虚軸上の極の留数は正である　　　　　　　２０１９年３月２２日　　　　目次へ戻る

2022.1.4　　訂正

1、留数

$$f(s)=\frac{(s+d)(s-e)}{(s-a)(s+b)(s-c)}$$

と言う関数を、部分分数分解する為に、

$$\frac{(s+d)(s-e)}{(s-a)(s+b)(s-c)}=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s+b}+\frac{C}{s-c}$$

と置きます。A を求める為に、両辺に(s－a)を掛けますと、

$$\frac{\cancel{(s-a)}(s+d)(s-e)}{\cancel{(s-a)}(s+b)(s-c)}=\frac{\cancel{(s-a)}A}{\cancel{s-a}}+\frac{(s-a)B}{s+b}+\frac{(s-a)C}{s-c}$$

になります。約分後、s に a を代入しますと、

$$\frac{(a+d)(a-e)}{(a+b)(a-c)}=A+\cancel{\frac{(a-a)B}{a+b}}+\cancel{\frac{(a-a)C}{a-c}}$$

になり A が求まります。以下 B、C についても同様の計算を行います。

　A を求める際、f(s)に対して次の計算を行いました。

$$(s-a)f(s)\big|_{s=a}=A\ \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

　s＝a で分母を 0 にする項、(s－a)を f(s)に掛け、約分によりその項を消します。s＝a で分母が 0 にならなくなったので、式の s に a を代入し A を求めます。この計算は部分分数分解だけでは無く、複素関数論において極の周りの積分計算で使います。複素関数論では、A のことを留数（りゅうすう）と呼びます。

　突然ですが、f(s)の s＝a での値 f(a)を考えます。f(s)分母の(s－a)をはずし、s に a を代入したものが留数 A ですから、再び分母の(s－a)を復活し、

$$f(a)=\frac{1}{(s-a)}\cdot A$$

の s に a を代入すれば良いです。その時、A を 0 で割ることになり意味を持ちませんが、s の値が a に極めて近い時、意味を持ち、関数 f(s)は近似的に、

$$f(s) \fallingdotseq \frac{A}{s-a}$$

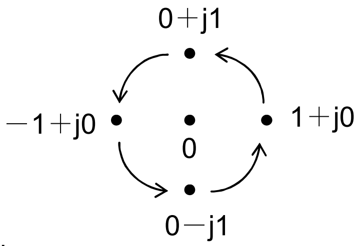
になります。

2、複素数の差

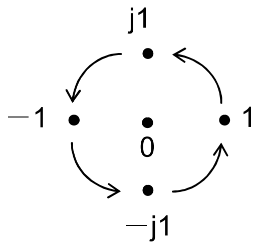
(1)複素平面原点との差

原点 0 の周りを、複素数 s が半径 1 で一回りします。差の s−0 は、

s が 1＋j0 の時、　(1＋j0)－0＝1
s が 0+j1 の時、　(0＋j1)－0＝j1
s が－1＋j0 の時、(－1＋j0)－0＝－1
s が 0－j1 の時、　(0－j1)－0＝－j1



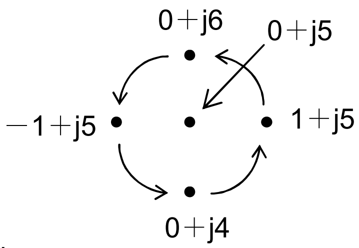

になります。差も原点 0 の周りを半径 1 で一回りします。



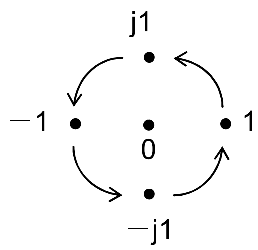

(2) 虚軸上の点との差

虚軸上の点 0＋j5 の周りを、複素数 s が半径 1 で一回りします。差の s－(0＋j5)は、

s が 1＋j5 の時、　(1＋j5)－(0＋j5)＝1
s が 0＋j6 の時、　(0＋j6)－(0＋j5)＝j1
s が－1＋j5 の時、(－1＋j5)－(0＋j5)＝－1
s が 0＋j4 の時、　(0＋j4)－(0＋j5)＝－j1

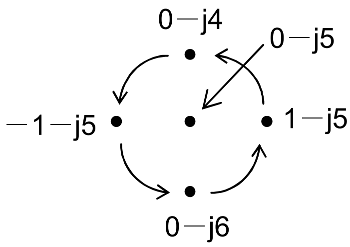



になります。差は原点 0 の周りを半径 1 で一回りします。

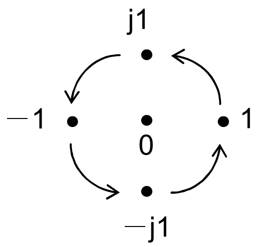


虚軸上の点 0－j5 の周りを、複素数 s が半径 1 で一回りします。差の s－(0－j5)は、

s が 1－j5 の時、　(1－j5)－(0－j5)＝1
s が 0－j4 の時、　(0－j4)－(0－j5)＝j1
s が－1－j5 の時、(－1－j5)－(0－j5)＝－1
s が 0－j6 の時、　(0－j6)－(0－j5)＝－j1



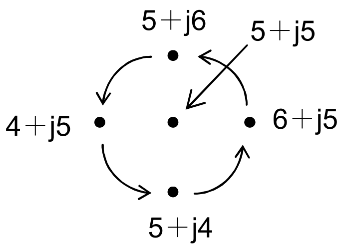

になります。差は原点 0 の周りを半径 1 で一回りします。
点 0＋j5 の周りの一回りの時の差と全く同じです。



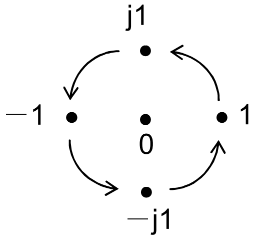

(3)複素平面上の点との差

複素平面上の点 5＋j5 の周りを、複素数 s が半径 1 で一回りします。差の s－(5＋j5)は、

s が 6＋j5 の時、　(6＋j5)－(5＋j5)＝1
s が 5＋j6 の時、　(5＋j6)－(5＋j5)＝j1
s が 4＋j5 の時、　(4＋j5)－(5＋j5)＝－1
s が 5＋j4 の時、　(5＋j4)－(5＋j5)＝－j1

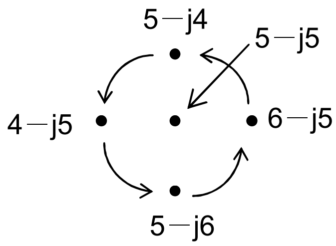



になります。差は原点 0 の周りを半径 1 で一回りします。



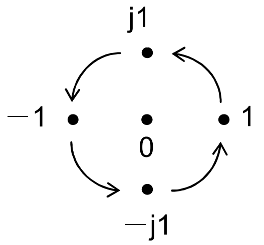
複素平面上の点 5－j5 の周りを、複素数 s が半径 1 で一回りします。差の s－(5－j5)は、

s が 6－j5 の時、　(6－j5)－(5－j5)＝1
s が 5－j4 の時、　(5－j4)－(5－j5)＝j1
s が 4－j5 の時、　(4－j5)－(5－j5)＝－1
s が 5－j6 の時、　(5－j6)－(5－j5)＝－j1




になります。差は原点 0 の周りを半径 1 で一回りします。

点 5＋j5 の周りの一回りの時の差と全く同じです。



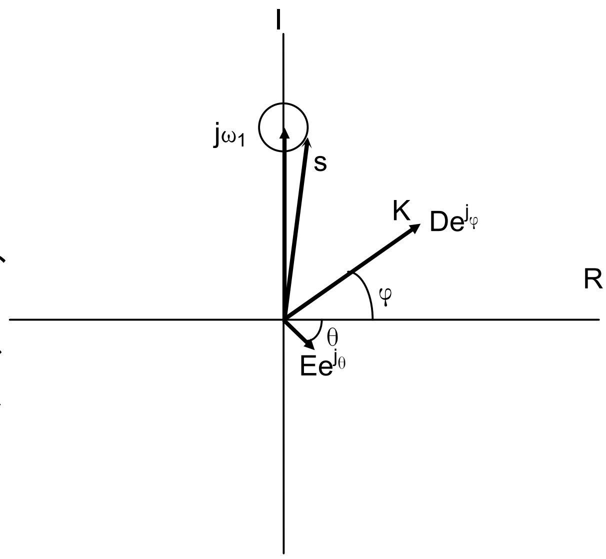

3、駆動点リアクタンス虚数極の留数

(1)正の虚数極

リアクタンス回路の駆動点リアクタンス、X(s)の分母を因数分解しましたところ、因数として(s－$j\omega_1$) が出て来ました。X(s)の極の一つは純虚数値 $j\omega_1$ です。

本章の 1、で説明致しましたが、極のごく近くの s 値では極 $j\omega_1$ の留数を K として、駆動点リアクタンス X(s)は、

$$X(s) \fallingdotseq \frac{K}{s - j\omega_1}$$




と表されます。極 $j\omega_1$ の周りで複素数 s を、極小半径で一回転します。

s と $j\omega_1$ との差、s－$j\omega_1$ を極座標で表しますと、例えば E と言う絶対値を使って、

$$s - j\omega_1 = Ee^{j\theta}$$

になります。s が極の周りを一回りすると、差は原点 0 の周りを一回りします。上式の θ（シータ）は一回転ですから 0≦θ≦2π です。本章 2、(2)を御参照下さい。

留数 K は複素平面上の実数または虚数または複素数のどれかの値ですので、例えば絶対

値の値としてDを使って、

$$K = De^{j\varphi}$$

と言う極座標で表すことが出来ます。留数は決まった値ですから、$\varphi$（ファイ）も決まった値になります。したがって極 $j\omega_1$ 付近で X(s)は、

$$X(s) \fallingdotseq \frac{K}{s - j\omega_1} = \frac{De^{j\varphi}}{Ee^{j\theta}} = \frac{D}{E}e^{j\varphi - j\theta} = \frac{D}{E}e^{j(\varphi-\theta)} = \frac{D}{E}\{\cos(\varphi - \theta) + j\sin(\varphi - \theta)\} \quad ・・・3－①$$

になります。指数法則とオイラーの公式を使いました。

上式から実数部を取り出します。極 $j\omega_1$ 付近で駆動点リアクタンス X(s)の実数部は、

$$\mathrm{Re}\{X(s)\} = \frac{D}{E} \bullet \cos(\varphi - \theta)$$

です。受動回路ではsが虚軸を含む複素平面右半面の時、sの関数 Z(s)の値も虚軸を含む複素平面の右半面である必要があります。「s と Z(s)の関係」の章をご覧下さい。Z(s)の中に X(s)も含まれます。

$s - j\omega_1 = Ee^{j\theta}$ の偏角 $\theta$ は、sが虚軸を含む複素平面右半面を動く時、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ です。

この時、X(s)実数部の $\cos(\varphi－\theta)$は、複素平面右半面ですから0以上でなければなりません。$\cos(\varphi－\theta)$が0以上になる為には、$\theta$ が $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時、$(\varphi－\theta)$も $-\frac{\pi}{2} \leqq (\varphi－\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$ である必要があります。その為に、$\varphi$ は0でなくてはいけません。$\varphi$ が0の時、$\theta$ と$(\varphi－\theta)$と $\cos(\varphi－\theta)$の関係は下表の通りです。

$\varphi$＝0の時、$\theta$ と$(\varphi－\theta)$と $\cos(\varphi－\theta)$の関係

| $\theta$ | $(\varphi－\theta)$ | $\cos(\varphi－\theta)$ |
|---|---|---|
| $\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 |
| $\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 0 | 0 | 1 |
| $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 0 |

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時、$\cos(\varphi - \theta) \geqq 0$ を満たしています。$\varphi$ は 0 ですから、

$$K = De^{j0} = D(\cos 0 + j\sin 0) = D$$

となり、留数 K は D です。D は複素数の絶対値です。複素数の絶対値は正の実数です。

駆動点リアクタンス X(s)で、極 $j\omega_1$ の留数は正の実数であることが分りました。

(2)負の虚数極

本章 2、(2)で行いましたが、s が点 0＋j5 の周りを回っても、点 0－j5 の周りを回っても、差の値は同じになりました。極が$-j\omega_1$ にあっても、差は原点 0 の周りを一回りです。このことから、極$-j\omega_1$ の留数も、正の実数であることが分ります。虚軸上の共役極の留数の値が同じになるか否かは、「リアクタンス関数の性質」の章にあります。

(3)二位の虚数極

虚軸上に二位の極があった場合、

$$X(s) \fallingdotseq \frac{K}{(s - j\omega_1)^2} = \frac{De^{j\varphi}}{(Ee^{j\theta})^2} = \frac{De^{j\varphi}}{E^2 e^{j2\theta}} = \frac{D}{E^2} e^{j\varphi - j2\theta} = \frac{D}{E^2} e^{j(\varphi - 2\theta)}$$
$$= \frac{D}{E^2} \{\cos(\varphi - 2\theta) + j\sin(\varphi - 2\theta)\}$$

となります。$(s - j\omega_1)$の偏角 $\theta$ が、虚軸を含む複素平面右半面で、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時 X(s)の実数部も、$\cos(\varphi - 2\theta) \geqq 0$ でなければなりません。

$\cos(\varphi - 2\theta) \geqq 0$ になる為には、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時、$-\frac{\pi}{2} \leqq (\varphi - 2\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$ である必要があります。$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時、$-\frac{\pi}{2} \leqq (\varphi - 2\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$ になる定数 $\varphi$ はありません。駆動点リアクタンス X(s) 分母を因数分解しても、二位以上の極の項が無いことを表します。

(4)極が原点 0 の時

本章 2、(1)(2)で行いましたが、s が原点 0 の周りを回っても、点 0＋j5 の周りを回っても、差の値は同じになりました。差は原点 0 の周りを一回りです。このことから、原点 0 の極の留数も、正の実数であることが分ります。

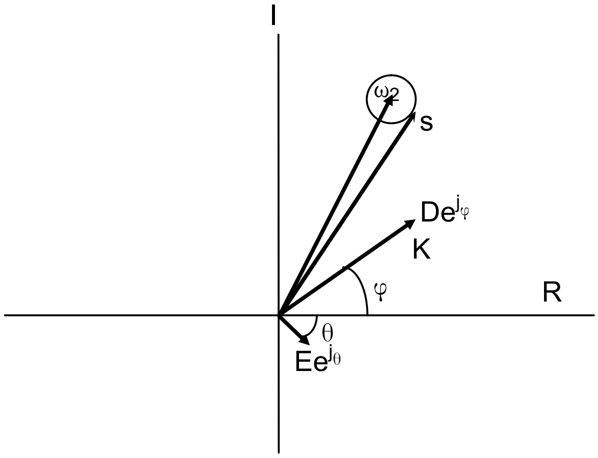
4、駆動点リアクタンス虚軸を除く複素平面右半面の極

sが虚軸を含む複素平面右半面上の値の時、X(s)やZ(s)の実数部は負になりませんでした。

このことから、虚軸を除く複素平面右半面に、LCR 受動回路のラプラスの世界でのインピーダンス Z(s)の極があってはいけないことも分ります。

虚軸を除く複素平面右半面に、LCR 受動回路のラプラスの世界でのインピーダンス、Z(s)の極 $\omega_2$ があった場合、極 $\omega_2$ のごく近くでは留数を K として、

$$Z(s) \fallingdotseq \frac{K}{s-\omega_2}$$




と表されます。s は複素数です。本章の 2、(3) を参照下さい。極 $\omega_2$ 付近の複素平面で、s を極小半径で一回転しますと、差(s－$\omega_2$)は、

$$s-\omega_2 = Ee^{j\theta}$$

と言う極座標で表されます。一回転なので、$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ です。

留数 K は複素平面上の実数または虚数または複素数のどれかの値ですので、やはり、

$$K = De^{j\varphi}$$

と言う極座標で表されます。K は決まった値なので $\varphi$ は定数です。したがって、

$$Z(s) \fallingdotseq \frac{K}{s-\omega_2} = \frac{De^{j\varphi}}{Ee^{j\theta}} = \frac{D}{E}e^{j\varphi-j\theta} = \frac{D}{E}e^{j(\varphi-\theta)} = \frac{D}{E}\{\cos(\varphi-\theta)+j\sin(\varphi-\theta)\} \quad \cdot\cdot\cdot 5-①$$

となります。指数法則とオイラーの公式を使いました。

Z(s)の実数部は、

$$\mathrm{Re}\{Z(s)\} = \frac{D}{E}\{\cos(\varphi-\theta)\}$$

となります。受動回路では s の値が虚軸を含む複素平面の右半面上の値の時、複素数の関数 Z(s)の値も虚軸を含む複素平面の右半面上である必要があります。「s と Z(s)の関係」の章をご覧下さい。Z(s)の中に X(s)も含まれます。

今回の s は極の周囲を一回転中、常に複素平面右半面内です。s の偏角 θ は 0 から 2π まで行きます。その間中、Z(s)の実数部は負になってはいけません。

ところが s の偏角 θ が 0～2π まで変化しますと、留数の偏角 φ（0～2π[rad] ）がどんな値でも、(φ−θ)は 2π[rad]変化してしまいます。cos(φ−θ)の符号も＋から－に必ず変わります。Z(s)の実数部が負になる領域があります。

これは s の値が複素平面右半面の時に、Z(s)の値が複素平面左半面の値になると言うことですから、受動回路では許されません。

留数の偏角 φ が 0 から 2π までのどのような値を持っているとしても、s の偏角 θ が 0 から 2π まで変化しますと、cos 値の符号は必ず変わります。Z(s)の実数部が負になる領域があります。下の表に代表的な φ での各値を提示致します。

φ＝0 の時、θ と φ−θ と cos (φ−θ)の関係

| φ | θ | φ−θ | cos(φ−θ) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | π/2 | −(π/2) | 0 |
| 0 | π | −π | −1 |
| 0 | 3π/2 | −(3π/2) | 0 |
| 0 | 2π | −2π | 1 |

φ＝π/2 の時、θ と φ−θ と cos (φ−θ)の関係

| φ | θ | φ−θ | cos(φ−θ) |
|---|---|---|---|
| π/2 | 0 | π/2 | 0 |
| π/2 | π/2 | 0 | 1 |
| π/2 | π | −(π/2) | 0 |
| π/2 | 3π/2 | −π | −1 |
| π/2 | 2π | −(3π/2) | 0 |

φ＝π の時、θ と φ−θ と cos (φ−θ)の関係

| φ | θ | φ−θ | cos(φ−θ) |
|---|---|---|---|
| π | 0 | π | −1 |
| π | π/2 | π/2 | 0 |
| π | π | 0 | 1 |
| π | 3π/2 | −(π/2) | 0 |
| π | 2π | −π | −1 |

φ＝3π/2 の時、θ と φ−θ と cos (φ−θ)の関係

| φ | θ | φ−θ | cos(φ−θ) |
|---|---|---|---|
| 3π/2 | 0 | 3π/2 | 0 |
| 3π/2 | π/2 | π | −1 |
| 3π/2 | π | −(π/2) | 0 |
| 3π/2 | 3π/2 | 0 | 1 |
| 3π/2 | 2π | −(π/2) | 0 |

φ＝2π の時、θ と φ−θ と cos (φ−θ)の関係

| φ | θ | φ−θ | cos(φ−θ) |
|---|---|---|---|
| 2π | 0 | 2π | 1 |
| 2π | π/2 | 3π/2 | 0 |
| 2π | π | π | −1 |
| 2π | 3π/2 | π/2 | 0 |
| 2π | 2π | 0 | 1 |

全部の表で cos 値が負になっています。これは s の値が複素平面右半面の時に、Z(s)の値が複素平面左半面の値になると言うことですから、受動回路では許されません。

本章 2、(2)で行いましたが、点 5＋j5 の周りを回っても点 5−j5 の周りを回っても、差の値は同じになります。極が $\omega_2$ の共役の位置にあっても全く同じです。5−①式がそのまま成り立ちます。

このことから、受動回路のラプラスの世界でのインピーダンス Z(s)の極が、虚軸を除く複素平面右半面にあってはいけないことが分ります。

何度も申しますが、ラプラスの世界でのインピーダンス Z(s)の中に、リアクタンス回路の駆動点リアクタンス X(s)も含まれます。

目次へ戻る