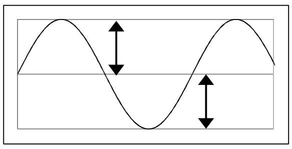
s と Z(s)の関係　　　　　　　　　　　　　　　　2019 年 3 月 22 日　　目次へ戻る

2022.1.11　2022.1.12　2022.1.14　2022.1.20　訂正

s が虚軸を含む複素平面右半面の値の時、X(s)も虚軸を含む複素平面右半面の値でなければなりません。その訳を探ります。本章では、受動回路をインピーダンス Z(s)にしています。リアクタンス回路の駆動点リアクタンス X(s)も Z(s)に含まれます。

1、Z(s)に正弦波電圧を加えた時



「抵抗、コイル、コンデンサーで作られた受動回路の、ラプラスの世界でのインピーダンスを Z(s)とします。そこに、最大値 V_{max} の正弦波電圧、$E = V_{max} \sin \omega t$ を加えた時、定常状態での電流 I をラプラス変換を使って求めて下さい。」

受動回路とは内部に電源を持たない回路のことです。定常状態とは正弦波電圧が加えられてからある程度の時間が経過し、過渡現象が収まった状態のことです。

最大値 V_{max} の正弦波電圧 $E = V_{max} \sin \omega t$ をラプラス変換しますと、

$$L\left\{ V_{max} \sin \omega t \right\} = V_{max} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{V_{max} \cdot \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

になります。L はラプラス変換することを表します。電流 I は電圧 E のラプラス変換を、ラプラスの世界のインピーダンスで割り、

$$I = \frac{V_{max} \cdot \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \div Z(s)$$

$$= \frac{V_{max} \cdot \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega) \cdot Z(s)}$$

となります。

$$= \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{C}{Z(s)}$$

と置き、部分分数分解の留数 A、B、C を求めます。留数の求め方の詳しい説明は「s＝jω とは何か」の章 3 ページ付近にあります。

$$A=\left[(s-j\omega)\bullet\frac{V_{max}\cdot\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)\cdot Z(s)}\right]_{s=j\omega}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot\omega}{(j\omega+j\omega)\cdot Z(j\omega)}=\frac{V_{max}\cdot\omega}{2j\omega\cdot Z(j\omega)}=\frac{V_{max}}{Z(j\omega)}\cdot\frac{1}{2j}$$

$$B=\left[(s+j\omega)\bullet\frac{V_{max}\cdot\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)\cdot Z(s)}\right]_{s=-j\omega}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot\omega}{(-j\omega-j\omega)\cdot Z(-j\omega)}=\frac{V_{max}\cdot\omega}{(-2j\omega)\cdot Z(-j\omega)}=\frac{V_{max}}{Z(-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j}$$

C＝省略

です。具体的な回路が分りませんので C の計算は出来ません。一般的な受動回路では、C の関係する項をラプラス逆変換をしますと、時間 t の増加により指数関数的に減少する過渡項になります。この項による過渡現象が収まり、定常状態に落ち着いた頃、ラプラス逆変換は A と B の関係する項だけのものとなり、

$$I=L^{-1}\left(\frac{\frac{V_{max}}{Z(j\omega)}\cdot\frac{1}{2j}}{s-j\omega}+\frac{\frac{V_{max}}{Z(-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j}}{s+j\omega}\right)$$

$$=\frac{V_{max}}{Z(j\omega)}\cdot\frac{1}{2j}e^{j\omega t}+\frac{V_{max}}{Z(-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j}e^{-j\omega t}$$

$$=\frac{V_{max}}{|Z(j\omega)|e^{j\theta}}\cdot\frac{1}{2j}e^{j\omega t}+\frac{V_{max}}{|Z(j\omega)|e^{-j\theta}}\cdot\frac{1}{-2j}e^{-j\omega t}$$

$$=\frac{V_{max}}{|Z(j\omega)|}\cdot\frac{1}{2j}e^{j\omega t-j\theta}+\frac{V_{max}}{|Z(j\omega)|}\cdot\frac{1}{-2j}e^{-j\omega t+j\theta}$$

$$=I_{max}\cdot\frac{1}{2j}e^{j\omega t-j\theta}+I_{max}\cdot\frac{1}{-2j}e^{-j\omega t+j\theta}$$

$$=I_{max}\cdot\frac{1}{2j}e^{j(\omega t-\theta)}-I_{max}\cdot\frac{1}{2j}e^{-j(\omega t-\theta)}$$

$$=I_{max}\cdot\left(\frac{1}{2j}e^{j(\omega t-\theta)}-\frac{1}{2j}e^{-j(\omega t-\theta)}\right)$$

$$=I_{max}\cdot\frac{e^{j(\omega t-\theta)}-e^{-j(\omega t-\theta)}}{2j}$$

$$= I_{max} \cdot \sin(\omega t - \theta)$$

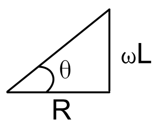
但し、

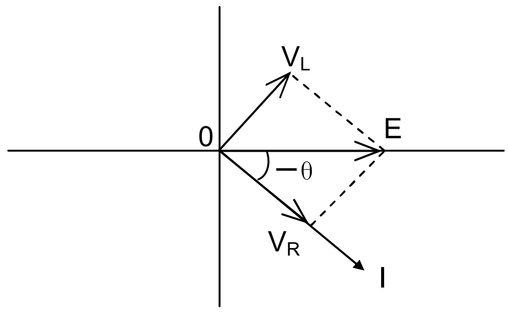
$$I_{max} = \frac{V_{max}}{|Z(j\omega)|} \qquad |Z(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 Z(j\omega) + \mathrm{Im}^2 Z(j\omega)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\, Z(j\omega)}{\mathrm{Re}\, Z(j\omega)} \quad ・・・・①$$

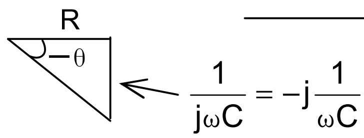
になります。上式中、例えば c＝a＋jb と言う複素数に対して a を実部と言い Re c で表します。b を虚部と呼び Im c で表します。Im c は b のみを指し jb ではありません。a も b も実数です。定常状態で最大値 I_{max} の電流 I が生じます。θ（シータ）はインピーダンス $Z(j\omega)$を極形式で表した時の偏角です。

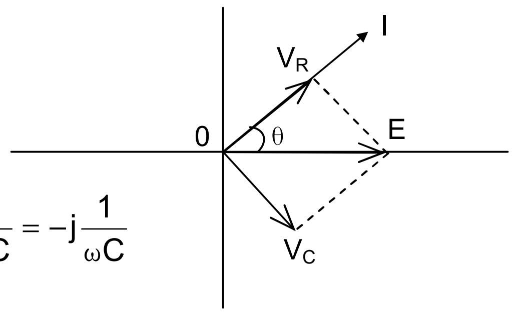
インピーダンスの偏角が誘導性で＋の場合、電流は電圧より遅れ、$I = I_{max}\sin(\omega t - \theta)$ となります。右図参照下さい。





インピーダンスの偏角が容量性で－の場合、電流は電圧より進み、$I = I_{max}\sin(\omega t + \theta)$ となります。右図参照下さい。





インピーダンスが誘導性の時、電力の瞬時値 p は、

$$\begin{aligned} p = E \cdot I &= V_{max}\sin\omega t \cdot I_{max}\sin(\omega t - \theta) \\ &= V_{max} \cdot I_{max}\sin\omega t \sin(\omega t - \theta) \\ &= V_{max} \cdot I_{max}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\sin\theta) \\ &= V_{max} \cdot I_{max}(\sin^2\omega t\cos\theta - \sin\omega t\cos\omega t\sin\theta) \end{aligned}$$

$$= V_{max} \cdot I_{max} \cdot \frac{1}{2}(2\sin^2 \omega t \cos\theta - 2\sin\omega t \cos\omega t \sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot I_{max} \cdot \{ (1 - \cos 2\omega t)\cos\theta - \sin 2\omega t \sin\theta \}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot I_{max} \cdot (\cos\theta - \cos 2\omega t \cos\theta - \sin 2\omega t \sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot I_{max} \cdot \{ \cos\theta - (\cos 2\omega t \cos\theta + \sin 2\omega t \sin\theta) \}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot I_{max} \cdot \{ \cos\theta - \cos(2\omega t - \theta) \}$$

になります。加法定理と、$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$、$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ の公式を使いました。

電力は瞬時値 p で表すより、瞬時電力の 1 周期 t 秒分の平均をとり、平均電力 P で表す方が普通です。P は有効電力、消費電力、単に電力とも呼びます。

角周波数 $\omega = 2\pi f$ で、f は周波数ですから、t は $\frac{1}{f}$ 秒になります。また $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ですから、$t = \frac{2\pi}{\omega}$ になります。

$$P = \frac{1}{t}\int_0^t p\,dt$$ p の 0 から t までの面積を求め、t で割れば平均が出ます。

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot I_{max} \cdot \{ \cos\theta - \cos(2\omega t - \theta) \} dt$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \{ \cos\theta - \cos(2\omega t - \theta) \} dt$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi} \left\{ \cos\theta \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(2\omega t - \theta)\, dt \right\}$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi} \left\{ \cos\theta \cdot \Big[t\Big]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} - \frac{1}{2\omega}\Big[\sin(2\omega t - \theta) \Big]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \right\}$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi} \left[\cos\theta \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega} - 0 \right) - \frac{1}{2\omega} \left\{ \sin(2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} - \theta) - \sin(2\omega \cdot 0 - \theta) \right\} \right]$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi} \left[\cos\theta \cdot \frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega} \{ \sin(4\pi - \theta) - \sin(-\theta) \} \right]$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi}\left[\cos\theta \cdot \frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega}\{\sin(-\theta) - \sin(-\theta)\}\right]$$

$$= \frac{V_{max} \cdot I_{max} \cdot \omega}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos\theta$$

です。1 周期分の平均をとりますと、電圧電流間の位相差が原因で電源と回路の間を 2 倍の角周波数で行き来している無効電力の項は消滅します。

V_{max} も I_{max} も最大値です。正弦波交流の実効値（RMS）は、電圧も電流も最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ですから、

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot V_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_{max} \cdot \cos\theta$$

$$= V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cdot \cos\theta$$

と変形出来ます。平均電力は、「電圧の実効値 V_{RMS} × 電流の実効値 I_{RMS} × 力率 $\cos\theta$」になります。力率はインピーダンス $Z(j\omega)$の偏角 θ（①式）の cos です。

cos は偶関数ですから、誘導性のインピーダンスでも容量性のインピーダンスでも偏角 θ の絶対値が同じなら、力率は同じになります。

受動回路の力率 $\cos\theta$ は、0 から 1 つまり 0%から 100%までです。受動回路は電力を消費しますが、電力を供給しません。ですから力率がマイナスになることはありません。力率がマイナスになりますと、受動回路から電源へ電力を供給していることになり、間違っています。

受動回路のインピーダンス $Z(j\omega)$の偏角 θ は、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となります。

$Z(j\omega)$の偏角 θ が $\frac{\pi}{2}$ で力率 0%になるのは、抵抗成分 $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$が 0 で、リアクタンス成分 $\mathrm{Im}\,Z(j\omega)$が誘導性の場合です。

$Z(j\omega)$の偏角 θ が $-\frac{\pi}{2}$ で力率 0%になるのは、抵抗成分 $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$が 0 でリアクタンス成分 $\mathrm{Im}\,Z(j\omega)$が容量性の場合です。

共に抵抗が無く、リアクタンスだけの回路の場合です。抵抗がある場合の力率は 0%になりません。必ず電力を消費します。$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で、

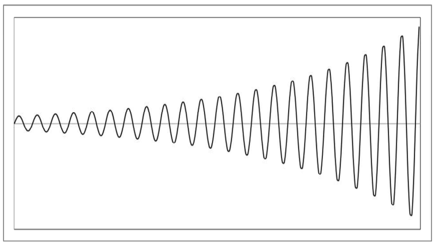
$$\mathrm{Re}\,Z(j\omega) = |Z(j\omega)|\cos\theta \geqq 0$$

になります。Z(s)の s が虚軸上の値 jω の時、Z(jω)の実部は負になりません。R の部分が負にならないと言っています。

2、Z(s)に振幅が拡大する正弦波電流を入れた時

「抵抗、コイル、コンデンサーで作られた受動回路の、ラプラスの世界でのインピーダンスを Z(s)とします。そこに t=0 での最大値（最大値は 1 ページの図参照）が V で、振幅が拡大する正弦波電圧 $E = V \cdot e^{\sigma t}\sin\omega t$ を加えた時、電流 I をラプラス変換を使って求めて下さい。」

σ はシグマと読みます。L( )を括弧内関数のラプラス変換、L^{-1}( )を括弧内関数のラプラス逆変換とします。t=0 での最大値を V として、振幅が拡大する正弦波電圧のラプラス変換は、



$$L\left\{V \cdot e^{\sigma t}\sin\omega t\right\} = \frac{V \cdot \omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{V \cdot \omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$

です。電流 I のラプラス変換は電圧のラプラス変換を、ラプラスの世界のインピーダンスで割り、

$$I = \frac{V \cdot \omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)} \div Z(s)$$

$$= \frac{V \cdot \omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega) \cdot Z(s)}$$

となります。

$$= \frac{A}{s-\sigma-j\omega} + \frac{B}{s-\sigma+j\omega} + \frac{C}{Z(s)}$$

と置き、部分分数分解の留数を求めますと、

$$A = \left[(s-\sigma-j\omega) \bullet \frac{V \cdot \omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega) \cdot Z(s)}\right]_{s=\sigma+j\omega}$$

$$= \frac{V \cdot \omega}{(\sigma+j\omega-\sigma+j\omega) \cdot Z(\sigma+j\omega)} = \frac{V \cdot \omega}{Z(\sigma+j\omega)} \cdot \frac{1}{2j\omega} = \frac{V}{Z(\sigma+j\omega)} \cdot \frac{1}{2j}$$

$$B=\left[(s-\sigma+j\omega)\bullet\frac{V\cdot\omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)\cdot Z(s)}\right]_{s=\sigma-j\omega}$$

$$=\frac{V\cdot\omega}{(\sigma-j\omega-\sigma-j\omega)\cdot Z(\sigma-j\omega)}=\frac{V\cdot\omega}{Z(\sigma-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j\omega}=\frac{V}{Z(\sigma-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j}$$

C＝省略

です。具体的な回路が分りませんので C の計算は不可能です。一般的な受動回路では、C の関係する項をラプラス逆変換しますと、t の増加により指数関数的に減少する過渡項になります。過渡項が落ち着いた頃、ラプラス逆変換は A と B の関係する項だけのものとなります。ラプラス逆変換をしやすくする為、

$$\frac{A}{s-\sigma-j\omega}+\frac{B}{s-\sigma+j\omega}=\frac{A}{s-(\sigma+j\omega)}+\frac{B}{s-(\sigma-j\omega)}$$

と直してからラプラス逆変換をしますと、

$$L^{-1}\left(\frac{\frac{V}{Z(\sigma+j\omega)}\cdot\frac{1}{2j}}{s-(\sigma+j\omega)}+\frac{\frac{V}{Z(\sigma-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j}}{s-(\sigma-j\omega)}\right)$$

$$=\frac{V}{Z(\sigma+j\omega)}\cdot\frac{1}{2j}e^{(\sigma+j\omega)t}+\frac{V}{Z(\sigma-j\omega)}\cdot\frac{1}{-2j}e^{(\sigma-j\omega)t}$$

$$=\frac{V}{|Z(\sigma+j\omega)|e^{j\theta}}\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t+j\omega t}+\frac{V}{|Z(\sigma+j\omega)|e^{-j\theta}}\cdot\frac{1}{-2j}e^{\sigma t-j\omega t}$$

$$=\frac{V}{|Z(\sigma+j\omega)|}\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t+j\omega t-j\theta}+\frac{V}{|Z(\sigma+j\omega)|}\cdot\frac{1}{-2j}e^{\sigma t-j\omega t+j\theta}$$

$$=i\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t+j\omega t-j\theta}+i\cdot\frac{1}{-2j}e^{\sigma t-j\omega t+j\theta}$$

$$=i\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t}e^{j(\omega t-\theta)}-i\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t}e^{-j(\omega t-\theta)}$$

$$=i\cdot e^{\sigma t}\cdot\left(\frac{1}{2j}e^{j(\omega t-\theta)}-\frac{1}{2j}e^{-j(\omega t-\theta)}\right)$$

$$=i\cdot e^{\sigma t}\cdot\frac{e^{j(\omega t-\theta)}-e^{-j(\omega t-\theta)}}{2j}$$

$$= i \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t - \theta)$$

但し、

$$i = \frac{V}{|Z(\sigma + j\omega)|} \qquad |Z(\sigma + j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 Z(\sigma + j\omega) + \mathrm{Im}^2 Z(\sigma + j\omega)}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im}\, Z(\sigma + j\omega)}{\mathrm{Re}\, Z(\sigma + j\omega)}$$

です。i は t=0 での電流の最大値です。（最大値は 1 ページの図参照）ラプラスの世界のインピーダンス Z(s)は、振幅が拡大する正弦波電圧が加わる時、s に σ+jω を代入した Z(σ+jω)になります。

Z(s)に流れる t=0 での電流は、t=0 での電圧の最大値を、複素数 Z(σ+jω)の絶対値で割った値になります。電流の位相は、複素数 Z(σ+jω)の偏角だけ電圧の位相と違います。次に、

$$E = V \cdot e^{\sigma t} \sin \omega t$$

$$I = i \cdot e^{\sigma t} \sin(\omega t - \theta)$$

として過渡項が落ち着いた頃の電力を求めます。V は電圧の t=0 での最大値、i は電流の t=0 での最大値です。σ ＞ 0 としますので振幅が増大して行く正弦波です。θ は電流と電圧の位相差です。位相差は、負荷である受動回路 Z(σ+jω)の偏角で決まります。誘導性負荷と仮定した場合、偏角は＋の値となり、電流は電圧よりも遅れ－位相となります。電力の瞬時値 p は、

$$\begin{aligned}
p = E \cdot I &= V \cdot e^{\sigma t} \sin \omega t \cdot i \cdot e^{\sigma t} \sin(\omega t - \theta) \\
&= V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \sin \omega t \sin(\omega t - \theta) \\
&= V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \theta) \\
&= V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} (\sin^2 \omega t \cos \theta - \sin \omega t \cos \omega t \sin \theta) \\
&= V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \cdot \frac{1}{2} (2 \sin^2 \omega t \cos \theta - 2 \sin \omega t \cos \omega t \sin \theta) \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \cdot \{ (1 - \cos 2\omega t) \cos \theta - \sin 2\omega t \sin \theta \} \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \cdot (\cos \theta - \cos 2\omega t \cos \theta - \sin 2\omega t \sin \theta) \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \cdot \{ \cos \theta - (\cos 2\omega t \cos \theta + \sin 2\omega t \sin \theta) \} \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot i \cdot e^{2\sigma t} \cdot \{ \cos \theta - \cos(2\omega t - \theta) \}
\end{aligned}$$

になります。加法定理と、$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$、$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ の公式を使いました。したがって、

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left\{\cos\theta-\mathrm{Re}\,e^{j(2\omega t-\theta)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left\{\cos\theta-\mathrm{Re}\left(e^{j2\omega t}e^{-j\theta}\right)\right\}$$

となります。Re は複素数の実数部です。

この回路に、E は t＝ー∞から加えられているとします。投入直後の $e^{2\sigma t}$ は極めて小さな値になり、電圧電流共に微小です。投入後の過渡項による過渡現象も小さい筈です。十分に時間を経た t では電圧電流共に大きくなっており、過渡項を無視出来ます。t＝ー∞から t までの回路に流れ込んだ電力量（電気エネルギー）を求めますと、

$$\int_{-\infty}^{t} vIdt=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left\{\cos\theta-\mathrm{Re}\left(e^{j2\omega t}e^{-j\theta}\right)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}\cdot\left\{\cos\theta-\mathrm{Re}\left(e^{j2\omega t}e^{-j\theta}\right)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\int_{-\infty}^{t}\left\{e^{2\sigma t}\cos\theta-e^{2\sigma t}\,\mathrm{Re}\left(e^{j2\omega t}e^{-j\theta}\right)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left\{\int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}\cos\theta dt-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{Re}\left(e^{2\sigma t}e^{j2\omega t}e^{-j\theta}\right)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left[\cos\theta\int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}dt-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{Re}\left\{e^{2(\sigma+j\omega)t}e^{-j\theta}\right\}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left[\cos\theta\int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}dt-\mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\int_{-\infty}^{t} e^{2(\sigma+j\omega)t}dt\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left[\cos\theta\left[\frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma}\right]_{-\infty}^{t}-\mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\left[\frac{e^{2(\sigma+j\omega)t}}{2(\sigma+j\omega)}\right]_{-\infty}^{t}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left[\cos\theta\left(\frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma}-\frac{e^{-2\sigma\infty}}{2\sigma}\right)-\mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\left\{\frac{e^{2(\sigma+j\omega)t}}{2(\sigma+j\omega)}-\frac{e^{-2(\sigma+j\omega)\infty}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left[\cos\theta\cdot\frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\cdot\frac{e^{2\sigma t+j2\omega t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot\left[\cos\theta\cdot\frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\cdot\frac{e^{2\sigma t}e^{j2\omega t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-j\theta}e^{j2\omega t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j(2\omega t-\theta)}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2(\sigma+j\omega)}\cdot e^{j(2\omega t-\theta)}\right\}\right]$$

ここで、

$$\frac{1}{2(\sigma+j\omega)}=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\sigma+j\omega}=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}\cdot e^{j\varphi}}=\frac{e^{-j\varphi}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-j\varphi}}=\frac{e^{-j\varphi}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

です。分子分母に$e^{-j\varphi}$をかけました。$\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}(\sigma+j\omega)}{\mathrm{Re}(\sigma+j\omega)}$なので、（$\varphi$：ファイ）

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-j\varphi}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\cdot e^{j(2\omega t-\theta)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j(2\omega t-\theta-\varphi)}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left\{\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\cos(2\omega t-\theta-\varphi)\right\}$$

となります。中括弧内第 2 項で$\cos(2\omega t-\theta-\varphi)$は変数が実数ですから、＋1 から－1 の値を取ります。中括弧内第 2 項は全体として、$\dfrac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$から$-\dfrac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$までの値を取ります。これは電圧電流間の位相差が原因で、電源と回路の間を倍の角周波数で行き来している無効電力量です。中括弧内第 1 項が回路で消費した電力量の部分になります。受動回路では、回路が消費した電力量は絶対にマイナスになりません。マイナスになりますと、受動回路から電源へ電力を供給していたことになりますので間違っています。したがって、

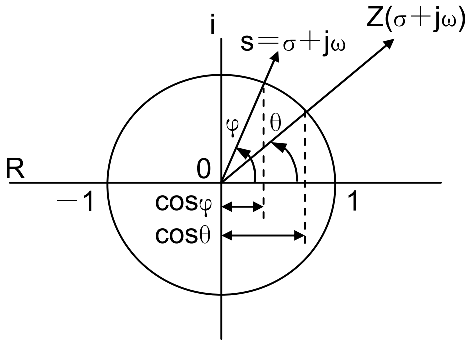
$$\frac{1}{2}\cdot V\cdot i\cdot e^{2\sigma t}\cdot\left\{\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\cos(2\omega t+\theta-\varphi)\right\}\geqq 0$$

となり、中括弧内は 0 またはプラスでなくてはなりません。

$$\frac{\cos\theta}{2\sigma} \geqq \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

であれば、中括弧内が 0 またはプラスになります。振幅が増大する正弦波は、$\sigma>0$ ですから、両辺に 2σ を掛けても不等号の向きは変わらず、

$$\cos\theta \geqq \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$



です。右辺の $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}} = \cos\varphi$ ですから、

$$\cos\theta \geqq \cos\varphi$$

です。$\cos\theta = \cos\varphi$ の時は $\theta=\varphi$ ですが、$\cos\theta > \cos\varphi$ の時は $\theta<\varphi$ ですので御注意下さい。$\theta \leqq \varphi$ となります。

最初に $\sigma>0$ と決めましたので、$s=\sigma+j\omega$ は複素平面の右半面の値です。偏角 φ は、

$-\frac{\pi}{2} > \varphi > \frac{\pi}{2}$ になります。つまり $\cos\varphi > 0$ です。

更に $\cos\theta \geqq \cos\varphi$ ですので、偏角 θ も、$-\frac{\pi}{2} > \theta > \frac{\pi}{2}$ になります。

$s=\sigma+j\omega$ が複素平面右反面なら、受動回路の $Z(\sigma+j\omega)$ も複素平面右半面です。

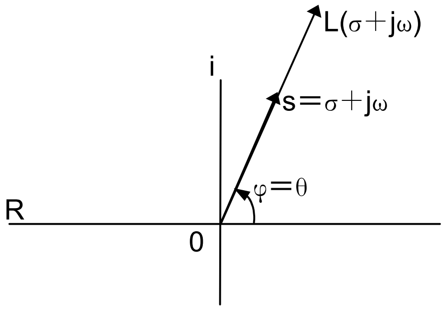
$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で、

$$\mathrm{Re}\,Z(\sigma+j\omega) = |Z(\sigma+j\omega)|\cos\theta > 0$$

になります。Z(s)の複素平面右半面の値、Z(σ+jω)の実部は負になりません。

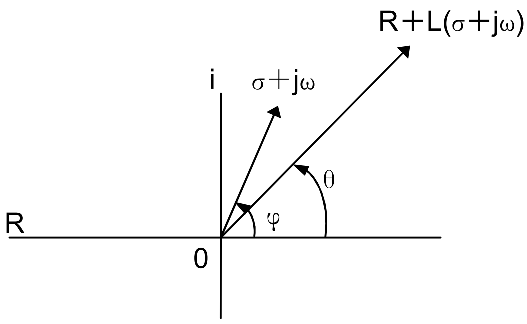
例えば受動回路の Z(s)＝Ls の時、$Z(\sigma+j\omega) = L(\sigma+j\omega) = \sigma L + j\omega L$ ですから、

$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{\sigma L} = \tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$ になります。一方 s＝σ+jω であり $\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$ です。底辺と高さの比が同じですから、φ と θ は同じになります。cos も同じ値になります。



例えば受動回路の Z(s)＝R＋Ls の時、$Z(\sigma+j\omega)=R+L(\sigma+j\omega)=(R+\sigma L)+j\omega L$ ですから、$\theta=\tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R+\sigma L}=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\dfrac{R}{L}+\sigma}$ になります。一方 s＝σ+jω であり $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma}$ です。

分母が大きくなりますので、θ は φ より小さくなります。

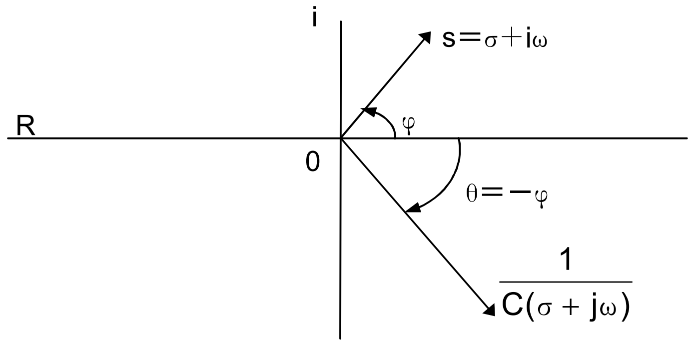


例えば受動回路の Z(s)＝$\dfrac{1}{Cs}$ の時、$Z(\sigma+j\omega)=\dfrac{1}{C(\sigma+j\omega)}=\dfrac{1}{\sigma C+j\omega C}$ ですから、

$$\frac{1}{\sigma C+j\omega C}\cdot\frac{\sigma C-j\omega C}{\sigma C-j\omega C}=\frac{\sigma C-j\omega C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}=\frac{\sigma C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}-j\frac{\omega C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{-\dfrac{\omega C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}}{\dfrac{\sigma C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}}=\tan^{-1}\frac{-\omega C}{\sigma C}=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$$ になります。

一方 s＝σ+jω であり $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma}$ です。θ と φ の絶対値は同じです。下図になります。



例えば受動回路の $Z(s)=R+\frac{1}{Cs}$ の時、$Z(\sigma+j\omega)=R+\frac{1}{C(\sigma+j\omega)}=R+\frac{1}{\sigma C+j\omega C}$ ですから、

$$R+\frac{1}{\sigma C+j\omega C}\cdot\frac{\sigma C-j\omega C}{\sigma C-j\omega C}=R+\frac{\sigma C-j\omega C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}=R+\frac{\sigma C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}-j\frac{\omega C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}$$

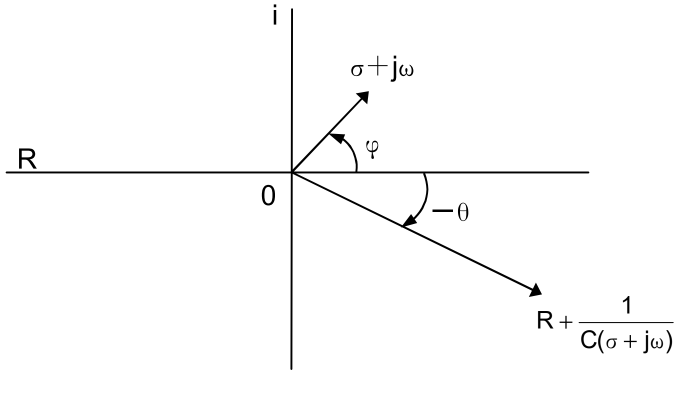
です。

$$\theta=\tan^{-1}\frac{-\frac{\omega C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}}{R+\frac{\sigma C}{(\sigma C)^2+(\omega C)^2}}=\tan^{-1}\frac{-\omega C}{R\{(\sigma C)^2+(\omega C)^2\}+\sigma C}$$

$$=\tan^{-1}\frac{-\omega C}{R(\sigma^2C^2+\omega^2C^2)+\sigma C}=\tan^{-1}\frac{-\omega C}{RC^2(\sigma^2+\omega^2)+\sigma C}$$

$$=\tan^{-1}\frac{-\omega}{RC(\sigma^2+\omega^2)+\sigma}=-\tan^{-1}\frac{\omega}{RC(\sigma^2+\omega^2)+\sigma}$$

になります。一方 s＝σ+jω であり $\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$ です。分母が大きくなりますので、θの絶対値はφより小さくなります。下図になります。



等々です。σ を正の値にしますと複素数 $\sigma+j\omega$ は複素平面の右半面の値です。$\cos\theta \geqq \cos\varphi$ ですから、複素数 $Z(\sigma+j\omega)$も右半面になります。

3、まとめ

1と2の結果から、

$$\mathrm{Re}\ s \geqq 0 \text{ なる範囲で } \mathrm{Re}\ Z(s) \geqq 0$$

であり、s が虚軸を含む複素平面右半面の値の時、Z(s)も虚軸を含む複素平面右半面の値であることが分りました。X(s)も Z(s)に含まれます。

また、複素数の逆数において、

絶対値は元の絶対値の逆数

偏角は逆回転の同一角度

ですので、元のインピーダンス Z(s)が複素平面右半面の値の時、アドミッタンス Y(s)も複素平面右半面の値になります。

目次へ戻る