スケーリングと伝達関数　2017 年 8 月 28 日　目次へ戻る

2025.2.27　2025.3.1　訂正

スケーリングを実行しますと、伝達関数は、どの様に変わるのでしょうか。はしご型 L C フィルターをスケーリングして、伝達関数の変化を見ます。

スケーリングの章で検討しました通り、

①周波数スケーリング

周波数を $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ に変えたい場合、R はそのまま、L と C は $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ 倍

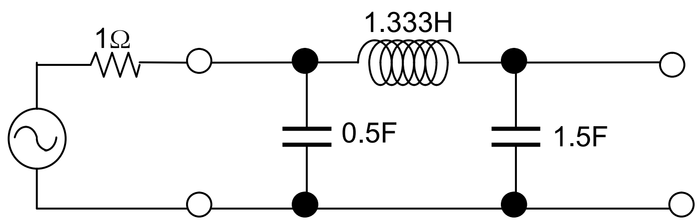
②数値スケーリング:

抵抗値を $\frac{r_1}{r_0}$ に変えたい場合、R と L は $\frac{r_1}{r_0}$ 倍、C は $\frac{r_0}{r_1}$ 倍

です。

1、スケーリング前の回路と伝達関数

正規化設計の R−∞型、3 次バタワースフィルターです。はしご型 LC フィルターの章で説明致しました。回路は下記の通りです。



スケーリングを行う前に、現在の伝達関数を求めます。R−∞型ですから、1Ω を含めた四端子定数を求めますと、四端子定数 A の位置の値が伝達関数の逆数になるのでした。1Ω の左から右側を見た時の四端子定数を計算します。四端子定数の求め方は、四端子回路の章をご覧下さい。四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.333s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^3+2s^2+2s+1 & 0.667s^2+1.333s+1 \\ s^3+2s & 0.667s^2+1 \end{bmatrix}$$

となります。行列の計算です。伝達関数 G(s)は、A の位置の値の逆数ですから、

$$G(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

です。ここで分母のｓにー1 を代入してみますと、

$$s^3+2s^2+2s+1\Big|_{s=-1}=(-1)^3+2(-1)^2+2(-1)+1$$

$$=-1+2-2+1=0$$

になります。剰余の定理および因数定理により、分母は$s-(-1)=s+1$で割り切れます。

剰余の定理および因数定理については「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章 6 ページをご覧下さい。実際に割り算を行いますと、

$$\begin{array}{r@{\,}l} & s^2+s+1 \\ s+1 & \big)\overline{s^3+2s^2+2s+1} \\ & \underline{s^3+s^2} \\ & \quad s^2+2s \\ & \quad \underline{s^2+s} \\ & \qquad s+1 \\ & \qquad \underline{s+1} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

になりました。伝達関数は、

$$G(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

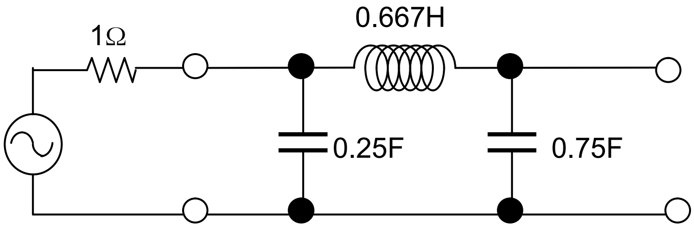
$$=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+s+1}$$

に分解出来ます。1 次低域通過伝達関数と、2 次低域通過伝達関数の直列接続と等価です。この件につきましては、2 で検討致します。

2、周波数のスケーリングと伝達関数

正規化設計ではー3[dB]になる角周波数が 1[rad/sec]です。ー3[dB]になる角周波数を、2[rad/sec]にしたいと思います。

周波数のスケーリングだけを行います。1 ページ①の周波数スケーリングを行います。ω_0が 1[rad/sec]、ω_1が 2[rad/sec]になります。R はそのまま、L と C は$\frac{\omega_0}{\omega_1}$倍ですから、L と C をそれぞれ$\frac{1}{2}$にします。回路は下記の様になります。



四端子定数を求めますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.667s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.75s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1 & 0.167s^2 + 0.667s + 1 \\ 0.125s^3 + s & 0.167s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

になります。行列の計算です。伝達関数 G(s)は、A の位置の値の逆数ですから、

$$G(s) = \frac{1}{0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1}$$

です。分子分母に 8 を掛けますと、

$$= \frac{8 \times 1}{8(0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1)}$$

$$= \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8}$$

になります。分母の s に−2 を代入してみますと、

$$s^3 + 4s^2 + 8s + 8\Big|_{s=-2} = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 8(-2) + 8$$

$$= -8 + 16 - 16 + 8 = 0$$

になります。剰余の定理および因数定理により、分母は $s-(-2) = s+2$ で割り切れます。

実際に割り算を行いますと、

$$\begin{array}{r l}
 & s^2 + 2s + 4 \\
s+2 \,\big) & s^3 + 4s^2 + 8s + 8 \\
 & \underline{s^3 + 2s^2} \\
 & \quad 2s^2 + 8s \\
 & \quad \underline{2s^2 + 4s} \\
 & \qquad 4s + 8 \\
 & \qquad \underline{4s + 8} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

になりました。伝達関数は、

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{8}{s^3+4s^2+8s+8} \\
&= \frac{8}{(s+2)(s^2+2s+4)} \\
&= \frac{2}{s+2}\cdot\frac{4}{s^2+2s+4}
\end{aligned}
$$

に分解出来ます。1 次低域通過伝達関数と、2 次低域通過伝達関数の直列接続と等価です。

ここで目次に戻り「周波数変換の実際」の「低域通過伝達関数の要素」の章をお読み下さい。必ずお読み下さい。

1 で計算しました、スケーリング前の 1 次低域通過伝達関数は、$\frac{1}{s+1}$ です。a_0 が 1 です。スケーリング後の 1 次低域通過伝達関数は、$\frac{2}{s+2}$ です。a_0 が 2 です。「周波数変換の実際」の「低域通過伝達関数の要素」の章を参照して、1 次低域通過伝達関数は a_0 を用いて、

$$
\frac{1}{s+1} = \frac{1}{1(\frac{s}{1}+1)} = \frac{1}{1+\frac{s}{1}} \quad ・・・・2-①
$$

$$
\frac{2}{s+2} = \frac{2}{2(\frac{s}{2}+1)} = \frac{1}{1+\frac{s}{2}} \quad ・・・・2-②
$$

と変形出来ます。スケーリング前の 1 次低域通過伝達関数で、角周波数 a_0 での周波数伝達関数の絶対値を求めます。周波数伝達関数の絶対値については、「s＝jω とは何か」や「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。スケーリング前の回路に、角周波数 a_0 の正弦波を入力した時の出力の大きさを求める為です。スケーリング前の 1 次低域通過伝達関数の a_0 は、1[rad/sec]ですので、2−①式に s＝j1＝j と s＝−j1＝−j を行いますと、

$$
\left.\frac{1}{1+\frac{1}{1}s}\right|_{s=j} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}j} = \frac{1}{1+j}
$$

$$
\left.\frac{1}{1+\frac{1}{1}s}\right|_{s=-j} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}(-j)} = \frac{1}{1-j}
$$

になります。両方の値を掛け平方根を求めますと、

$$\sqrt{\frac{1}{1+j}\cdot\frac{1}{1-j}}=\sqrt{\frac{1}{1-j+j+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

になります。スケーリング前回路の、1[rad/sec]入力時周波数伝達関数の絶対値です。出力の振幅が入力の振幅の$1/\sqrt{2}$になることを表しています。

今度はスケーリング後の 1 次低域通過伝達関数で、角周波数a_0での周波数伝達関数の絶対値を求めます。スケーリング後の回路に、角周波数a_0の正弦波を入力した時の出力の大きさを求める為です。スケーリング後の 1 次低域通過伝達関数のa_0は、2[rad/sec]ですので、2ー②式に s＝j2 と s＝－j2 を行いますと、

$$\left.\frac{1}{1+\frac{1}{2}s}\right|_{s=j2}=\frac{1}{1+\frac{j2}{2}}=\frac{1}{1+j}$$

$$\left.\frac{1}{1+\frac{1}{2}s}\right|_{s=-j2}=\frac{1}{1-\frac{j2}{2}}=\frac{1}{1-j}$$

になります。両方の値を掛け平方根を求めますと、

$$\sqrt{\frac{1}{1+j}\cdot\frac{1}{1-j}}=\sqrt{\frac{1}{1-j+j+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

になります。スケーリング後回路の、2[rad/sec]入力時の周波数伝達関数の絶対値です。出力の振幅が入力の振幅の$1/\sqrt{2}$になることを表しています。

スケーリングする前の回路に角周波数が 1[rad/sec]の正弦波を入力しますと、回路の伝達関数に s＝j と s＝－j が代入され、それぞれの答えが掛け算され、平方根された大きさになって出力されます。周波数伝達関数の絶対値倍されます。この大きさは、スケーリング後の回路の伝達関数に s＝j2 と s＝－j2 が代入された場合の出力の大きさと同じです。このことが各々の角周波数で起きますから、スケーリング前の回路に、ある角周波数 ω の正弦波を入力した時に起ることが、スケーリグ後の回路では、その角周波数の 2 倍の 2ω の正弦波を入力した時に起ります。

周波数スケーリングを行いますと、1 次低域通過伝達関数のa_0が 1 ページ①の周波数スケーリングの式の、$\frac{\omega_1}{\omega_0}\cdot a_0$に変化します。分子には角周波数 0 （s＝jω＝0 および s＝－jω＝0）で利得が 1 になる様に、自動的に定数a_0が付きます。利得は 2ー①式 2ー②式とも、角周波数 0 の 1 からスタートします。角周波数 0 つまり直流での利得は 1（筒抜け）です。

スケーリング前の2次低域通過伝達関数は、$\dfrac{1}{s^2+s+1}$ です。スケーリング後の2次低域通過伝達関数は、$\dfrac{4}{s^2+2s+4}$ です。

「周波数変換の実際」の「低域通過伝達関数の要素」の章を参照して、スケーリング前の2次低域通過伝達関数の $\omega_0{}^2$ は1です。ω_0 は1です。またQは1です。スケーリング前の2次低域通過伝達関数は、

$$\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1^2}{s^2+\frac{1}{1}s+1^2}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot 2-③$$

と変形出来ます。「周波数変換の実際」の「低域通過伝達関数の要素」の章を参照して、スケーリング後の2次低域通過伝達関数の $\omega_0{}^2$ は 2^2 です。ω_0 は2です。またQは1です。スケーリング後の2次低域通過伝達関数は、

$$\frac{4}{s^2+2s+4}=\frac{2^2}{s^2+\frac{2}{1}s+2^2}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot 2-④$$

と変形出来ます。

スケーリング前の2次低域通過伝達関数で、角周波数 ω_0 での周波数伝達関数の絶対値を求めます。スケーリング前の回路に、角周波数 ω_0 の正弦波を入力した時の出力の大きさを求める為です。

スケーリング前の2次低域通過伝達関数の ω_0 は1[rad/sec]ですので、2−③式にs＝j1＝jとs＝−j1＝−jを行いますと、

$$\left.\frac{1^2}{s^2+\frac{1}{1}s+1^2}\right|_{s=j1}=\frac{1^2}{(j1)^2+\frac{1}{1}(j1)+1^2}=\frac{1}{-1+j1+1}=\frac{1}{j}=\frac{1\cdot j}{j\cdot j}=\frac{j}{-1}=-j$$

$$\left.\frac{1^2}{s^2+\frac{1}{1}s+1^2}\right|_{s=-j1}=\frac{1^2}{(-j1)^2+\frac{1}{1}(-j1)+1^2}=\frac{1}{-1-j1+1}=\frac{1}{-j}=\frac{1\cdot j}{-j\cdot j}=\frac{j}{1}=j$$

になります。両方の値を掛け平方根を求めますと、

$$\sqrt{-j\cdot j}=\sqrt{1}=1$$

になります。スケーリング前回路の、1[rad/sec]入力時周波数伝達関数の絶対値です。出力

の振幅が入力の振幅と同じになることを表しています。

スケーリング後の 2 次低域通過伝達関数で、角周波数 ω_0 での周波数伝達関数の絶対値を求めます。スケーリング後の回路に、角周波数 ω_0 の正弦波を入力した時の出力の大きさを求める為です。スケーリング後の 2 次低域通過伝達関数の ω_0 は 2[rad/sec]ですので、2－④式に s＝j2 と s＝－j2 を行いますと、

$$\left.\frac{2^2}{s^2+\frac{2}{1}s+2^2}\right|_{s=j2}=\frac{2^2}{(j2)^2+\frac{2}{1}(j2)+2^2}=\frac{4}{-4+j4+4}=\frac{1}{j}=\frac{1\cdot j}{j\cdot j}=\frac{j}{-1}=-j$$

$$\left.\frac{2^2}{s^2+\frac{2}{1}s+2^2}\right|_{s=-j2}=\frac{2^2}{(-j2)^2+\frac{2}{1}(-j2)+2^2}=\frac{4}{-4-j4+4}=\frac{1}{-j}=\frac{1\cdot j}{-j\cdot j}=\frac{j}{1}=j$$

になります。両方の値を掛け平方根を求めますと、

$$\sqrt{-j\cdot j}=\sqrt{1}=1$$

になります。スケーリング後回路の、2[rad/sec]入力時の周波数伝達関数の絶対値です。出力の振幅が入力の振幅と同じになることを表しています。

1 次低域通過伝達関数の時と同様に、2 次低域通過伝達関数においてもスケーリングする前の式にその式の ω_0 を代入した値は、スケーリング後の式にその式の ω_0 を代入した値と同じです。それはスケーリング前の各々の ω で起ることが、スケーリング後では 2 倍した ω で起こるからです。

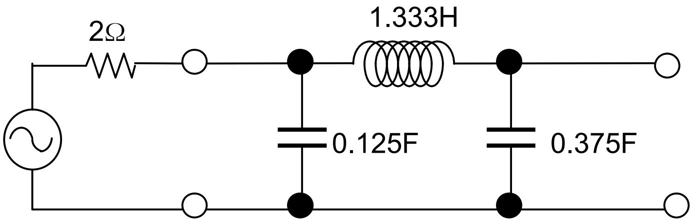
ω_0（1 ページ①の周波数スケーリング時の ω_0 です。2 次低域通過伝達関数の ω_0 ではありません。）が 1[rad/sec]、ω_1 が 2[rad/sec]の周波数スケーリングを行いますと、Q は同じで ω_0（こちらは。2 次低域通過伝達関数の ω_0 です。）が 2 倍されます。分子には角周波数 0 （s＝jω＝0 または s＝－jω＝0）で利得が 1 になる様に、自動的に定数 ${\omega_0}^2$ が付きます。利得は 2－③式 2－④式とも、角周波数 0 の 1 からスタートします。角周波数 0 つまり直流での利得は 1（筒抜け）です。

3、数値のスケーリングと伝達関数

2 での周波数のスケーリングをした状態では、抵抗の値が 1[Ω]です。これを 2[Ω]にしたいと思います。

数値のスケーリングだけを行います。1 ページ②の r_0 が 1[Ω]、r_1 が 2[Ω]になります。し

たがって R は 2[Ω]、 L は $\frac{r_1}{r_0}$ 倍ですから 2 倍、C は $\frac{r_0}{r_1}$ 倍ですから $\frac{1}{2}$ にします。回路は下記の様になります。



四端子定数を求めますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.125s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.333s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.375s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1 & 0.33325s^2 + 1.333s + 2 \\ 0.0625s^3 + 0.5s & 0.166625s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

になります。行列の計算です。伝達関数 G(s)は、A の位置の値の逆数ですから、

$$G(s) = \frac{1}{0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1}$$

です。因数分解致しますと、

$$= \frac{1}{0.125\,(s^3 + 4s^2 + 8s + 8)}$$

$$= \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8}$$

$$= \frac{8}{(s+2)(s^2 + 2s + 4)}$$

$$= \frac{2}{s+2} \cdot \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

となります。数値スケーリングを行いましても、伝達関数は変わりません。

4、まとめ

①周波数スケーリング後

伝達関数の根が全て $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ 倍されます。

②数値スケーリング後

伝達関数は変わりません。

目次へ戻る