連立チェビシェフフィルターの伝達関数の利得と周波数の調整　　　　2011 年 5 月 9 日

目次へ戻る

1、利得の調整

「連立チェビシェフフィルターの伝達関数」の章で、伝達関数が求まりました。

(1) n が奇数次の伝達関数

$$\frac{1}{s+a_0}\prod_{a=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\omega_{2a}^{\;2}\left(s^2+\dfrac{1}{\omega_{2a}^{\;2}}\right)}{s^2+\dfrac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\;2})(1-k\omega_{2a}^{\;2})}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\;2}\omega_{2a}^{\;2})}s+\dfrac{a_0^{\;2}+\omega_{2a}^{\;2}}{1+a_0^{\;2}\omega_{2a}^{\;2}}}$$

この伝達関数は、角周波数 0 で利得 1、つまり 0[dB]になりません。S＝jω＝0 を式に代入すると分りますが、分母に s と無関係な定数項がある為、角周波数 0 で利得が 1 にならないのです。

(2) n が偶数次の伝達関数

$$\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\omega_{2a-1}^{\;2}\left(s^2+\dfrac{1}{\omega_{2a-1}^{\;2}}\right)}{s^2+\dfrac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}^{\;2})(1-k\omega_{2a-1}^{\;2})}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\;2}\omega_{2a-1}^{\;2})}s+\dfrac{a_0^{\;2}+\omega_{2a-1}^{\;2}}{1+a_0^{\;2}\omega_{2a-1}^{\;2}}}$$

この伝達関数は、角周波数 0 で利得－Ap[dB]になりません。偶数次の利得は、－Ap[dB]から出発するのでした。

(3) 利得調整後の、n が奇数次の伝達関数

$$\frac{a_0}{s+a_0}\prod_{a=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\dfrac{a_0^{\;2}+\omega_{2a}^{\;2}}{1+a_0^{\;2}\omega_{2a}^{\;2}}\bullet\omega_{2a}^{\;2}\left(s^2+\dfrac{1}{\omega_{2a}^{\;2}}\right)}{s^2+\dfrac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\;2})(1-k\omega_{2a}^{\;2})}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\;2}\omega_{2a}^{\;2})}s+\dfrac{a_0^{\;2}+\omega_{2a}^{\;2}}{1+a_0^{\;2}\omega_{2a}^{\;2}}}$$

$$\frac{a_0}{s+a_0}\prod_{a=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\dfrac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}\left(s^2+\dfrac{1}{\omega_{2a}{}^2}\right)}{\dfrac{1}{\omega_{2a}{}^2}\left\{s^2+\dfrac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}s+\dfrac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}\right\}}$$

(ⅰ) 角周波数 0 で利得を 1 にする為、分母の定数項と同じものを、分子にも付けてやります。

(ⅱ)2 番目の式は、分子定数項の打消し項を分母に付けてみました。

(4) 利得調整後の、n が偶数次の伝達関数

$$A\bullet\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\dfrac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\bullet\omega_{2a-1}{}^2\left(s^2+\dfrac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\right)}{s^2+\dfrac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}s+\dfrac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}}$$

$$A\bullet\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\dfrac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\left(s^2+\dfrac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\right)}{\dfrac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\left\{s^2+\dfrac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}s+\dfrac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\right\}}$$

(ⅰ) 角周波数 0 で利得を 1 にする為、分母の定数項と同じものを、分子にも付けてやります。

(ⅱ)総乗記号の外に定数項 A を付け、角周波数 0 での利得を、仕様のーAp[dB]に合わせます。通過域での許容最大減衰量を、負の数ーA_P[dB]とします。そのーA_P[dB]地点での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は次の様になります。

$$-A_P=20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}[\mathrm{dB}]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}=\frac{-A_P}{20}$$

$$\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}=10^{\frac{-A_P}{20}}$$

この値が定数項 A です。角周波数 0 が入力された場合、伝達関数に j0 とーj0 が代入され、

$$\left[A\bullet\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\left(s^2+\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\right)}{\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\left\{s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\right\}}\right]_{s=j0}$$

$$=A\bullet\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\bullet\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}}{\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\bullet\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}}=A$$

$$\left[A\bullet\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\left(s^2+\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\right)}{\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\left\{s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\right\}}\right]_{s=-j0}$$

$$=A\bullet\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}\bullet\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}}{\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\bullet\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}}=A$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されますから、

$$\sqrt{A\bullet A}=A$$

となります。実際の値で計算しますと、

$$\sqrt{10^{\frac{-A_P}{20}}\bullet 10^{\frac{-A_P}{20}}}=\sqrt{10^{\frac{-A_P}{20}+\frac{-A_P}{20}}}=\sqrt{10^{\frac{-AP}{10}}}=10^{\frac{-AP}{10}\bullet\frac{1}{2}}=10^{\frac{-A_P}{20}}$$

になります。A は、総乗記号の中に分散させても良いと思います。

(ⅲ)2 番目の式は、分子定数項の打消し項を分母に付けてみました。

2、通過域端角周波数の調整

連立チェビシェフフィルターの正規化では、通過域端角周波数が 1 になりませんでした。

伝達関数設計終了後であれば、通過域端角周波数を 1[rad/sec]に出来ます。周波数を動かす方法は以下の通りです。

例えば、奇数の連立チェビシェフフィルター伝達関数は、

$$\frac{a_0}{s+a_0}\prod_{a=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\frac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}\left(s^2+\frac{1}{\omega_{2a}{}^2}\right)}{\frac{1}{\omega_{2a}{}^2}\left\{s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}\right\}}$$

ですが、n が 3 の 3 次フィルターにおいて、各定数を文字で表した場合、

$$\frac{a_0}{s+a_0}\bullet\frac{b_0(s^2+c_0)}{c_0(s^2+b_1s+b_0)}$$

になります。更にそれを要素にばらしますと、

$$\frac{a_0}{s+a_0}\bullet\frac{b_0}{s^2+b_1s+b_0}\bullet\frac{s^2+c_0}{c_0}$$

になります。一般的な名称で呼べば、1 次遅れ要素、2 次遅れ要素、ノッチ要素の直列（カスケード）接続で実現出来ます。

(1)1 次遅れ要素

この式は、

$$\frac{a_0}{s+a_0}=\frac{a_0}{a_0\left(1+\frac{s}{a_0}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}$$

と変形出来ます。

このように変形しますと、a_0 と同じ角周波数を持った正弦波が入力された時のことが、良く分ります。伝達関数の s に、ja_0 および－ja_0 が代入されます。

$$\left[\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}\right]_{s=ja_0}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}ja_0}=\frac{1}{1+j}$$

$$\left[\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}\right]_{s=-ja_0}=\frac{1}{1-\frac{1}{a_0}ja_0}=\frac{1}{1-j}$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されます。

$$\sqrt{\frac{1}{1+j}\bullet\frac{1}{1-j}}=\sqrt{\frac{1}{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\cdot\cdot\cdot ①$$

ここで、a_0 に d という係数が付いた場合を考えます。つまり、a_0 が変化します。

$$\frac{1}{1+\frac{1}{da_0}s}$$

①式と同じ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の出力が出るのは、a_0 に付いた d という係数を打ち消す、da_0 と言う角周波数の入力時になります。この伝達関数は a_0 をいじることにより、折れ曲がりの形を変えずに、それが起きる角周波数のみ変化させることが可能です。

(2)2 次遅れ要素

次のように変形します。

$$\frac{b_0}{s^2+b_1s+b_0}=\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}$$

ここで、${\omega_0}^2$＝b_0　ですから、$\omega_0=\sqrt{b_0}$　$Q=\frac{\omega_0}{b_1}$ です。

このように変形しますと、ω_0 と同じ角周波数を持った正弦波が入力された時のことが良く分ります。伝達関数の s に、$j\omega_0$ およびー$j\omega_0$ が代入されます。

$$\left[\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}\right]_{s=j\omega_0}=\frac{{\omega_0}^2}{-{\omega_0}^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega_0+{\omega_0}^2}=\frac{{\omega_0}^2}{\frac{j{\omega_0}^2}{Q}}=\frac{Q}{j}=-jQ$$

$$\left[\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}\right]_{s=-j\omega_0}=\frac{{\omega_0}^2}{-{\omega_0}^2-\frac{\omega_0}{Q}j\omega_0+{\omega_0}^2}=\frac{{\omega_0}^2}{\frac{-j{\omega_0}^2}{Q}}=\frac{Q}{-j}=jQ$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されます。

$$\sqrt{-jQ\bullet jQ}=\sqrt{Q^2}=Q$$

ω_0 と無関係に、Q だけで出力が決定される様子が分ります。この伝達関数は ω_0 をいじることにより、折れ曲がりの形を変えずに、それが起きる角周波数のみを変化させること

が可能です。

(3)ノッチ要素

この式は、

$$\frac{s^2+c_0}{c_0}=\frac{c_0\left(1+\frac{1}{c_0}s^2\right)}{c_0}=1+\frac{1}{c_0}s^2=1+\frac{1}{{\omega_z}^2}s^2$$

と変形出来ます。ここで、${\omega_z}^2=c_0$　ですから、$\omega_z=\sqrt{c_0}$ です。

このように変形しますと、ω_zと同じ角周波数を持った正弦波が入力された時のことが良く分ります。伝達関数の s に、$j\omega_z$および$-j\omega_z$が代入されます。

$$\left[1+\frac{1}{{\omega_z}^2}s^2\right]_{s=j\omega_z}=1-\frac{1}{{\omega_z}^2}{\omega_z}^2=0$$

$$\left[1+\frac{1}{{\omega_z}^2}s^2\right]_{s=-j\omega_z}=1-\frac{1}{{\omega_z}^2}{\omega_z}^2=0$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されます。

$$\sqrt{0\bullet 0}=0 \quad ・・・②$$

ここで、ω_zに e という係数が付いた場合を考えます。つまり、ω_zを動かします。

$$\frac{1}{1+\frac{1}{(e\omega_z)^2}s^2}$$

②式と同じ 0 の出力が出るのは、ω_zに付いた e という係数を打ち消す、$e\omega_z$と言う角周波数の入力時になります。この伝達関数は ω_zをいじることにより、折れ曲がりの形を変えずに、それが起きる角周波数のみ変化させることが可能です。

(4)通過域端角周波数を 1[rad/sec]にする

現在の通過域端角周波数は 1[rad/sec]の位置では無く、$b(=\sqrt{k})$[rad/sec]の位置にあります。

通過域端角周波数を 1[rad/sec]にしたのでは、連立チェビチェフフィルターは設計出来ないのです。

現在の通過域端角周波数の位置を、1 に持って来れば良いのですから、

$$\sqrt{k} \bullet 縮尺 = 1$$

$$縮尺 = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

先ほど述べました各要素の各変数部分に、この縮尺をかけることにより、折れ曲がりの形はそのまま、通過域端の角周波数が 1[rad/sec]の位置に移動し、阻止域先端位置等もそれぞれの該当位置に移動します。これで、他のフィルターとの性能比較がしやすくなります。

目次へ戻る