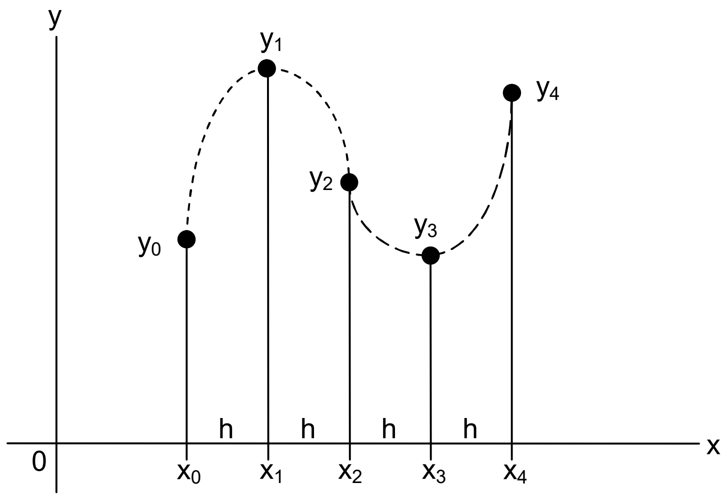
シンプソンの公式　　　　　　　　　　　　　　　　　　2020 年 10 月 2 日　目次に戻る



積分できない関数の、x 軸上の点 x_0、 $x_1=x_0+h$ 、$x_2=x_i+2h$、つまり等間隔の 3 点での y の値を求めます。これは x の値を積分出来ない関数に代入すれば出ます。

この y_0 から y_2 の y 値 3 つは、本当は積分出来ない関数の無限個の y 値で結ばれているのですが、積分出来る関数の y 値で結ばれていることに無理やりします。

つまり、この y 値 3 つが全部その線上に乗る 2 次曲線を考え、その 2 次曲線を表す 2 次関数を ax^2+bx+c とします。この 2 次関数の x_0 から x_2 までの積分は、

$$\int_{x_0}^{x_2}(ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{x_0}^{x_2}$$

$$=\left(\frac{a}{3}x_2^{\ 3}+\frac{b}{2}x_2^{\ 2}+cx_2\right)-\left(\frac{a}{3}x_0^{\ 3}+\frac{b}{2}x_0^{\ 2}+cx_0\right)$$

となります。$x_2=x_0+2h$ を代入しますと、

$$=\left\{\frac{a}{3}(x_0+2h)^3+\frac{b}{2}(x_0+2h)^2+c(x_0+2h)\right\}-\left(\frac{a}{3}x_0^{\ 3}+\frac{b}{2}x_0^{\ 2}+cx_0\right)$$

$$=\frac{a}{3}x_0^{\ 3}+2ahx_0^{\ 2}+4ah^2x_0+\frac{8}{3}ah^3+\frac{b}{2}x_0^{\ 2}+2bhx_0+2bh^2+cx_0+2ch$$

$$-\frac{a}{3}x_0^{\ 3}-\frac{b}{2}x_0^{\ 2}-cx_0$$

$$=2ahx_0{}^2+4ah^2x_0+\frac{8}{3}ah^3+2bhx_0+2bh^2+2ch$$

$$=\frac{h}{3}(6ax_0{}^2+12ahx_0+8ah^2+6bx_0+6bh+6c)$$

$$=\frac{h}{3}\{(ax_0{}^2+bx_0+c)+(4ax_0{}^2+8ahx_0+4ah^2+4bx_0+4bh+4c)$$

$$+(ax_0{}^2+4ahx_0+4ah^2+bx_0+2bh+c)\}$$

$$=\frac{h}{3}[(ax_0{}^2+bx_0+c)+4\{a(x_0{}^2+2hx_0+h^2)+b(x_0+h)+c\}$$

$$+\{a(x_0{}^2+4hx_0+4h^2)+b(x_0+2h)+c\}]$$

$$=\frac{h}{3}(ax_0{}^2+bx_0+c)+\frac{4h}{3}\{a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c\}+\frac{h}{3}\{a(x_0+2h)^2+b(x_0+2h)+c\}$$

になり、2 次関数の x_0 から x_2 までの積分は、x_0 から x_2 までの 3 地点での 2 次関数の値で表わされてしまいます。

$$ax_0{}^2+bx_0+c=y_0$$

$$a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c=y_1$$

$$a(x_0+2h)^2+b(x_0+2h)+c=y_2$$

ですから、

$$=\frac{h}{3}y_0+\frac{4h}{3}y_1+\frac{h}{3}y_2$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

となります。y_0 から y_2 の y 値 3 つは、もともとは積分できない関数に x の値を代入して求めたものです。最後の式は、積分出来ない関数の離散値を 2 次関数の曲線で結んだ時の積分であり、積分出来ない関数の積分の近似値になります。

　次に右どなりの x の 3 点、$x_2=x_0+2h$、 $x_3=x_0+3h$ 、$x_4=x_0+4h$ について、積分出来ない関数に代入し y 値を求めます。今度の y 値 3 つが、全部その線上に乗る 2 次曲線の関数を、px^2+qx+r とします。この 2 次関数の x_2 から x_4 までの積分は、

$$\int_{x_2}^{x_4}(px^2+qx+r)dx=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_{x_2}^{x_4}$$

$$=\left(\frac{p}{3}{x_4}^3+\frac{q}{2}{x_4}^2+rx_4\right)-\left(\frac{p}{3}{x_2}^3+\frac{q}{2}{x_2}^2+rx_2\right)$$

となります。x_2＝x_0＋2h 、x_4＝x_0＋4h を代入しますと、

$$=\left\{\frac{p}{3}(x_0+4h)^3+\frac{q}{2}(x_0+4h)^2+r(x_0+4h)\right\}-\left\{\frac{p}{3}(x_0+2h)^3+\frac{q}{2}(x_0+2h)^2+r(x_0+2h)\right\}$$

$$=\frac{p}{3}{x_0}^3+4ph{x_0}^2+16ph^2x_0+\frac{64}{3}ph^3+\frac{q}{2}{x_0}^2+4qhx_0+8qh^2+rx_0+4rh$$

$$-\frac{p}{3}{x_0}^3-2ph{x_0}^2-4ph^2x_0-\frac{8}{3}ph^3-\frac{q}{2}{x_0}^2-2qhx_0-2qh^2-rx_0-2rh$$

$$=2ph{x_0}^2+12ph^2x_0+\frac{56}{3}ph^3+2qhx_0+6qh^2+2rh$$

$$=\frac{h}{3}(6p{x_0}^2+36phx_0+56ph^2+6qx_0+18qh+6rh)$$

$$=\frac{h}{3}\{(p{x_0}^2+4phx_0+4ph^2+qx_0+2qh+r)$$

$$+(4p{x_0}^2+24phx_0+36ph^2+4qx_0+12qh+4r)$$

$$+(p{x_0}^2+8phx_0+16ph^2+qx_0+4qh+r)\}$$

$$=\frac{h}{3}[\{p({x_0}^2+4hx_0+4h^2)+q(x_0+2h)+r)\}$$

$$+4\{p({x_0}^2+6hx_0+9h^2)+q(x_0+3h)+r\}$$

$$+\{p({x_0}^2+8hx_0+16h^2)+q(x_0+4h)+r\}]$$

$$=\frac{h}{3}\{p(x_0+2h)^2+q(x_0+2h)+r\}+\frac{4h}{3}\{p(x_0+3h)^2+q(x+3h)+r\}$$

$$+\frac{h}{3}\{p(x_0+4h)^2+q(x_0+4h)+r\}$$

になります。2 次関数の x_2 から x_4 までの積分は、前の区間と同じくそれぞれの x 地点での 2 次関数の値を使って表されてしまいます。

$$p(x_0+2h)^2+q(x_0+2h)+r=y_2$$

$$p(x_0+3h)^2+q(x_0+3h)+r=y_3$$

$$p(x_0+4h)^2+q(x_0+4h)+r=y_4$$

ですから、

$$=\frac{h}{3}y_2+\frac{4h}{3}y_3+\frac{h}{3}y_4$$
$$=\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

となります。前の区間と同様に y_2 から y_4 の y 値 3 つは、もともとは積分できない関数に x の値を代入して求めたものです。最後の式は、積分出来ない関数の離散値を 2 次関数の曲線で結んだ時の積分であり、積分出来ない関数の積分の近似値になります。

右への積分を繰り返しますと、積分出来ない関数の積分の近似値は、

$$\frac{h}{3}\{(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+(y_4+\bullet\bullet\bullet\bullet\}$$
$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\bullet\bullet\bullet\bullet+4y_{n-1}+y_n)$$

となります。これがシンプソンの公式です。積分区間を細かく分割し、その x 値を積分出来ない関数に代入して y 値を求めて行きます。左端を 0 番目と数えた時、奇数番目の y 値は 4 倍、偶数番目の y 値は 2 倍して合計します。ただし左端と右端の y 値は 1 倍です。

右端の y_n の n は偶数になるようにします。そうしませんと、3 点ずつの積分にならなくなります。最後に合計に $\frac{h}{3}$ を掛けます。h は左端から右端までを分割数で割ったものです。

3 点を結ぶ 2 次曲線は存在するのですか。

y_0、y_1、y_2 を表す 3 つの式、

$$a{x_0}^2+bx_0+c=y_0$$

$$a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c=y_1$$

$$a(x_0+2h)^2+b(x_0+2h)+c=y_2$$

の x_0、$x_0+h=x_1$、$x_0+2h=x_2$、y_0、y_1、y_2 の値は既知です。未知数は a、b、c の 3 つであり、それ以外は定数になります。

$$x_0{}^2a+x_0b+c=y_0$$

$$(x_0+h)^2a+(x_0+h)b+c=y_1$$

$$(x_0+2h)^2a+(x_0+2h)b+c=y_2$$

という連立方程式が出来ます。未知数が 3 つで式も 3 つですから、a、b、c は必ず定まります。a、b、c が定まると言うことは、3 点を結ぶ 2 次曲線は存在することになります。

目次に戻る