0 および∞を除く虚軸上の極の留数が正の実数になる訳

２０１９年４月１９日　　　目次へ戻る

1、原理

極になる因数と同じ因数を掛け、その因数を 0 にする値を代入します。極の角周波数は 0 ＜ω_1＜ω_2＜ω_3＜ω_4＜ω_5＜ω_6 であるとします。この章では ω_1、ω_2 の 1、2 など ω に添えられている数字の大小を、上側または下側と言います。ω_1 が下側、ω_6 が上側になります。

まず下側の方の因数の例です。

$$\left[(s-j\omega_2)\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)\ (s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s\,(s^2+\omega_2{}^2)\ (s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\left[\cancel{(s-j\omega_2)}\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)\ (s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s\,\cancel{(s-j\omega_2)}(s+j\omega_2)\ (s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\frac{a_{m-1}\ \overset{\ominus}{(-\omega_2{}^2+\omega_1{}^2)}\ \overset{\oplus}{(-\omega_2{}^2+\omega_3{}^2)}\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ \underbrace{j\omega_2\ (j\omega_2+j\omega_2)}_{\ominus}\ \underset{\oplus}{(-\omega_2{}^2+\omega_4{}^2)}\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

掛けた 1 次因数 $(s-j\omega_2)$ より上側の s の 2 次因数は正になります。掛けた 1 次因数より下側の 2 次因数は負になります。s の 1 次因数には $j\omega_2$ が代入され、1 次因数どうしの積は負です。分子分母の負は約分されます。a_{m-1} と b_m が正であれば留数は正の実数です。

次に上側の方の因数の例です。

$$\left[(s+j\omega_4)\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)\ (s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s\,(s^2+\omega_2{}^2)\ (s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=+j\omega_2}$$

$$=\left[\cancel{(s+j\omega_4)}\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)\ (s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s\,(s^2+\omega_2{}^2)\ (s-j\omega_4)\cancel{(s+j\omega_4)}\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=-j\omega_4}$$

$$=\frac{a_m\ \ \overset{\ominus}{(-\omega_4{}^2+\omega_1{}^2)}\ \overset{\ominus}{(-\omega_4{}^2+\omega_3{}^2)}\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\cdot\underbrace{-j\omega_4\ \underset{\ominus}{(-\omega_4{}^2+\omega_2{}^2)}\ (-j\omega_4-j\omega_4)}_{\ominus}\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

掛けた 1 次因数$(s+j\omega_4)$より下側の s の 2 次因数は負になります。s の 1 次因数には$-j\omega_4$が代入され、1 次因数どうしの積は負です。したがって分子分母の負の数が合い、負は約分されます。a_{m-1}とb_mが正であれば留数は正の実数です。

2、リアクタンス関数での実際

(1)0ー0 型の場合

$$\frac{a_{m-1}\, s\,(s^2+\omega_2^{\,2})(s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\,(s^2+\omega_1^{\,2})(s^2+\omega_3^{\,2})(s^2+\omega_5^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

0ー0 型の場合、s の 2 次因数の数は分子が 1 つ少ないです。s は分子にのっています。

下側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_1)}\cdot\frac{a_{m-1}\;s\;(s^2+\omega_2^{\,2})\;\;(s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\;\cancel{(s-j\omega_1)}(s-j\omega_1)\;\;(s^2+\omega_3^{\,2})\;\;(s^2+\omega_5^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子分母とも掛けた 1 次因数より上側の 2 次因数が 2 つずつです。1 次因数は分子分母で 1 つずつになります。

中間の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_3)}\cdot\frac{a_{m-1}\;s\;(s^2+\omega_2^{\,2})\;\;(s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\;(s^2+\omega_1^{\,2})\;\;\cancel{(s-j\omega_3)}(s+j\omega_3)\;\;(s^2+\omega_5^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子分母とも掛けた 1 次因数より上側の 2 次因数が 1 つずつ、下側の 2 次因数が 1 つずつです。1 次因数は分子分母で 1 つずつです。

上側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_5)}\cdot\frac{a_{m-1}\;s\;(s^2+\omega_2^{\,2})\;\;(s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\;(s^2+\omega_1^{\,2})\;\;(s^2+\omega_3^{\,2})\;\;\cancel{(s-j\omega_5)}(s+j\omega_5)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子分母とも掛けた 1 次因数より下側の 2 次因数が 2 つずつです。1 次因数は分子分母で 1 つずつです。

以上のように分子の下側 2 次因数の数と分母の下側 2 次因数の数、分子の上側 2 次因数の数と分母の上側 2 次因数の数、が必ず合います。また 1 次因数はいつも分子分母で 1 つずつです。負は約分されますので、a_{m-1}とb_mが正であれば留数は正の実数になります。

(2)0ー∞型の場合

$$\frac{a_m\, s\,(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)(s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)(s^2+\omega_5{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

0ー∞型の場合 s の 2 次因数の数は分子分母で同数。s が分子にのっています。

下側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_1)}\cdot\frac{a_m\ \ s\ (s^2+\omega_2{}^2)\ \ (s^2+\omega_4{}^2)\ \ (s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\cancel{(s-j\omega_1)}(s-j\omega_1)\ \ (s^2+\omega_3{}^2)\ \ (s^2+\omega_5{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子分母とも 2 次因数は上側だけになります。上側 2 次因数は分子が 1 つ多いです。1 次因数は分子分母で 1 つずつになります。

中間の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_3)}\cdot\frac{a_{m-1}\ \ s\ (s^2+\omega_2{}^2)\ \ (s^2+\omega_4{}^2)\ \ (s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ (s^2+\omega_1{}^2)\ \ \cancel{(s-j\omega_3)}(s+j\omega_3)\ \ (s^2+\omega_5{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、下側の 2 次因数が分子分母で 1 つずつ、上側の 2 次因数は分子が 2 つ分母が 1 つで分子が 1 つ多いです。1 次因数は分子分母で 1 つずつです。

上側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_5)}\cdot\frac{a_{m-1}\ \ s\ (s^2+\omega_2{}^2)\ \ (s^2+\omega_4{}^2)\ \ (s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ (s^2+\omega_1{}^2)\ \ (s^2+\omega_3{}^2)\ \ \cancel{(s-j\omega_5)}(s+j\omega_5)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、下側 2 次因数は分子分母とも 2 つずつです。上側 2 次因数は分子に 1 つ残ります。1 次因数は分子分母で 1 つずつです。

以上のように上側 2 次因数の数はいつも分子が 1 つ多く、下側 2 次因数の数は分子分母で同じになります。また 1 次因数は分子分母で 1 つずつです。下側 2 次因数の分子分母の負、および分子分母の正または負の虚数記号は約分されます。a_{m-1} と b_m が正であれば、留数は正の実数になります。

(3)∞ー0 型の場合

$$\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)(s^2+\omega_5{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s\,(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)(s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

∞－0 型の場合、s の 2 次因数の数は分子分母で同数。s が分母に付いています。

下側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_2)}\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1^2)\ (s^2+\omega_3^2)\ (s^2+\omega_5^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ \ s\ \cancel{(s-j\omega_2)}(s-j\omega_2)\ (s^2+\omega_4^2)\ (s^2+\omega_6^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子に 1 つ下側 2 次因数があり、上側 2 次因数の数は分子分母同数となります。1 次因数は分母に 2 つになります。

中間の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_4)}\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1^2)\ (s^2+\omega_3^2)\ (s^2+\omega_5^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ \ s\ (s^2+\omega_2^2)\ \cancel{(s-j\omega_4)}(s+j\omega_4)\ (s^2+\omega_6^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子に 1 つ余分に下側 2 次因数があり、上側 2 次因数の数は分子分母同数となります。1 次因数は分母に 2 つになります。

上側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_6)}\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1^2)\ (s^2+\omega_3^2)\ (s^2+\omega_5^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ \ s\ (s^2+\omega_2^2)\ (s^2+\omega_4^2)\ \cancel{(s-j\omega_6)}(s+j\omega_6)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子に 1 つ余分な下側 2 次因数があります。上側 2 次因数は無くなりました。1 次因数は分母に 2 つになります。

以上のように下側 2 次因数の数は常に分子に 1 つ多く、上側 2 次因数の数は常に分子分母同数です。また 1 次因数は常に分母に 2 つになります。したがって、分子の余分な下側 2 次因数と分母の 2 つの 1 次因数とが負を約分し、他の下側 2 次因数の負は分子分母間で約分されます。a_{m-1} と b_m が正であれば、留数は正の実数になります。

(4)∞－∞型の場合

$$\frac{a_m\ (s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)(s^2+\omega_5^2)(s^2+\omega_7^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\ s\ (s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)(s^2+\omega_6^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

∞－∞型の場合 s の 2 次因数の数は分母が 1 つ少ないです。s が分母に付いています。

下側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_2)}\cdot\frac{a_m\,(s^2+\omega_1{}^2)\;\;(s^2+\omega_3{}^2)\;\;(s^2+\omega_5{}^2)\;\;(s^2+\omega_7{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\;\;s\;\;\cancel{(s-j\omega_2)}(s-j\omega_2)\;\;(s^2+\omega_4{}^2)\;\;(s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、分子に 1 つ下側 2 次因数があり、上側 2 次因数の数は分子が 1 つ多いです。1 次因数は分母に 2 つあります。

中位の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_4)}\cdot\frac{a_m\,(s^2+\omega_1{}^2)\;\;(s^2+\omega_3{}^2)\;\;(s^2+\omega_5{}^2)\;\;(s^2+\omega_7{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\;\;s\;\;(s^2+\omega_2{}^2)\;\;\cancel{(s-j\omega_4)}(s-j\omega_4)\;\;(s^2+\omega_6{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、下側 2 次因数は分子が 1 つ多いです。上側 2 次因数は分子が 1 つ多いです。1 次因数は分母に 2 つです。

上側の方の 1 次因数を掛けた時は、

$$\cancel{(s-j\omega_6)}\cdot\frac{a_m\,(s^2+\omega_1{}^2)\;\;(s^2+\omega_3{}^2)\;\;(s^2+\omega_5{}^2)\;\;(s^2+\omega_7{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\;\;s\;\;(s^2+\omega_2{}^2)\;\;(s^2+\omega_4{}^2)\;\;\cancel{(s-j\omega_6)}(s-j\omega_6)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

となり、下側 2 次因数は分子が 1 つ多いです。上側 2 次因数は分子に 1 つ残ります。1 次因数は分母に 2 つです。

下側 2 次因数は分子で 1 つ多いのですが、分母に 2 つある 1 次因数との間で負が約分されます。上側 2 次因数は分子で 1 つ多いのですが正です。a_m と b_{m-1} が正であれば、留数は正の実数になります。

目次へ戻る