連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の絶対値の２乗の因数分解

2009 年 12 月 25 日　目次へ戻る

1、元関数

「3 次連立チェビシェフフィルター」の章および「4 次連立チェビシェフフィルター」の章から推測されます様に、連立チェビシェフフィルターの元関数は次のように表されます。

元関数についての基本的な説明は「フィルター近似とは」の章をご覧下さい。

$$b = \sqrt{k} \qquad b^2 = k$$

$$\omega = bx = \sqrt{k}x = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(u,k)$$

$$m = \sqrt{k_1} \qquad m^2 = k_1$$

$$f(\omega) = my = m\,\mathrm{sn}(v,k_1) = \sqrt{k_1}\,\mathrm{sn}(v,k_1)$$

次数 n が奇数の場合、u と v は、

$$u = \frac{1}{\mu}v$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K}{nK_1} = \frac{K'}{K_1'}$$

と言う関係で結びつきます。次数 n が偶数の場合、u と v は、

$$u = \frac{1}{\mu}(v - K_1)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K}{nK_1} = \frac{K'}{K_1'}$$

と言う関係で結びつきます。

2、奇数次の元関数の特別点

「3 次連立チェビシェフフィルター」の章の結果から推測されますが、元関数の次数が奇数の場合、ω 軸上の特別点、つまり f(ω)＝0 や f(ω)＝±m は下表になります。

f(ω)の値とその時の角周波数 ω（n が奇数の場合）

n \ f(ω)	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m
3	ω_0	ω_1	ω_2	$\sqrt{k}$										
5	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	$\sqrt{k}$								
7	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	$\sqrt{k}$						
9	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	$\sqrt{k}$				
11	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	$\sqrt{k}$		
13	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	$\sqrt{k}$

a を 0,1,2,3･･･とすれば、f(ω)が 0 になる角周波数は ω_{2a} です。3 次の結果から推測して、

$$\omega_{2a} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2a}{n}K, k\right)$$

となります。同じく 3 次の結果から推測して、上式中 $\frac{2a}{n}$ は $\frac{n}{n}$ つまり 1 未満です。したがって、$0 \leqq \frac{2a}{n} < 1$ と言う不等式になります。正の数 n をかけて、$0 \leqq 2a < n$ となります。さらに正の数 $\frac{1}{2}$ をかけて、$0 \leqq a < \frac{n}{2}$ となります。n が奇数の時の ω_{2a} の a の範囲です。

a を 1,2,3,4･･･とすれば、表の＋m 点または－m 点は ω_{2a-1} です。3 次の結果から推測して、

$$\omega_{2a-1} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2a-1}{n}K, k\right)$$

となります。

3、偶数次の元関数の特別点

4 次連立チェビシェフフィルターの結果から推測されますが、元関数の次数が偶数の場合、ω 軸上の特別点、つまり f(ω)＝±m や f(ω)＝0 は下表になります。

f (ω)の値とその時の ω　(n が偶数の場合)

f (ω) ＼ n	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m	0	+m or -m
4	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	$\sqrt{k}$										
6	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	$\sqrt{k}$								
8	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	$\sqrt{k}$						
10	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	$\sqrt{k}$				
12	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	$\sqrt{k}$		
14	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	$\sqrt{k}$

a を 1,2,3,4･･･とすれば、表の零点は ω_{2a-1} です。4 次の結果から推測して、

$$\omega_{2a-1} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2a-1}{n}K, k\right)$$

となります。同じく推測して、$\dfrac{2a-1}{n}$ は $\dfrac{n}{n}$ つまり 1 未満です。したがって、$\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{2a-1}{n}$ <1 と言う不等式になります。正の数 n をかけて、1≦2a−1<n となります。さらに 1 を足して、2≦2a<n+1 となります。さらに正の数 $\dfrac{1}{2}$ をかけて、1≦a< $\dfrac{n+1}{2}$ となります。n が偶数の時、表の零点を示す a の範囲です。

a を 0,1,2,3,4･･･とすれば、表の+m 点または−m 点は ω_{2a} です。4 次の結果から推測して、

$$\omega_{2a} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2a}{n}K, k\right)$$

となります。

4、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の因数分解

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗である $y^2(\omega)$、および周波数伝達関数の絶対値 $y(\omega)$は、次の形になります。$f(\omega)$を 2 乗するのは、常に偶関数にする為です。1 をたすのは通過域での利得を≒1 にする為です。「フィルター近似とは」の章および「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

$$y^2(\omega) = \frac{1}{1 + H^2 f^2(\omega)}$$

$$y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + H^2 f^2(\omega)}}$$

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗を展開通分した形で書いた式は、「3 次連立チェビシェフフィルター」の章、15 ページおよび「4 次連立チェビシェフフィルター」の章、17 ページに載せました。例えば 3 次では、

$$y^2(\omega) = \frac{1}{1 + H^2 f^2(\omega)}$$

$$= \frac{1}{1 + H^2 \left(\omega \dfrac{\omega^2 - {\omega_2}^2}{{\omega_2}^2 \omega^2 - 1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + H^2 \dfrac{\omega^2 \left\{\omega^2 - k\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{2}{3}K, k\right)\right\}^2}{\left\{k\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{2}{3}K, k\right)\omega^2 - 1\right\}^2}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\left\{ksn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2+H^2\omega^2\left\{\omega^2-ksn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\right\}^2}{\left\{ksn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2}}$$

になります。最後の式、つまり、展開通分した形で書いた周波数伝達関数の絶対値の 2 乗は、3 階建の繁分数式になります。1 階部分は既に因数分解されています。回路設計する為には、2 階部分の因数分解をする必要があります。因数分解するためには＝0 と置き、根を探さなければなりません。

展開通分した形で書いた、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の、1、2 階部分の分数式が 0 になるには、2 階部分が 0 になることが必要かつ十分条件ですから、2 階部分の因数分解を行う為、以下の手順で計算を行います。

(1)展開通分しない形で書いた周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、

つまり、$y^2(\omega)=\dfrac{1}{1+H^2f^2(\omega)}$ の分母を＝0 と置きます。

(2)この方程式、$1+H^2f^2(\omega)=0$ を成り立たせる、f(ω)の値を求めます。

(3) f(ω)を(2)の値にする、ω の値を求めます。これが(1)で＝0 と置いた分母の根になります。この根を使えば、展開通分した形で書いた周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の、2 階部分の因数分解が出来ます。

上記(1) 、(2)、 (3)を順次計算して行きます。

(1)周波数伝達関数の絶対値の 2 乗分母を＝0 と置きます。

$$1+H^2f^2(\omega)=0$$

と置きました。

(2)上式を成り立たせる f(ω)の値を求めます。

式を計算して行きます。

$$H^2f^2(\omega)=-1$$

$$Hf(\omega)=\pm\sqrt{-1}$$

$$Hf(\omega)=\pm j \quad ・・・・・①$$

H を表す下の式に、「連立チェビシェフフィルター設計ソフトの製作」の章 4、①～③で

計算した、正しい A_P の値を代入します。

$$H=\frac{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}{m}$$

　また本章の 1、から、

$$f(\omega)=msn(v,k_1)$$

ですので、①式の $Hf(\omega)$ に代入し、

$$\frac{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}{m}\bullet msn(v,k_1)=\pm j$$

$$\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}\bullet sn(v,k_1)=\pm j$$

$$sn(v,k_1)=\pm j\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

になります。sn の値が上式の様に純虚数の時、sn の変数 v も純虚数ですので、v を jz_0K_1' と置きますと、（なぜ jz_0K_1' と置くかは、のちほど分ります）

$$sn(jz_0K_1',k_1)=\pm j\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

となります。本章の 1 にありますが、母数 $k_1=m^2$ です。「連立チェビシェフ設計ソフトの製作」の章 4、①～③で計算した、正しい A_P と A_S 値を代入した場合、$m^2=\sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{10^{\frac{A_S}{10}}-1}}$ です。例えば A_P を 1[dB]、A_S を 40[dB]とした場合、

$$m^2=\sqrt{\frac{10^{\frac{1}{10}}-1}{10^{\frac{40}{10}}-1}}=\sqrt{\frac{10^{0.1}-1}{10^4-1}}\fallingdotseq 0.0050887$$

となります。この値は A_P が小さい程、A_S が大きい程、小さくなります。そこで m^2 を 0 で近似させてしまいます。すると母数 k_1＝0 となります。母数 0 の sn は sin になり、更に変数が純虚数の sin は j sinh になり、

$$\mathrm{sn}(jz_0K_1',0)＝\sin(jz_0K_1')＝j\sinh(z_0K_1')$$

です。元の計算にこの結果を反映させますと、

$$j\sinh(z_0K_1')=\pm j\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$z_0K_1'=\sinh^{-1}(\pm\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}})$$

$$z_0K_1'=\pm\sinh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}})$$

になります。sinh 関数は奇関数ですので、$\sinh^{-1}(\pm x)=\pm\sinh^{-1}x$ が成り立ちます。こうして v の値、$\pm jz_0K_1'$が求まります。m^2 を 0 で近似せず、$\sinh^{-1}x$ ではなく $\mathrm{sn}^{-1}x$ で z_0K_1'を求める方法は、この章の最後の「参考」をご覧下さい。

sn の変数 v が正の純虚数 jz_0K_1'の時、②式右辺の正号が成り立ち、

$$\mathrm{sn}(jz_0K_1',k_1)=j\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

となります。sn の変数 v が負の純虚数－jz_0K_1'の時、②式右辺の負号が成り立ち、

$$\mathrm{sn}(-jz_0K_1',k_1)=-j\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

となります。sn は奇関数のため、

$$\mathrm{sn}(-jz_0K_1',k_1)=-\mathrm{sn}(jz_0K_1',k_1)$$

となります。また、sn は周期を持つ関数のため、

$$-\mathrm{sn}(jz_0K_1',k_1)=\mathrm{sn}(2K_1+jz_0K_1',k_1)$$

です。さらに、

$$\mathrm{sn}(jz_0K_1',k_1)=\mathrm{sn}(4K_1+jz_0K_1',k_1)$$

$$\mathrm{sn}(jz_0K_1',k_1)=\mathrm{sn}\{j(z_0K_1'+2K_1'),k_1\}$$

等の実数または虚数方向への周期もあります。これらの周期性を式に入れ、この時の sn の変数 v を次のように表すことが出来ます。

$$v=2aK_1+j(z_0+2b)K_1'$$

但し a＝0,±1,±2･･･、b＝0,±1,±2･･･

先程 v を jz_0K_1'と置いた訳は、v の虚数部の周期性を表す為 z_0 が欲しかったからです。まず、a＝b＝0 の場合は、②式の右辺正号に対し成り立ちます。

次に、b を 0 に固定し、a に 1 を代入し v を $2K_1$ 進めた $\mathrm{sn}(2K_1+jz_0K_1',k_1)$ は、②式の右辺負号に対し成り立ちます。

さらに a を 1 つ増やした $\mathrm{sn}(4K_1+jz_0K_1',k_1)$ は、再び②式の右辺正号に対し成り立ちます。

進めるだけでなくバックしても同じことを繰り返します。

また、a を 1 に固定し、b に 1 を代入し v を $j2K_1$'上げた $\mathrm{sn}\{2K_1+j(z_0K_1'+2K_1'),k_1\}$ は、②式の右辺負号に対し成り立ちます。

さらに b を 1 つ増やした $\mathrm{sn}\{2K_1+j(z_0K_1'+4K_1'),k_1\}$ は、再び②式の右辺負号に対し成り立ちます。上げるだけでなく下げても、②式の右辺負号に対してだけ成り立つことを繰り返しますので、b はあまり役立ちません。

ここで、$1+H^2f^2(\omega)=0$ 方程式を成り立たせる f(ω)、つまり msn(v,k_1)の変数 v の値が求まりました。

$$v=2aK_1+j(z_0+2b)K_1'$$

但し a＝0,±1, ±2･･･、b＝0,±1, ±2･･･

です。

(3) 変数 v をこの値にする ω の値を求める

次に、msn(v,k_1)の v をこの値にする、ω の値を求めなければなりません。連立チェビシ

ェフフィルターでは、

$$f(\omega) = my = msn(v, k_1) = \sqrt{k_1}sn(v, k_1)$$

と

$$\omega = bx = \sqrt{k}x = \sqrt{k}sn(u, k)$$

の 2 式の sn の変数、v と u が関係づけられ、f(ω)が ω の関数となっています。一般的な関数とは相当違います。変数 v と u を実数部と虚数部に分け、

$$v = v_1 + jv_2$$
$$u = u_1 + ju_2$$

と置きますと、n が奇数の場合は、

$$u_1 = \frac{K}{nK_1}v_1 \qquad u_2 = \frac{K'}{K_1'}v_2$$

で v と u が結ばれます。n が偶数の場合は、

$$u_1 = \frac{K}{nK_1}(v_1 - K_1) \qquad u_2 = \frac{K'}{K_1'}v_2$$

で v と u が結ばれます。v が(2)で求めました様に、

$$2aK_1 + j(z_0 + 2b)K_1'$$

の場合、u は、

n が奇数の場合 $\frac{K}{nK_1}2aK_1 + j\frac{K'}{K_1'}(z_0 + 2b)K_1'$

n が偶数の場合 $\frac{K}{nK_1}(2aK_1 - K_1) + j\frac{K'}{K_1'}(z_0 + 2b)K_1'$

$$= \frac{K}{nK_1}(2a - 1)K_1 + j\frac{K'}{K_1'}(z_0 + 2b)K_1'$$

になります。(2)で述べました通り、根を見つけるのに b はあまり役立ちませんので、b＝0 で固定し、

n が奇数の場合 $$u=\frac{K}{nK_1}2aK_1+j\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'$$

n が偶数の場合 $$u=\frac{K}{nK_1}(2aK_1-K_1)+j\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'$$
$$=\frac{K}{nK_1}(2a-1)K_1+j\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'$$

とします。上式の u の実数部の K_1 は分子分母で約分されます。これは何の問題もありません。u の虚数部 K_1'の約分が問題になります。

このまま K_1'を分子分母で約分しようとすると、$\sinh^{-1}$ で計算した z_0K_1'から z_0 を取り出すため、K_1'の値を求める必要があります。母数 k_1 は 0 に近い数です。それゆえ k_1 を 0 に近似し、sn の代わりに sin を用いて z_0K_1'の値を求めたのでした。逆に k_1 の補母数 k_1'は、1 に近い数になります。母数 1 付近での完全楕円積分は、値が無限大に近づくので敏感になります。完全楕円積分 K_1'を正確に求めるのは、なかなか難しいです。そこで 3 次および 4 次の連立チェビシェフフィルターの章で、今までに何度も出てきた式、

$$\frac{K}{nK_1}=\frac{K'}{K_1'}$$

を使用することになります。$\frac{K'}{K_1'}$ の代わりに $\frac{K}{nK_1}$ を使用するのです。式は、

n が奇数の場合 $$u=\frac{K}{nK_1}2aK_1+j\frac{K}{nK_1}z_0K=\frac{2aK}{n}+j\frac{K}{nK_1}z_0K_1'$$

n が偶数の場合 $$u=\frac{K}{nK_1}(2a-1)K_1+j\frac{K}{nK_1}z_0K_1'=\frac{(2a-1)K}{n}+j\frac{K}{nK_1}z_0K_1'$$

となります。ω＝bx＝$\sqrt{k}$ x＝$\sqrt{k}$ sn(u,k)ですから、この u で $\sqrt{k}\mathrm{sn}(u,k)$ を求めれば、その答が、$1+H^2f^2(\omega)=0$ 方程式を成り立たせる ω の値です。つまり、

n が奇数の場合　　$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2aK}{n}+j\frac{K}{nK_1}z_0K_1',k\right)$

n が偶数の場合　　$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left\{\frac{(2a-1)K}{n}+j\frac{K}{nK_1}z_0K_1',k\right\}$

となります。変数虚数部の分母にある K_1 は、母数 k_1 の完全楕円積分値ですが、母数 k_1 は 0 で近似していますから、完全楕円積分 K_1 は、

$$K_1=\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{k_1}^2\sin^2\varphi}}\right]_{k_1=0}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

になります。この結果を代入し、

n が奇数の場合　　$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2aK}{n}+j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$

但し、a＝0, 1, 2, 3,・・・＜$\frac{n}{2}$

n が偶数の場合　　$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left\{\frac{(2a-1)K}{n}+j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right\}$

但し、a＝1, 2, 3, 4,・・・＜$\frac{n+1}{2}$

となります。sn の変数実数部は、本章の 2、と 3、で紹介しました元関数の値を 0 にする変数と同じです。したがって、a の値も同じにします。z_0K_1'の値は先程求めてあります。

展開通分しない形で書いた周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、$y^2(\omega)=\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)}$ の分母の方程式$1+H^2f^2(\omega)=0$を成り立たせるための、ω が見つかりました。

これにより、展開通分した形で書いた周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の、2 階部分の因数

分解が出来ることになりました。伝達関数を作ることが出来るようになります。「連立チェビシェフフィルターの伝達関数」の章に続きます。

参考：もっと正確な z_0K_1'の求め方、

　もっと正確に z_0K_1'を求めるには、次の方法があります。

　変数が純虚数の sn は「ヤコビの楕円関数」の章 37 ページ、ヤコビの虚数変換の公式 8ー⑯により、

$$sn(jz_0K_1',0)=j\frac{sn(z_0K_1',k_1')}{cn(z_0K_1',k_1')}$$

となります。母数 k_1 は補母数 k_1'に変わります。本章 5 ページの②式は、

$$j\frac{sn(z_0K_1',k_1')}{cn(z_0K_1',k_1')}=\pm j\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

になります。両辺に j がありますので、

$$\frac{sn(z_0K_1',k_1')}{cn(z_0K_1',k_1')}=\pm\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

になります。両辺を 2 乗しますと、

$$\frac{sn^2(z_0K_1',k_1')}{cn^2(z_0K_1',k_1')}=\frac{1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

になります。cn^2 は sn^2 で表すことが出来、

$$\frac{sn^2(z_0K_1',k_1')}{1-sn^2(z_0K_1',k_1')}=\frac{1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

になります。上式を展開しますと、

$$1-sn^2(z_0K_1',k_1')=10^{\frac{A_P}{10}}sn^2(z_0K_1',k_1')-sn^2(z_0K_1',k_1')$$

$$1 = 10^{\frac{A_P}{10}} \mathrm{sn}^2(z_0 K_1', k_1')$$

$$\mathrm{sn}^2(z_0 K_1', k_1') = \frac{1}{10^{\frac{A_P}{10}}}$$

$$\mathrm{sn}(z_0 K_1', k_1') = \pm \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}}}$$

になります。実数変数による sn の式が出来ました。この式から変数 z_0K_1'の値を求めなければなりません。つまり sn の値と k 値が分かっていてそこから sn の変数を求めるのですから、アーク sn です。「ヤコビの楕円関数」の章、6 ページの式を再掲します。

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left[\mathrm{sn}^{-1}x\right]_0^x = \mathrm{sn}^{-1}x$$

この積分こそ積分上端 x の値と k 値から、sn の変数 u の値を求めるアーク sn の式です。上式の母数は k ですので、$\mathrm{sn}^{-1}x$ を正しくは $\mathrm{sn}^{-1}(x,k)$ と書きます。sn は奇関数ですので、変数の±が逆になれば sn の±も逆になります。アークにおいても $\mathrm{sn}^{-1}(\pm x) = \pm\mathrm{sn}^{-1}x$ になります。つまり sn 値 x の±が逆になれば、sn 変数 u の±も逆になります。

$$z_0 K_1' = \mathrm{sn}^{-1}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}}}, k_1'\right) = \pm \int_0^{\frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1'^2 x^2)}}$$

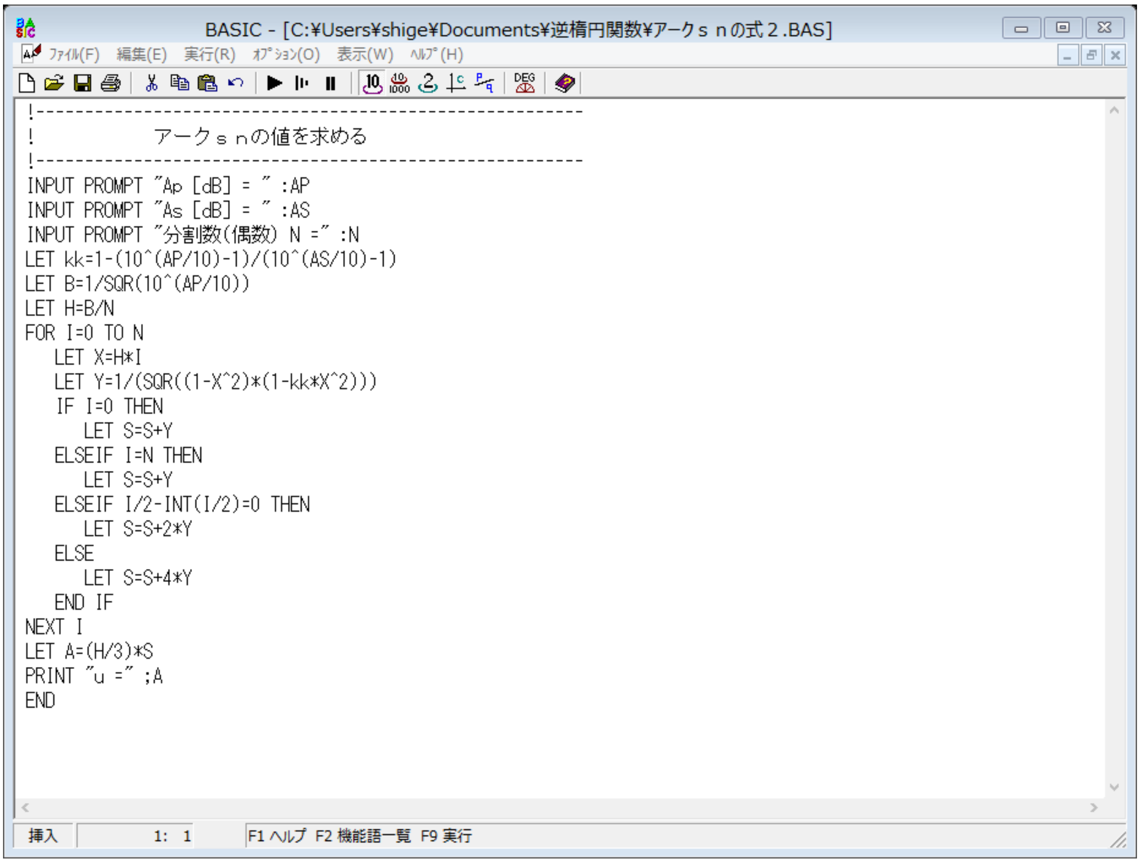
になります。最後の定積分を解けば良いです。この積分は出来ませんので数値積分で行います。シンプソンの公式を使います。シンプソンの公式については「シンプソンの公式について」の章をご覧下さい。積分の式中、

$$k_1 = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}} \qquad k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}$$

ですから、

$$k_1'^2 = 1 - k_1^2 = 1 - \frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}$$

になります。ネット上で入手出来る「十進 basic」で作ったプログラムを下に提示します。




```
!--------------------------------------------------------
!           アークｓｎの値を求める
!--------------------------------------------------------
INPUT PROMPT "Ap [dB] = " :AP
INPUT PROMPT "As [dB] = " :AS
INPUT PROMPT "分割数(偶数) N =" :N
LET kk=1-(10^(AP/10)-1)/(10^(AS/10)-1)
LET B=1/SQR(10^(AP/10))
LET H=B/N
FOR I=0 TO N
   LET X=H*I
   LET Y=1/(SQR((1-X^2)*(1-kk*X^2)))
   IF I=0 THEN
      LET S=S+Y
   ELSEIF I=N THEN
      LET S=S+Y
   ELSEIF I/2-INT(I/2)=0 THEN
      LET S=S+2*Y
   ELSE
      LET S=S+4*Y
   END IF
NEXT I
LET A=(H/3)*S
PRINT "u =" ;A
END
```

積分上端に B という変数を使っています。kk という変数が $k_1'^2$ です。S という変数が h/3 倍する前の和です。

このプログラムで分割数を 10,000 にして計算したところ、casio の ke!san サイトにある sn^{-1} の計算結果と比べ、小数点以下 13 桁の数字まで同じでした。かなり正確です。

$\sinh^{-1}$ で求める答えは A_S に関係なく、

A_P＝1 [dB]で 1.427975358864

です。sn^{-1} で求める答えは、

A_P＝1 [dB]　A_S＝40 [dB]で 1.427956550777

A_P＝1 [dB]　A_S＝50 [dB]で 1.427973478154

A_P＝1 [dB]　A_S＝60 [dB]で 1.427975170794

です。数字は小数点以下 13 桁を四捨五入しています。

全て 1.4279 までは同じであるので、$\sinh^{-1}$ で求める答えを使用しても実用上は全く問題ないと思われます。

目次へ戻る