楕円関数の数値計算の解説　　　　　　　　　　　　　2007 年 8 月 7 日　　目次へ戻る

楕円関数の数値計算について述べます。

楕円関数の数値計算には、テータ関数を使用します。この関数の理論については、「テータ関数の解説」の章で既に説明しました。

## 1、テータ関数の定義

$\vartheta$(テータ)関数の無限乗積表示について再掲します。ここで q は、$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ です。

$$\vartheta_1(v) = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n})\ \cdots ①$$

$$\vartheta_2(v) = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n})\ \cdots ②$$

$$\vartheta_3(v) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})\ \cdots ③$$

$$\vartheta_0(v) = \vartheta_4(v) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})\ \cdots ④$$

これらはすべて周期関数なので、フーリエ級数に展開することが出来、

$$\vartheta_1(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi v\ \cdots ⑤$$

$$\vartheta_2(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\pi v\ \cdots ⑥$$

$$\vartheta_3(v) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi v\ \cdots ⑦$$

$$\vartheta_0(v) = \vartheta_4(v) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v\ \cdots ⑧$$

となります。これらもテータ関数の定義です。

2、楕円関数の各値をテータ関数で表します。

このことも「テータ関数の解説」の章で既に説明しました。

$$\mathrm{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$ です。ただし、$v=\frac{u}{2K}$ です。

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$$ ですので、$\mathrm{sn}(u,k)=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}$ です。

$$\mathrm{cn}\,u=\frac{\vartheta_0(0)\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)}$$ です。ただし、$v=\frac{u}{2K}$ です。

$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$、$k'=\sqrt{1-k^2}$、$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}$ ですので、$\mathrm{cn}\,u=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$ です。

k や k'が分っている場合は、そのまま代入すれば良いです。テータ関数に直す必要はありません。

3、q を求める

楕円関数の計算には、q の級数である$\vartheta$（テータ）関数を使うのが便利です。実際上の応用問題では、q が与えられず k が与えられることが多いので、まず q を計算しなくてはなりません。$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}$ であり、$\vartheta_3(0)$は⑦式において v＝0 と置き、$\vartheta_0(0)$は⑧式において v＝0 と置けば求めることが出来ますので、

$$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+2q^{36}-2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

となります。ここで、次の計算を行います。

$$\begin{aligned}1+\sqrt{k'}&=1+\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+2q^{36}-2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}\\&=\frac{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}}\end{aligned}$$

$$\frac{+1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+2q^{36}-2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{2+4q^4+4q^{16}+4q^{36}+4q^{64}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$1-\sqrt{k'}=1-\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+2q^{36}-2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}}$$

$$\frac{-1+2q-2q^4+2q^9-2q^{16}+2q^{25}-2q^{36}+2q^{49}-2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{4q+4q^9+4q^{25}+4q^{49}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

ですから、

$$\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{4q+4q^9+4q^{25}+4q^{49}\bullet\bullet\bullet}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}\bullet$$

$$\frac{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+2q^{36}+2q^{49}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}{2+4q^4+4q^{16}+4q^{36}+4q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{4q+4q^9+4q^{25}+4q^{49}\bullet\bullet\bullet}{2+4q^4+4q^{16}+4q^{36}+4q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{2q+2q^9+2q^{25}+2q^{49}\bullet\bullet\bullet}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

$$=2\bullet\frac{q+q^9+q^{25}+q^{49}\bullet\bullet\bullet}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

です。両辺を 2 で割りますと、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{q+q^9+q^{25}+q^{49}\bullet\bullet\bullet}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}\bullet\bullet\bullet}$$

になります。右辺の割り算を実際に行いますと、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-32q^{21}+55q^{25}-\bullet\bullet\bullet$$

になります。

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\lambda$$

とおきますと、

$$\lambda=q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-32q^{21}+55q^{25}-\bullet\bullet\bullet$$

になります。今度は、逆に q を λ で表すことを考えます。そのために、λ のベキを計算します。ベキの計算方法はこの章の 5、をご参照下さい。ベキは、

$$\begin{aligned}
\lambda &= q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-32q^{21}+55q^{25}-\bullet\bullet\bullet\\
\lambda^5 &= q^5-10q^9+65q^{13}-330q^{17}+1420q^{21}-5412q^{25}+\bullet\bullet\bullet\\
\lambda^9 &= q^9-18q^{13}+189q^{17}-1482q^{21}+9558q^{25}-\bullet\bullet\bullet\\
\lambda^{13} &= q^{13}-26q^{17}+377q^{21}-3978q^{25}+\bullet\bullet\bullet\\
\lambda^{17} &= q^{17}-34q^{21}+629q^{25}-\bullet\bullet\bullet\\
\lambda^{21} &= q^{21}-42q^{25}+\bullet\bullet\bullet\\
\lambda^{25} &= q^{25}-\bullet\bullet\bullet
\end{aligned}$$

となります。各式の両辺に順次、1、$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$、$a_6$ を乗じますと、

$$\begin{aligned}
\lambda &= q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-32q^{21}+55q^{25}-\bullet\bullet\bullet\\
a_1\lambda^5 &= a_1q^5-10a_1q^9+65a_1q^{13}-330a_1q^{17}+1420a_1q^{21}-5412a_1q^{25}+\bullet\bullet\bullet\\
a_2\lambda^9 &= a_2q^9-18a_2q^{13}+189a_2q^{17}-1482a_2q^{21}+9558a_2q^{25}-\bullet\bullet\bullet\\
a_3\lambda^{13} &= a_3q^{13}-26a_3q^{17}+377a_3q^{21}-3978a_3q^{25}+\bullet\bullet\bullet\\
a_4\lambda^{17} &= a_4q^{17}-34a_4q^{21}+629a_4q^{25}-\bullet\bullet\bullet\\
a_5\lambda^{21} &= a_5q^{21}-42a_5q^{25}+\bullet\bullet\bullet\\
a_6\lambda^{25} &= a_6q^{25}-\bullet\bullet\bullet
\end{aligned}$$

になります。両辺の上から下までの合計を求めますと、

$$\lambda + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^9 + a_3\lambda^{13} + a_4\lambda^{17} + a_5\lambda^{21} + a_6\lambda^{25}$$

$$= q + (-2 + a_1)q^5 + (5 - 10a_1 + a_2)q^9 + (-10 + 65a_1 - 18a_2 + a_3)q^{13}$$

$$+ (18 - 330a_1 + 189a_2 - 26a_3 + a_4)q^{17}$$

$$+ (-32 + 1420a_1 - 1482a_2 + 377a_3 - 34a_4 + a_5)q^{21}$$

$$+ (55 - 5412a_1 + 9558a_2 - 3978a_3 + 629a_4 - 42a_5 + a_5)q^{25}$$

になります。右辺で q の 1 乗の項だけを残すため、$q^5$、$q^9$、$q^{13}$、$q^{17}$、$q^{21}$、$q^{25}$ の係数が 0 になるように、$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$、$a_6$ を順次決定して行きます。つまり、

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = -5 + 10a_1 = -5 + 20 = 15$$
$$a_3 = 10 - 65a_1 + 18a_2 = 10 - 65 \bullet 2 + 18 \bullet 15 = 150$$
$$a_4 = -18 + 330a_1 - 189a_2 + 26a_3 = -18 + 330 \bullet 2 - 189 \bullet 15 + 26 \bullet 150 = 1707$$
$$a_5 = 32 - 1420a_1 + 1482a_2 - 377a_3 + 34a_4$$
$$= 32 - 1420 \bullet 2 + 1482 \bullet 15 - 377 \bullet 150 + 34 \bullet 1707 = 20910$$
$$a_6 = -55 + 5412a_1 - 9558a_2 + 3978a_3 - 629a_4 + 42a_5$$
$$= -55 + 5412 \bullet 2 - 9558 \bullet 15 + 3978 \bullet 150 - 629 \bullet 1707 + 42 \bullet 20910 = 268616$$

が求まります。したがって、

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 20910\lambda^{21} + 268616\lambda^{25} \quad \cdots ⑨$$

となります。この式に $\lambda$ を代入して q を計算します。$\lambda$ は桁落ちを防ぐため、次のように変形してから計算するのが良いとのことです。

$$\lambda = \frac{1}{2} \bullet \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{1}{2} \bullet \frac{(1-\sqrt{k'})(1+\sqrt{k'})}{(1+\sqrt{k'})(1+\sqrt{k'})} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1-k'}{1+2\sqrt{k'}+k'} = \frac{1}{2} \bullet \frac{(1-k')(1+k')}{(1+2\sqrt{k'}+k')(1+k')}$$

$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1-k'^2}{(1+2\sqrt{k'}+k')(1+k')} = \frac{1}{2} \bullet \frac{k^2}{(1+2\sqrt{k'}+k')(1+k')}$$

$k' = \sqrt{1-k^2}$ です。

この λ を⑨式に代入して、q を求めます。q が決まりましたら、

$$\mathrm{sn}(u,k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

$$\mathrm{cn}\,u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} \qquad \text{ただし} \qquad v = \frac{u}{2K}$$

で sn や cn を求めます。連立チェビシェフフィルターの計算の場合、u の中に $\frac{K}{3}, \frac{4K}{3}$ などの様に K が入っているので、K が約分され v が簡単な値になるので好都合です。

フーリエ級数に展開したテータ関数を計算する場合、最初の 3～4 項程度を計算すれば十分です。

4、フィルター次数の求め方

(1)原理

q および $q_1$ を通じて計算を行いますと、仕様に合った連立チェビシェフフィルターの次数を、簡単に求めることが出来ます。

もともとの q は、

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

です。K は、$b^2=k$ を母数とする第一種完全楕円積分値です。K'は、k の副母数 k'を母数とする第一種完全楕円積分値です。k は過渡域の幅を決めます。

もともとの $q_1$ は、

$$q_1 = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$$

です。$K_1$ は、$m^2 = k_1$ を母数とする第一種完全楕円積分値です。$K_1$'は、$k_1$ の副母数 $k_1$'を母数とする第一種完全楕円積分値です。$k_1$ はうねりの幅を決めます。

連立チェビシェフフィルターの、過渡域の幅とうねりの幅の関係式、

$$n \frac{K'}{K} = \frac{K_1'}{K_1}$$

から、

$$e^{-\pi n \frac{K'}{K}} = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$$

が成り立ち、q と $q_1$ の定義から、

$$q^n = q_1$$

になります。両辺を 10 を底とする対数にすれば、

$$\mathrm{Log}_{10} q^n = \mathrm{Log}_{10} q_1$$

$$n\mathrm{Log}_{10} q = \mathrm{Log}_{10} q_1$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}_{10} q_1}{\mathrm{Log}_{10} q}$$

となり、n が出ます。これが、ユーザーが決めた仕様からフィルターの次数を求める式です。
　n は小数で出て来ますが、これを切り上げ、整数にすればフィルターの次数となります。

(2)実際の次数の計算

　ユーザーの要求仕様は、

　①、通過域での許容最大減衰値、$-A_P$ の仕様
　②、阻止域での許容最小減衰値、$-A_S$ の仕様
　③、過渡帯域幅、$b^2 = k$ の仕様

の 3 つありますが、連立チェビシェフフィルターには、$q^n = q_1$ という制約があるため、k と $k_1$ は互いに独立には決められません。要求仕様の 3 つのパラメータは、任意の 2 つを指定すると他の 1 つは向こうから定まってしまいます。つまり、

イ、$-A_P$ と $-A_S$ を指定した場合
　k が自動的に決まってしまう。

ロ、$-A_P$ と k を指定した場合
　k を指定すれば、$k_1 = m^2$ も決まってしまう。m がきまればそれを指定された $-A_P$ にあわせるための H が決まってしまう。すると、$-A_S$ は任意に指定できず $\frac{1}{m}$ と H で決まる値に定まってしまう。

ハ、$-A_S$ と k を指定した場合
　k を指定すれば、$k_1 = m^2$ も決まってしまう。m がきまれば $\frac{1}{m}$ も決まり、それを指定された $-A_S$ にあわせるための H が決まってしまう。すると、$-A_P$ は任意に指定

　　　　できず m と H で決まる値に定まってしまう。

のです。制約下での設計を、「連立チェビシェフフィルター設計ソフトの製作」の章に詳しく説明しました。ご覧下さい。

5、λのベキ計算

λは、

$$\lambda = q - 2q^5 + 5q^9 - 10q^{13} + 18q^{17} - 32q^{21} + 55q^{25} - \bullet\bullet\bullet$$

で表されます。

まず、$\lambda^2$を求めます。下のような表を作り、一番上、一番左のマスにλの項を、ひとつづつ書きます。百マス計算と同様に、縦横の掛け算を行って、答をマスに書きます。

全てのマスが埋まりましたら、同じべきになるマスどうしを加え、係数を計算します。

計算し終わりましたら、昇べきの順に書くことによって$\lambda^2$が求まります。

次に、求まった$\lambda^2$と$\lambda^2$で同じ様にマスの計算を行えば、$\lambda^4$が求まります。さらに、$\lambda^4$とλでマス計算を行えば、$\lambda^5$が求まります。$\lambda^5$と$\lambda^4$で$\lambda^9$が求まります。この様にしてベキの計算を行います。

計算マス

| | $q$ | $-2q^5$ | $5q^9$ | $-10q^{13}$ | $18q^{17}$ | $-32q^{21}$ | $55q^{25}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | | | | | | | |
| $-2q^5$ | | | | | | | |
| $5q^9$ | | | | | | | |
| $-10q^{13}$ | | | | | | | |
| $18q^{17}$ | | | | | | | |
| $-32q^{21}$ | | | | | | | |
| $55q^{25}$ | | | | | | | |

λ×λの計算結果

| | $q$ | $-2q^5$ | $5q^9$ | $-10q^{13}$ | $18q^{17}$ | $-32q^{21}$ | $55q^{25}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | $q^2$ | $-2q^6$ | $5q^{10}$ | $-10q^{14}$ | $18q^{18}$ | $-32q^{22}$ | $55q^{26}$ |
| $-2q^5$ | $-2q^6$ | $4q^{10}$ | $-10q^{14}$ | $20q^{18}$ | $-36q^{22}$ | $64q^{26}$ | $-110q^{30}$ |
| $5q^9$ | $5q^{10}$ | $-10q^{14}$ | $25q^{18}$ | $-50q^{22}$ | $90q^{26}$ | $-160q^{30}$ | $275q^{34}$ |
| $-10q^{13}$ | $-10q^{14}$ | $20q^{18}$ | $-50q^{22}$ | $100q^{26}$ | $-180q^{30}$ | $320q^{34}$ | $-550q^{38}$ |
| $18q^{17}$ | $18q^{18}$ | $-36q^{22}$ | $90q^{26}$ | $-180q^{30}$ | $324q^{34}$ | $-576q^{38}$ | $990q^{42}$ |
| $-32q^{21}$ | $-32q^{22}$ | $64q^{26}$ | $-160q^{30}$ | $320q^{34}$ | $-576q^{38}$ | $1024q^{42}$ | $-1760q^{46}$ |
| $55q^{25}$ | $55q^{26}$ | $-110q^{30}$ | $275q^{34}$ | $-550q^{38}$ | $990q^{42}$ | $-1760q^{46}$ | $3025q^{50}$ |

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 &= q^2+(-2-2)q^6+(5+4+5)q^{10}+(-10-10-10-10)q^{14} \\
&\quad +(18+20+25+20+18)q^{18}+(-32-36-50-50-36-32)q^{22} \\
&\quad +(55+64+90+100+90+64+55)q^{26} \\
&\quad +(-110-160-180-180-160-110)q^{30}+(275+320+324+320+275)q^{34} \\
&\quad +(-550-576-576-550)q^{38}+(990+1024+990)q^{42} \\
&\quad +(-1760-1760)q^{46}+3025q^{50} \\
&= q^2-4q^6+14q^{10}-40q^{14}+101q^{18}-236q^{22}+518q^{26}-900q^{30}+1514q^{34} \\
&\quad -2252q^{38}+3004q^{42}-3520q^{46}+3025q^{50}
\end{aligned}
$$

となります。

目次へ戻る