+2})} \bullet a_n \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

になります。n の絶対値が 1 つ大きい a で、n の絶対値が 1 つ小さい a を表すことが出来ます。

最後の項の係数は、本章 9 ページで既に分っており、

$$a_m = (-1)^m q^{m^2}$$

でした。ここから出発し、ひとつ戻った項の係数 a_{m-1} を求めます。既に値の分っている係数 a_m の n は m ですから、②の式に代入し、

$$a_{m-1} = -\frac{1-q^{2m+2m}}{q^{2m-1}(1-q^{2m-2m+2})} \bullet (-1)^m q^{m^2}$$

$$= -(-1)^m \bullet \frac{1-q^{4m}}{1-q^2} \bullet \frac{q^{m^2}}{q^{2m-1}}$$

$$= -(-1)^m \bullet \frac{1-q^{4m}}{1-q^2} \bullet q^{m^2-2m+1}$$

$$= -(-1)^m \bullet \frac{1-q^{4m}}{1-q^2} \bullet q^{(m-1)^2}$$

となります。式の先頭にマイナスが付き、$(-1)^m$ の符号が反転しますから、$-(-1)^m = (-1)^{m-1}$ としても同じです。これで(−1)の指数が a の添え字と一致し、

$$= (-1)^{m-1} \bullet \frac{1-q^{4m}}{1-q^2} \bullet q^{(m-1)^2}$$

となりました。さらに、ひとつ戻った項の係数 a_{m-2} を求めます。既に値の分っている係数 a_{m-1} の n は m−1 ですから、②の式に代入し、

$$a_{m-2} = -\frac{1-q^{2m+2(m-1)}}{q^{2(m-1)-1}\{1-q^{2m-2(m-1)+2}\}} \bullet (-1)^{m-1} \bullet \frac{1-q^{4m}}{1-q^2} \bullet q^{(m-1)^2}$$

$$= -(-1)^{m-1} \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})}{(1-q^2)(1-q^4)} \bullet \frac{q^{(m-1)^2}}{q^{2m-3}}$$

$$=(-1)^{m-2}\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})}{(1-q^2)(1-q^4)}\bullet q^{m^2-4m+4}$$

$$=(-1)^{m-2}\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})}{(1-q^2)(1-q^4)}\bullet q^{(m-2)^2}$$

です。さらに、ひとつ戻った項の係数a_{m-3}を求めます。既に値の分っている係数a_{m-2}の n は

m－2 ですから、②の式に代入し、

$$a_{m-3}=-\frac{1-q^{2m+2(m-2)}}{q^{2(m-2)-1}\{1-q^{2m-2(m-2)+2}\}}\bullet(-1)^{m-2}\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})}{(1-q^2)(1-q^4)}\bullet q^{(m-2)^2}$$

$$=-(-1)^{m-2}\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\bullet\frac{q^{(m-2)^2}}{q^{2m-5}}$$

$$=(-1)^{m-3}\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\bullet q^{m^2-6m+9}$$

$$=(-1)^{m-3}\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\bullet q^{(m-3)^2}$$

です。途中を省略し、係数 a_2 を求めますと、既に値の分っている係数 a_3 の n は 3 ですから、②の式に代入し、

$$a_2=-\frac{1-q^{2m+6}}{q^5(1-q^{2m-4})}\bullet(-1)^3\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet}\bullet q^{3^2}$$

$$=-(-1)^3\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})}\bullet\frac{q^9}{q^5}$$

$$=(-1)^2\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})}\bullet q^{9-5}$$

$$=(-1)^2\bullet\frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})}\bullet q^4$$

です。さらに、係数 a_1 を求めますと、既に値の分っている係数 a_2 の n は 2 ですから、②の式に代入し、

$$a_1 = -\frac{1-q^{2m+4}}{q^3(1-q^{2m-2})} \bullet (-1)^2 \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})} \bullet q^{2^2}$$

$$= -(-1)^2 \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})(1-q^{2m+4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})} \bullet \frac{q^4}{q^3}$$

$$= (-1) \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})(1-q^{2m+4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})} \bullet q^{4-3}$$

$$= (-1) \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})(1-q^{2m+4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})} \bullet q$$

です。最後に、係数 a_0 を求めますと、既に値の分っている係数 a_1 の n は 1 ですから、②の式に代入し、

$$a_0 = -\frac{1-q^{2m+2}}{q^1(1-q^{2m})} \bullet (-1)^1 \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})(1-q^{2m+4})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})} \bullet q^{1^2}$$

$$= -(-1)^1 \bullet \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+2})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})(1-q^{2m})} \bullet \frac{q}{q}$$

$$= \frac{(1-q^{4m})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m-4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m+6})(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+2})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})(1-q^{2m})}$$

となります。分子を並べ替えますと、

$$a_0 = \frac{(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})\bullet\bullet\bullet(1-q^{4m-4})(1-q^{4m-2})(1-q^{4m})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-4})(1-q^{2m-2})(1-q^{2m})}$$

になります。つまり a_0 の分母は $(1-q^2)$ から $(1-q^{2m})$ までの積、分子は $(1-q^{2m+2})$ から $(1-q^{4m})$ までの積です。

分子の並べ替えを行った上式から分ることは、任意の係数 a_n を求める場合、分母は積の終わる q の指数、分子は積の始まる q の指数が決まっていることです。

分母の場合、a_0 を求める場合の q の指数は 2m まで、a_1 を求める場合は 2m−2 まで、a_2 を

求める場合は 2m−4 までです。n により積の終わりの q の指数が決まっていて、2m−2n まで計算すれば良いです。

分子の場合、a_0 を求める場合の q の指数は 2m+2 から、a_1 を求める場合は 2m+4 から、a_2 を求める場合は 2m+6 からです。n により積の始まりの q の指数が決まっていて、2m+2n+2 から計算すれば良いです。

a_0 の式では消えてしまっていますが、a_1 より上の式の最後にある q の指数は、求める a_n の添え字 n の 2 乗です。求める a_n の一つ上の $q^{(n+1)^2}$ を $q^{2(n+1)-1}$ で割るからです。指数で考えますと、$(n+1)^2-\{2(n+1)-1\}=n^2+2n+1-2n-2+1=n^2$ となるからです。したがって、a_n を求める一般式は、

$$a_n=(-1)^n\bullet\frac{(1-q^{2m+2n+2})(1-q^{2m+2n+4})\bullet\bullet\bullet(1-q^{4m})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{2m-2n})}\bullet q^{n^2}$$

になります。ここで m を、本来の無限に戻します。m に比べ n は、はるかに小者ですから、

$$a_n=(-1)^n\bullet\frac{(1-q^{\infty})(1-q^{\infty})\bullet\bullet\bullet(1-q^{\infty})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\bullet\bullet\bullet(1-q^{\infty})}\bullet q^{n^2}$$

$$=(-1)^n\bullet\frac{q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\text{③}$$

となります。③式分子の $(-1)^n$ および q^{n^2} の n は、求める a_n の添え字の n です。③式分母の n は無限積の n です。ご注意下さい。$q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ですので、$q^n=e^{-n\pi\frac{K'}{K}}$ です。目次にある完全楕円積分表をご覧頂ければ、$\dfrac{K'}{K}$ が正であることが分ります。$\dfrac{K'}{K}$ が正の場合、n が正で大きくなった時、$e^{-n\pi\frac{K'}{K}}$ は限りなく 0 に近づいて行きます。q^{∞} は限りなく 0 に近い数です。また、③式分母の q^{2n} は、n が正で大きくなった時 0 に近づいて行く数です。この結果を無限級数表示、

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z^{2n}+z^{-2n})$$

に代入しますと、

$$f(z)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}(z^{2n}+z^{-2n})$$

になります。a_0 の所には、③式分子に a_0 の添え字の 0 を代入した物を入れました。上式は、

$$=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})\}$$

になり、これでフーリエ無限積をフーリエ無限級数に直すことが出来ました。

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})\}$$

です。または、両辺に $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$ をかけて、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

となります。

3、テータ 0 の定義

上式で表される関数を v の関数とした時、$\vartheta_0(v)$で表します。ϑ_0 はテータゼロと読み、数学者ヤコビが定義しました。

$$\vartheta_0(v)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

$$Q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \qquad z=e^{j\pi v} \quad v=\frac{u}{2K} \qquad \text{つまり}\, z=e^{j\frac{\pi u}{2K}}$$

$$q=e^{j\pi\tau} \quad \tau=\frac{jK'}{K} \qquad \text{つまり}\, q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

この関数は、m と n を全ての整数（0 および±自然数）として、$u=2mK+j(2n+1)K'$ に

零点を持ちます。定数項を積表示の方に付け級数表示の方を簡単にしています。

次に u の値を変えた時、ϑ_0 がどのように変わるかを級数式で調べます。

u＋K に対する v の値は、$\dfrac{u+K}{2K}=\dfrac{u}{2K}+\dfrac{1}{2}=v+\dfrac{1}{2}$ です。$z=e^{j\pi v}$ に代入しますと、

$e^{j\pi(v+\frac{1}{2})}=e^{j\pi v+\frac{j\pi}{2}}=e^{j\pi v}\bullet e^{\frac{j\pi}{2}}=z(\cos\dfrac{\pi}{2}+j\sin\dfrac{\pi}{2})=jz$ になります。ϑ_0 に代入しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(jz)^{2n}+(jz)^{-2n}\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(j^{2n}z^{2n}+j^{-2n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(j^2)^n z^{2n}+(j^{-2})^n z^{-2n}\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(-1)^n z^{2n}+(\frac{1}{-1})^n z^{-2n}\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(-1)^n z^{2n}+(-1)^n z^{-2n}\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(-1)^n(z^{2n}+z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})=1+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^2\}^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}1^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

になります。

この関数は、m と n を全ての整数（0 および±自然数）として、u＋K が $2mK+j(2n+1)K'$ の時、零になります。u だけで考えれば $2mK-K+j(2n+1)K'=(2m-1)K+j(2n+1)K'$ の時、零になります。m、n が全ての整数ですので、$(2m+1)K+j(2n+1)K'$ でも同じです。

次に u＋jK'に対する v の値は、$\dfrac{u+jK'}{2K}=\dfrac{u}{2K}+j\dfrac{K'}{2K}=v+\dfrac{\tau}{2}$ です。$z=e^{j\pi v}$ に代入しますと、$e^{j\pi(v+\frac{\tau}{2})}=e^{j\pi v+\frac{j\pi\tau}{2}}=e^{j\pi v}\bullet e^{\frac{j\pi\tau}{2}}=q^{\frac{1}{2}}z$ になります。$e^{j\pi\tau}=q$ です。ϑ_0 に代入しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{\tau}{2})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(q^{\frac{1}{2}}z)^{2n}+(q^{\frac{1}{2}}z)^{-2n}\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(q^n z^{2n}+q^{-n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^n z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^{-n}z^{-2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-n}z^{-2n}$$

です。q の指数について平方完成しますと、

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n}$$

です。上式第 2 項の n に 0 を代入しますと第 2 項は 1 になり、第 1 項が省略出来、

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n}$$

です。上式第 2 項の n も 0 からにする為に適宜変形し、

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2(n+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1) q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{-\frac{1}{4}}z^{-2n-2}$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n}-q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-2n-2}$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\frac{1}{z}z^{2n}z-q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\frac{1}{z}z^{-2n-2}z$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-1}z^{2n+1}-q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-1}z^{-2n-2+1}$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n+1}-q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-2n-1}$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}(z^{2n+1}-z^{-2n-1})$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1}-z^{-(2n+1)}\}$$

となります。

この関数は、m と n を全ての整数（0 および±自然数）として、u＋jK が $2mK+j(2n+1)K'$ の時、零になります。u 単体で考えれば、$2mK+j(2n+1)K'-jK'=2mK+j2nK'$ で零点を持ちます。

u＋K＋jK'に対する v の値は、$\dfrac{u+K+jK'}{2K}=\dfrac{u}{2K}+\dfrac{1}{2}+j\dfrac{K'}{2K}=v+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\tau}{2}$ です。$z=e^{j\pi v}$ に代入しますと、$e^{j\pi(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})}=e^{j\pi v}\bullet e^{\frac{j\pi}{2}}\bullet e^{\frac{j\pi\tau}{2}}=e^{j\pi v}\bullet(\cos\dfrac{\pi}{2}+j\sin\dfrac{\pi}{2})\bullet e^{\frac{j\pi\tau}{2}}=jq^{\frac{1}{2}}z$ になります。$e^{j\pi\tau}=q$ です。ϑ_0 に代入しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(jq^{\frac{1}{2}}z)^{2n}+(jq^{\frac{1}{2}}z)^{-2n}\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(-1)^n q^n z^{2n}+(\frac{1}{-1})^n q^{-n}z^{-2n}\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(-1)^n q^n z^{2n}+(-1)^n q^{-n}z^{-2n}\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(-1)^n(q^n z^{2n}+q^{-n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} q^{n^2}(q^n z^{2n}+q^{-n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^2\}^n q^{n^2}(q^n z^{2n}+q^{-n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(q^n z^{2n}+q^{-n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}q^n z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}q^{-n}z^{-2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2+n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2-n}z^{-2n}$$

です。q の指数について平方完成しますと、

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n}$$

です。上式第 2 項の n に 0 を代入しますと第 2 項は 1 になり、第 1 項の 1 が省略出来、

$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n}$$

になります。上式第 2 項も n＝0 からに直しますと、

$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2}$$

です。z の指数について直す為に$\dfrac{z}{z}$をかけますと、

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} z + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} z$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} + z^{-2n-1})$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}$$

になりました。

この関数は､m と n を全ての整数（0 および±自然数）として､u＋K＋jK'が $2mK + j(2n+1)K'$ の時、零になります。u 単体で考えれば、$2mK - K + j(2n+1)K' - jK' = (2m-1)K + j2nK'$ で零点を持ちます。m、n が全ての整数なので、$(2m+1)K + j2nK'$ でも良いです。

4、他のテータ関数の定義

ヤコビは、新しく関数$\vartheta_1(v)$、$\vartheta_2(v)$、$\vartheta_3(v)$を、

$$\vartheta_1(v) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} \quad ・・・④$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}$$

$$\vartheta_3(v)=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

と定義しました。先程行った、ϑ_0に対し各種変数を代入した場合と比較しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2})=\vartheta_3(v)\ \cdot\cdot\cdot⑤$$

$$\vartheta_0(v+\frac{\tau}{2})=j\lambda\vartheta_1(v)\ \cdot\cdot\cdot⑥$$

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})=\lambda\vartheta_2(v)\ \cdot\cdot\cdot⑦$$

が成り立ちます。但し$\lambda=q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}=(e^{j\pi\tau})^{-\frac{1}{4}}(e^{j\pi v})^{-1}=e^{-\frac{j\pi\tau}{4}}e^{-j\pi v}=e^{-j\pi v-\frac{j\pi\tau}{4}}=e^{-j\pi(v+\frac{\tau}{4})}$

です。また、

$$z^n+z^{-n}=(e^{j\pi v})^n+(e^{j\pi v})^{-n}=e^{jn\pi v}+e^{-jn\pi v}=2\cos n\pi v$$
$$z^n-z^{-n}=(e^{j\pi v})^n-(e^{j\pi v})^{-n}=e^{jn\pi v}-e^{-jn\pi v}=j2\sin n\pi v$$

ですので、

$$\vartheta_0(v)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v\ \cdot\cdot\cdot⑧$$

$$\vartheta_1(v)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi v\ \cdot\cdot\cdot⑨$$

$$\vartheta_2(v)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\pi v\ \cdot\cdot\cdot⑩$$

$$\vartheta_3(v)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi v\ \cdot\cdot\cdot⑪$$

となります。

この式の右辺は、これらの関数のフーリエ級数展開で、K、K′が実数ならば u が実数の時、関数値も実数となります。このことが、ϑ_1の定義式④で乗数－j が付いている理由です。

前節で示しました様に、ϑ_0の零点は m と n を全ての整数（0 および±自然数）として、2mK＋(2n＋1)jK′ですから、⑤、⑥、⑦から他の関数の零点が分かります。また、他の関数についても⑤、⑥、⑦と同様の関係を求めることが出来ます。

これらを下表に示します。表 1 は、左端の関数の上端の変数値に対する値が、表の中の関数の v に対する値に等しいことを示します。表 1 の値の算法は「テータ関数表の算出詳細」の章をご参照下さい。表 2 は零点の変数を、u の値として提示しました。

表１

変数＼関数	$-v$	$v+\frac{1}{2}$	$v+1$	$v+2$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\tau$	$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$v+1+\tau$
ϑ_0	ϑ_0	ϑ_3	ϑ_0	ϑ_0	$j\lambda\vartheta_1$	$-\mu\vartheta_0$	$\lambda\vartheta_2$	$-\mu\vartheta_0$
ϑ_1	$-\vartheta_1$	ϑ_2	$-\vartheta_1$	ϑ_1	$j\lambda\vartheta_0$	$-\mu\vartheta_1$	$\lambda\vartheta_3$	$\mu\vartheta_1$
ϑ_2	ϑ_2	$-\vartheta_1$	$-\vartheta_2$	ϑ_2	$\lambda\vartheta_3$	$\mu\vartheta_2$	$-j\lambda\vartheta_0$	$-\mu\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_3	ϑ_0	ϑ_3	ϑ_3	$\lambda\vartheta_2$	$\mu\vartheta_3$	$j\lambda\vartheta_1$	$\mu\vartheta_3$

表中の$\lambda = q^{-\frac{1}{4}}z^{-1} = (e^{j\pi\tau})^{-\frac{1}{4}}(e^{j\pi v})^{-1} = e^{-\frac{j\pi\tau}{4}}e^{-j\pi v} = e^{-j\pi v-\frac{j\pi\tau}{4}} = e^{-j\pi(v+\frac{\tau}{4})}$

$$\mu = q^{-1}z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1}(e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau}e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v-j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v+\tau)}$$

表２

	零点(m、n は整数)
ϑ_0	2mK＋j(2n＋1)K’
ϑ_1	2mK＋j2nK’
ϑ_2	(2m＋1)K＋j2nK’
ϑ_3	(2m＋1)K＋j(2n＋1)K’

次に、$\vartheta_0(v)$、$\vartheta_1(v)$、$\vartheta_2(v)$、$\vartheta_3(v)$の積表示を求めます。既に$\vartheta_0(v)$ の積表示は分っており、

$$\vartheta_0(v) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

$$= Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}) \qquad Q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

です。級数表示で行ったことと同じ手順を踏み、積表示を求めます。

u＋jK’に対する v の値は、

$$\frac{u+jK'}{2K} = \frac{u}{2K}+j\frac{K'}{2K} = v+\frac{\tau}{2}$$

です。$z = e^{j\pi v}$ に代入しまと、$e^{j\pi(v+\frac{\tau}{2})} = e^{j\pi v+\frac{j\pi\tau}{2}} = e^{j\pi v}\bullet e^{\frac{j\pi\tau}{2}} = q^{\frac{1}{2}}z$になります。

$e^{j\pi\tau} = q$です。ϑ_0に代入しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{\tau}{2}) = Q_0\prod_{n=1}^{\infty}\{1-q^{2n-1}(q^{\frac{1}{2}}z)^2\}\{1-q^{2n-1}(q^{\frac{1}{2}}z)^{-2}\}$$

$$= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1} q z^2)(1-q^{2n-1} q^{-1} z^{-2})$$

$$= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n-2} z^{-2})$$

です。q の指数を 2n で統一する為に、q の指数が 0 になる項のみを無限積の前に出し、

$$= Q_0(1-q^0 z^{-2}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n} z^{-2})$$

$$= (1-z^{-2}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n} z^{-2})$$

となります。

ここで出て来る答えは、級数表示での計算で行いました様に、$\vartheta_0(v+\frac{\tau}{2}) = j\lambda\vartheta_1(v)$ ですから、$\vartheta_1(v)$のみを求めるには、j λ で割る必要があります。

$$\vartheta_1(v) = \frac{1}{j\lambda}(1-z^{-2}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n} z^{-2})$$

$$= -j\frac{1}{q^{-\frac{1}{4}} z^{-1}}(1-z^{-2}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n} z^{-2})$$

$$= -jq^{\frac{1}{4}} z(1-z^{-2}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n} z^{-2})$$

$$= -jq^{\frac{1}{4}} (z-z^{-1}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n} z^2)(1-q^{2n} z^{-2})$$

です。$z - z^{-1} = e^{j\pi v} - e^{-j\pi v} = j\,2\sin\pi v$ 、$z^2 + z^{-2} = e^{j2\pi v} + e^{-j2\pi v} = 2\cos 2\pi v$ ですので、

$$= 2q^{\frac{1}{4}} (\sin\pi v) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n})$$

です。

u＋K＋jK'に対する v の値は、

$$\frac{u+K+jK'}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{1}{2} + j\frac{K'}{2K} = v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

です。$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、

$e^{j\pi(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})} = e^{j\pi v} \bullet e^{\frac{j\pi}{2}} \bullet e^{\frac{j\pi\tau}{2}} = e^{j\pi v} \bullet (\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) \bullet e^{\frac{j\pi\tau}{2}} = jq^{\frac{1}{2}}z$になります。

$e^{j\pi\tau} = q$です。ϑ_0に代入しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}) = Q_0\prod_{n=1}^{\infty}\{1-q^{2n-1}(jq^{\frac{1}{2}}z)^2\}\{1-q^{2n-1}(jq^{\frac{1}{2}}z)^{-2}\}$$

$$= Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}qz^2)(1+q^{2n-1}q^{-1}z^{-2})$$

$$= Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n-2}z^{-2})$$

です。q の指数を 2n にする為に、q の指数が 0 になる項のみを無限積の前に出し、

$$= Q_0(1+q^0z^{-2})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$= (1+z^{-2})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

です。ここで出て来る答えは、級数表示での計算で行ったように$\vartheta_0(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}) = \lambda\vartheta_2(v)$ですから、$\vartheta_2(v)$のみを求めるには、$\lambda$で割ってやる必要があり、

$$\vartheta_2(v) = \frac{1}{\lambda}(1+z^{-2})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$= \frac{1}{q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}}(1+z^{-2})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$= q^{\frac{1}{4}}z(1+z^{-2})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$= q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

です。$z+z^{-1} = e^{j\pi v} + e^{-j\pi v} = 2\cos\pi v$、$z^2+z^{-2} = e^{j2\pi v} + e^{-j2\pi v} = 2\cos 2\pi v$ですので、

$$= 2q^{\frac{1}{4}}(\cos\pi v)Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n})$$

です。

u＋K に対する v の値は、

$$\frac{u+K}{2K}=\frac{u}{2K}+\frac{1}{2}=v+\frac{1}{2}$$

です。$z=e^{j\pi v}$ に代入しますと、$e^{j\pi(v+\frac{1}{2})}=e^{j\pi v+\frac{j\pi}{2}}=e^{j\pi v}\bullet e^{\frac{j\pi}{2}}=z(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2})=jz$

になります。ϑ_0 に代入しますと、

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2})=\vartheta_3(v)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}\{1-q^{2n-1}(jz)^2\}\{1-q^{2n-1}(jz)^{-2}\}$$

$$=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

です。$z^2+z^{-2}=e^{j2\pi v}+e^{-j2\pi v}=2\cos 2\pi v$ ですので、

$$=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2})$$

です。

積表示の計算が出来ました。$\vartheta_0(v)$、$\vartheta_1(v)$、$\vartheta_2(v)$、$\vartheta_3(v)$の積表示をまとめておきますと、

$$\vartheta_0(v)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

$$=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2})$$

$$\vartheta_1(v)=-jq^{\frac{1}{4}}(z-z^{-1})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}(\sin\pi v)Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$\vartheta_2(v)=q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}(\cos\pi v)Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$\vartheta_3(v)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

$$= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

$$但し Q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

です。

5、テータ関数と sn（エスエヌ）関数との関係

これらのテータ関数と sn 関数との関係を調べます。sn 関数の極と零点について、3 ページの図と 24 ページの表 2 とを比較します。$\vartheta_0(v)$は sn u の極を零点に持つ関数であり、$\vartheta_1(v)$は sn u の零点を零点に持つ関数であることが分ります。そこで、

$$\Phi(v) = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

と置きますと、$\Phi(v)$は sn u と同じ零点と極を持つ関数となります。また、表 1 から、

$$\Phi(v+2) = \frac{\vartheta_1(v+2)}{\vartheta_0(v+2)} = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \Phi(v)$$

$$\Phi(v+\tau) = \frac{\vartheta_1(v+\tau)}{\vartheta_0(v+\tau)} = \frac{-\mu\vartheta_1(v)}{-\mu\vartheta_0(v)} = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \Phi(v)$$

ですが、$v + 2 = \frac{u}{2K} + 2 = \frac{u+4K}{2K}$ なので、u＋4K を表します。

また、$v + \tau = \frac{u}{2K} + \frac{jK'}{K} = \frac{u + j2K'}{2K}$ なので、u＋j2K’を表します。

したがって、$\Phi(v)$は実数方向に 4K、虚数方向に j2K’の周期を持つことが分ります。これは、sn u と同じ周期の 2 重周期楕円関数です。適当な定数 C があり、

$$\mathrm{sn}\, u = C\Phi(v) = C\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

となります。C を決定するためには、u＝K つまり $v = \frac{K}{2K} = \frac{1}{2}$ の場合、$\mathrm{sn}\, K = 1$ と分っていますから、

$$C=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\Phi(v)}=\frac{\mathrm{sn}\,K}{\Phi(\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2})}{\vartheta_0(\frac{1}{2})}}=\frac{\vartheta_0(\frac{1}{2})}{\vartheta_1(\frac{1}{2})}$$

となります。表 1 を参照しますと、$\vartheta_0(\frac{1}{2})=\vartheta_0(0+\frac{1}{2})=\vartheta_3(0)$、$\vartheta_1(\frac{1}{2})=\vartheta_1(0+\frac{1}{2})=\vartheta_2(0)$

ですから、

$$C=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$$

となります。つまり、

$$\mathrm{sn}\,u=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}\qquad v=\frac{u}{2K}$$

となります。

次に k（スモールケー）値を求める為に、u＝K＋jK’ ＝0＋K＋jK’での sn 値を求めます。

$\frac{0+K+jK'}{2K}=0+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ です。これを $\mathrm{sn}\,u=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}$ に代入しますと、表 1 により、

$$\mathrm{sn}\,(0+K+jK')=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(0+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(0+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})}=\frac{\vartheta_3(0)\lambda\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)\lambda\vartheta_2(0)}=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_2(0)}=\frac{\{\vartheta_3(0)\}^2}{\{\vartheta_2(0)\}^2}$$

になります。sn の K＋jK’における値は既に、「ヤコビの楕円関数」の章 38 ページ付近、または本章 3 ページの図において、$\frac{1}{k}$ であることが分っています。したがって、

$$\frac{1}{k}=\frac{\{\vartheta_3(0)\}^2}{\{\vartheta_2(0)\}^2}$$

$$k=\frac{\{\vartheta_2(0)\}^2}{\{\vartheta_3(0)\}^2}$$

$$\sqrt{k}=\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}$$

となります。$\mathrm{sn}\,u=\dfrac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}$ の中の $\dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$ は、$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ を表していることが分りました。

次に k'（スモールケーダッシュ）値を求める為に、次のようなことを行います。$\vartheta_0(v)$、$\vartheta_2(v)$、$\vartheta_3(v)$について級数表示を展開しますと、

$$\vartheta_0(v)=1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v\bullet\bullet\bullet$$

$$\vartheta_2(v)=2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v\bullet\bullet\bullet$$

$$\vartheta_3(v)=1+2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v+2q^9\cos 6\pi v\bullet\bullet\bullet$$

です。v＝0 と置きますと、

$$\vartheta_0(0)=1-2q+2q^4-2q^9\bullet\bullet\bullet$$

$$\vartheta_2(0)=2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}\bullet\bullet\bullet$$

$$\vartheta_3(0)=1+2q+2q^4+2q^9\bullet\bullet\bullet$$

です。それぞれの 4 乗を求めますと、

$$\{\vartheta_0(0)\}^4=1-8q+24q^2-32q^3+24q^4-48q^5\bullet\bullet\bullet$$

$$\{\vartheta_2(0)\}^4=\quad 16q\qquad\quad +64q^3\qquad\quad +96q^5\bullet\bullet\bullet$$

$$\{\vartheta_3(0)\}^4=1+8q+24q^2+32q^3+24q^4+48q^5\bullet\bullet\bullet$$

です。上式を良く見ますと、次の式が成り立つことが分ります。

$$\{\vartheta_0(0)\}^4+\{\vartheta_2(0)\}^4=\{\vartheta_3(0)\}^4$$

です。この式の両辺を$\{\vartheta_3(0)\}^4\neq 0$ で割りますと、

$$\frac{\{\vartheta_0(0)\}^4}{\{\vartheta_3(0)\}^4}+\frac{\{\vartheta_2(0)\}^4}{\{\vartheta_3(0)\}^4}=1$$

$$\frac{\{\vartheta_0(0)\}^4}{\{\vartheta_3(0)\}^4}=1-\frac{\{\vartheta_2(0)\}^4}{\{\vartheta_3(0)\}^4}$$

になりますが、先ほど計算しました通り、$\dfrac{\{\vartheta_2(0)\}^2}{\{\vartheta_3(0)\}^2}=k$ ですので、$\dfrac{\{\vartheta_2(0)\}^4}{\{\vartheta_3(0)\}^4}=k^2$ です。「ヤコビの楕円関数」の章で検討しましたが、$1-k^2$ は k'^2 に他なりません。したがって、

$$k'=\frac{\{\vartheta_0(0)\}^2}{\{\vartheta_3(0)\}^2}$$

$$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}$$

であることが分りました。

次に K（ラージケー）値を求める為に、積表示の各テータ関数に、v=0 を代入します。その時の $z=e^{j\pi v}$ は、$e^{j\pi 0}=1$ です。

$$\vartheta_0(0)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\bullet 1^2)(1-q^{2n-1}\bullet 1^{-2})$$

$$=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2$$

$$\vartheta_1(0)=-jq^{\frac{1}{4}}(1-1^{-1})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\bullet 1^2)(1-q^{2n}\bullet 1^{-2})$$

$$=0$$

$$\vartheta_2(0)=q^{\frac{1}{4}}(1+1^{-1})Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}\bullet 1^2)(1+q^{2n}\bullet 1^{-2})$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2$$

$$\vartheta_3(0)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\bullet 1^2)(1+q^{2n-1}\bullet 1^{-2})$$

$$=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2$$

$Q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$ です。新たに $Q_1=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$、$Q_2=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})$、$Q_3=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$ を定義しますと、

$$\vartheta_0(0) = Q_0 Q_3{}^2$$

$$\vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 Q_1{}^2$$

$$\vartheta_3(0) = Q_0 Q_2{}^2$$

になります。下記計算を行いますと、

$$Q_0 Q_1 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})$$

$$Q_2 Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})$$

になります。このとき両式の右辺の q の指数に着目します。n＝1,2,3・・・・∞の時、

(1) 、4n は初項が 4、公差 4 の等差数列です。

(2) 、4n－2 は初項が 2、公差 4 の等差数列です。

(3) 、(1)と(2)の数列を組み合わせれば、初項が 2、公差 2 の等差数列が出来ます。これは偶数を表しています。

4n と 4n－2 を組み合わせますと、偶数をダブり無く表すことになります。したがって、

$$Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})(1-q^{4n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = Q_0$$

となり、両辺を $Q_0 \neq 0$ で割りますと、

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1$$

になります。次に $\vartheta_0(0)$、$\vartheta_2(0)$、$\vartheta_3(0)$をかけ合わせますと、$\vartheta_0(0) = Q_0 Q_3{}^2$、

$\vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 Q_1{}^2$、$\vartheta_3(0) = Q_0 Q_2{}^2$ ですから、

$$\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0) = Q_0 Q_3{}^2 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 Q_1{}^2 Q_0 Q_2{}^2 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0{}^3 Q_1{}^2 Q_2{}^2 Q_3{}^2$$

になります。$Q_1{}^2 Q_2{}^2 Q_3{}^2$ は、$(Q_1 Q_2 Q_3)^2$ ですので 1 です。従って、

$$\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)=2q^{\frac{1}{4}}Q_0{}^3$$

です。

ここまで準備したところで、$\vartheta_1(0)$の微分を求めます。この微分は微分の定義式を使用しますと出来、

$$\vartheta_1'(a)=\lim_{v\to a}\frac{\vartheta_1(v)-\vartheta_1(a)}{v-a}$$

です。$\vartheta_1'(0)$の場合、上式の a が 0 の場合であり、$\vartheta_1(0)=0$、$z=e^{j\pi v}$ ですので、

$$\vartheta_1'(0)=\lim_{v\to 0}\frac{\vartheta_1(v)}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{2q^{\frac{1}{4}}(\sin\pi v)Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})}{v}$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n})\lim_{v\to 0}\frac{\sin\pi v}{v}$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}Q_0{}^3\lim_{v\to 0}\frac{\sin\pi v}{v}$$

$$=2\pi q^{\frac{1}{4}}Q_0{}^3$$

となりました。最後の所でロピタルの定理を使用しました。ロピタルの定理は、

$$\lim_{v\to 0}\frac{\sin\pi v}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{(\sin\pi v)'}{v'}=\lim_{v\to 0}\frac{\pi\cos\pi v}{1}=\pi$$

です。先程の、$\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)=2q^{\frac{1}{4}}Q_0{}^3$ を使用しますと、

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)$$

が成り立ちます。ここにおいて sn u の微分を求めます。合成関数の微分ですので、

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\frac{df(v)}{dv}\bullet\frac{dv}{du}$$

$$=\frac{d\dfrac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}}{dv}\bullet\frac{d\dfrac{u}{2K}}{du}$$

$$=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\bullet\frac{d\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv}\bullet\frac{1}{2K}\bullet\frac{du}{du}$$

$$=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\bullet\frac{\vartheta_1'(v)\vartheta_0(v)-\vartheta_1(v)\vartheta_0'(v)}{\{\vartheta_0(v)\}^2}\bullet\frac{1}{2K}$$

となります。u＝0 での値は、

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}0=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\bullet\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_0(0)-\vartheta_1(0)\vartheta_0'(0)}{\{\vartheta_0(0)\}^2}\bullet\frac{1}{2K}$$

です。$\vartheta_1(0)$は 0 ですから、

$$=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\bullet\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_0(0)}{\{\vartheta_0(0)\}^2}\bullet\frac{1}{2K}$$

となります。先ほどの$\vartheta_1'(0)$の結果を代入しますと、

$$=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\bullet\frac{\pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_0(0)}{\{\vartheta_0(0)\}^2}\bullet\frac{1}{2K}$$

$$=\frac{\pi\{\vartheta_3(0)\}^2}{2K}$$

になります。一方、既に「ヤコビの楕円関数」の章で検討しました通り、x＝sn u ならば、

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

です。x で微分しますと、

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

になります。$\dfrac{dx}{du}$はこの逆数ですから、

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

です。x＝sn u ですから、

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u = \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2\,u)(1-k^2\mathrm{sn}^2\,u)}$$

となります。sn 0＝0 なので、上式に代入しますと、

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,0 = 1$$

になります。先ほどの微分結果と比較しますと、

$$\frac{\pi\{\vartheta_3(0)\}^2}{2K} = 1$$

$$2K = \pi\{\vartheta_3(0)\}^2$$

$$K = \frac{1}{2}\pi\{\vartheta_3(0)\}^2$$

になります。これで K（ラージケー）の値を q から求めることが出来ました。K'（ラージケーダッシュ）値は、$e^{j\pi\tau} = q$、$\tau = \frac{jK'}{K}$、つまり $e^{-\pi\frac{K'}{K}} = q$ から、

$$e^{-\pi\frac{K'}{K}} = q$$

$$-\pi\frac{K'}{K} = \log_e q$$

$$-\pi K' = K\log_e q$$

$$K' = -\frac{K}{\pi}\log_e q$$

$$K' = \frac{K}{\pi}\log_e q^{-1}$$

$$K' = \frac{K}{\pi}\log_e \frac{1}{q}$$

となり、この式に先ほどの K（ラージケー）値を代入すれば求まります。

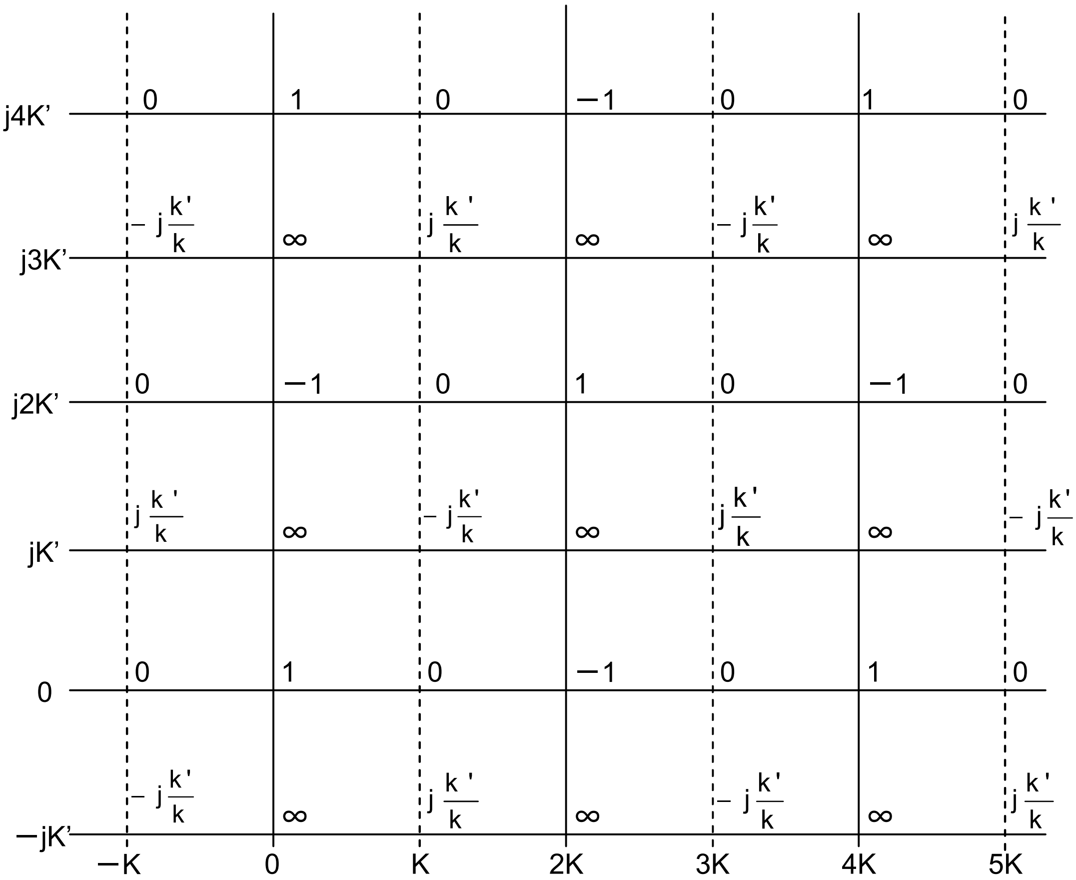
6、テータ関数と cn（シーエヌ）関数との関係

cn 関数の全ての極は、m と n を全ての整数（0 および±自然数）として、$2mK + j(2n+1)K'$ で表されます。

cn 関数の全ての零点は、同じく $(2m+1)K + j2nK'$ で表されます。

cn の基本周期平行四辺形と特定の点における値は下図の通りです。

紙面の都合で、－K～5K、－jK'～j4K'しか描いていませんが、この平行四辺形は上下左右に無限に広がっています。



cn 関数は、実数方向の 4K が周期になっています。また、虚数方向の j4K'も周期になっています。さらに 2K＋j2K'も周期です。

cn 関数の極と零点について、表 2 と比較しますと、$\vartheta_0(v)$は cn u の極を零点に持つ関数であり、$\vartheta_2(v)$は cn u の零点を零点に持つ関数であることが分ります。

そこで、sn 関数の場合と同様に、

$$\Omega(v) = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}$$

と置きますと、Ω(v)は cn u と同じ零点と極を持つ関数となります。また、表 1 から、

$$\Omega(v+2)=\frac{\vartheta_2(v+2)}{\vartheta_0(v+2)}=\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}=\Omega(v)$$

$$\Omega(v+1+\tau)=\frac{\vartheta_2(v+1+\tau)}{\vartheta_0(v+1+\tau)}=\frac{-\mu\vartheta_2(v)}{-\mu\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}=\Omega(v)$$

ですが、$v+2=\dfrac{u}{2K}+2=\dfrac{u+4K}{2K}$ なので u＋4K を表します。

また、$v+1+\tau=\dfrac{u}{2K}+\dfrac{2K}{2K}+\dfrac{jK'}{K}=\dfrac{u+2K+j2K'}{2K}$ なので、u＋2K＋j2K'を表します。

したがって、Ω(v)は実数方向に 4K、実数＋虚数方向に 2K＋j2K'の周期を持つことが分ります。結果として虚数方向に j4K'の周期も持ち、cn u と同じ周期の 2 重周期楕円関数です。適当な定数 C があって、

$$\mathrm{cn}\,u=C\Omega(v)=C\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}$$

となります。C を決定するためには、u＝0、$v=\dfrac{0}{2K}=0$ の場合、cn 0 の値は 1 と分っていますので、

$$C=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\Omega(v)}=\frac{\mathrm{cn}\,0}{\Omega(0)}=\frac{1}{\dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_0(0)}}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}$$

となります。ゆえに、

$$\mathrm{cn}\,u=\frac{\vartheta_0(0)\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}\qquad v=\frac{u}{2K}$$

となります。本章 29 ページの通り、

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$$

$$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}$$

ですので、

$$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\bullet\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}$$

となります。

$$\mathrm{cn}\,u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

と表現しても良いです。

目次へ戻る