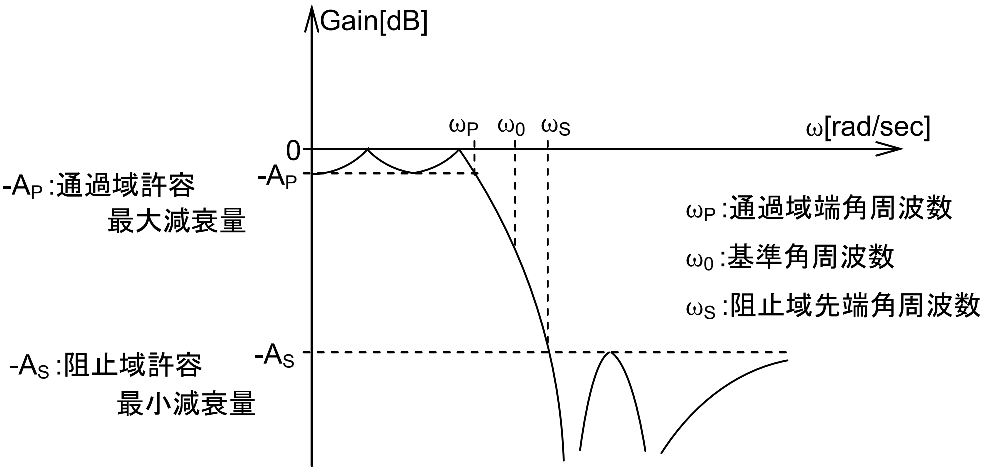

図 1 : 4 次連立チェビシェフ　ローパスフィルター

1、元関数

図 1 が、4 次連立チェビシェフフィルターの特性図です。このフィルターを作る為の元になる関数、つまり元関数は、入力する角周波数を ω、関数の値を f(ω)とした場合、次のようになることが分っています。「分数関数を作る」の章で検討済みです。(元関数については「フィルター近似とは」の章をご参照下さい。)

$$f(\omega)=\frac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega_1^2\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3^2}{\omega_3^2\omega^2-1}$$

この元関数から、

①$\omega^2=\omega_1^2$ と $\omega^2=\omega_3^2$　で零になる。

②$\omega^2=\dfrac{1}{\omega_1^2}$ と $\omega^2=\dfrac{1}{\omega_3^2}$　で極になる。

ことが分ります。次に、この関数の ω に $\dfrac{1}{\omega}$ を入力してみますと、

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{\frac{1}{\omega^2}-\omega_1^2}{\frac{\omega_1^2}{\omega^2}-1}\bullet\frac{\frac{1}{\omega^2}-\omega_3^2}{\frac{\omega_3^2}{\omega^2}-1}=\frac{\frac{1-\omega_1^2\omega^2}{\omega^2}}{\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega^2}}\bullet\frac{\frac{1-\omega_3^2\omega^2}{\omega^2}}{\frac{\omega_3^2-\omega^2}{\omega^2}}$$

$$=\frac{1-\omega_1^2\omega^2}{\omega_1^2-\omega^2}\bullet\frac{1-\omega_3^2\omega^2}{\omega_3^2-\omega^2}=\frac{-(\omega_1^2\omega^2-1)}{-(\omega^2-\omega_1^2)}\bullet\frac{-(\omega_3^2\omega^2-1)}{-(\omega^2-\omega_3^2)}$$

$$= \frac{\omega_1{}^2\omega^2 - 1}{\omega^2 - \omega_1{}^2} \bullet \frac{\omega_3{}^2\omega^2 - 1}{\omega^2 - \omega_3{}^2} = \frac{1}{\dfrac{\omega^2 - \omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2 - 1}} \bullet \frac{1}{\dfrac{\omega^2 - \omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2 - 1}}$$

になります。ω の逆数を入力すると、関数の値も ω を入力した時の逆数になることが分ります。例えば 0.2 を入力した時と、$\frac{1}{0.2} = 5$ を入力した時とでは、関数の値も逆数になり、f(0.2)が a なら f(5)は $\frac{1}{a}$ になります。両者をかければ 1 になります。

連立チェビシェフフィルターの設計でも、各周波数は生（なま）のものを用いないで、スケーリングを行い、正規化角周波数で表します。（スケーリングの章をご参照下さい。）

正規化角周波数＝生角周波数×縮尺

です。他のフィルターでは、$\frac{1}{\text{通過域端生角周波数}}$ を縮尺として使用しますが、連立チェビシェフフィルターでは、$\frac{1}{\text{通過域端生角周波数}}$ を縮尺にしません。通過域端角周波数の逆数が阻止域先端角周波数になるからです。通過域端角周波数が 1[rad/sec]では、阻止域先端角周波数も 1[rad/sec]になり、過渡帯域が無くなり困ります。もう少し高い角周波数、つまり通過域端と阻止域先端の間に 1 [rad/sec]の基準角周波数を置くことになります。図 1 をご覧下さい。

ユーザーから設計仕様として与えられる通過域端生角周波数を $2\pi f_P$ [rad/sec]、同じく阻止域先端生角周波数を $2\pi f_S$ [rad/sec]とします。

設計仕様としては与えられませんが、正規化された時 1 [rad/sec]になる基準生角周波数を仮に $2\pi f_0$[rad/sec]としますと、$\frac{1}{\text{基準生角周波数}}$ を縮尺として正規化角周波数は、

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{2\pi f_P}{2\pi f_0}$$ ω_P:正規化された通過域端角周波数

$$\omega_S = 2\pi f_S \bullet \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{2\pi f_S}{2\pi f_0}$$ ω_S:正規化された阻止域先端角周波数

になります。連立チェビシェフフィルターでは、正規化された通過域端角周波数の逆数が、正規化された阻止域先端角周波数になりますから、

$$\frac{1}{\omega_P} = \omega_S$$

$$\frac{2\pi f_0}{2\pi f_P} = \frac{2\pi f_S}{2\pi f_0}$$

$$2^2\pi^2 f_0{}^2 = 2^2\pi^2 f_P f_S$$

$$2\pi f_0 = \pm 2\pi\sqrt{f_P f_S}$$

となります。1 [rad/sec]を基準生角周波数 $2\pi f_0$ [rad/sec]で割ったものが縮尺になります。現実世界ではマイナスの周波数は無いので、正号の方を基準生角周波数にします。つまり、

$$縮尺 = \frac{1\,[\mathrm{rad\ /\ sec}]}{基準生角周波数\quad[\mathrm{rad\ /\ sec}]}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{通過域端生周波数 \bullet 阻止域先端生周波数}}$$

となり、

正規化角周波数 [rad/sec]＝生角周波数 [rad/sec]×縮尺

です。

4 次の連立チェビシェフフィルターを設計する為､元関数 f(ω)について次の様に決めます。

①通過域うねりの絶対値を m とする。通過域ではこれを超えない。

②通過域うねりの絶対値 m を超え、過渡帯域に入る通過域端正規化角周波数を、b とする。b＝ω_P である。

③過渡帯域を抜け､阻止域うねりの絶対値 $\frac{1}{m}$ に突入する阻止域先端正規化角周波数を、$\frac{1}{b}$ とする。$\frac{1}{b} = \frac{1}{\omega_P} = \omega_S$ である。

④阻止域うねりの絶対値を $\frac{1}{m}$ とする。阻止域ではこれより小さくならない。通過域の減衰最大値の逆数は、阻止域での減衰最小値になるからである。

ω に対する元関数 f(ω)の変化をグラフにして示せば､図 2 のような偶関数になります。マイナスの周波数もあると考えます。

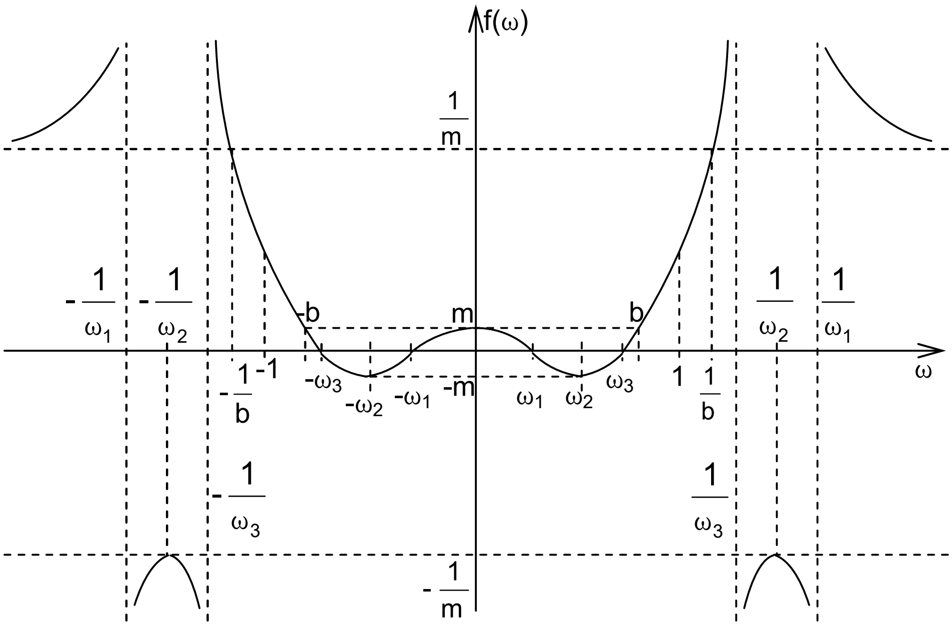

図２

2、未知数の決定

元関数 f(ω)が､図２のグラフと同じになる様にしたいです。$f(\omega)=\dfrac{\omega^2-\omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2-1}\bullet\dfrac{\omega^2-\omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2-1}$ の未知数、ω_1、ω_3 の値を求める為、次の様に式を立てます。

まず、図２のグラフを全体に m 下げる、f(ω)－m を考えますと、

$$
\begin{aligned}
f(\omega)-m &= \frac{\omega^2-\omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2-1}-m \\
&= \frac{(\omega^2-\omega_1{}^2)(\omega^2-\omega_3{}^2)-m(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)} \\
&= \frac{(1-m\omega_1{}^2\omega_3{}^2)\omega^4+(m\omega_1{}^2+m\omega_3{}^2-\omega_1{}^2-\omega_3{}^2)\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2-m}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)} \\
&= \frac{(1-m\omega_1{}^2\omega_3{}^2)\omega^4+(m-1)(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2-m}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}
\end{aligned}
$$

になります。図２のグラフを m だけ下げてみれば分りますが、上式には 0 になる場所があります。分数式が 0 になるのは、分子が 0 になることが必要かつ十分条件ですから、分子の４次式を＝0 と置いた場合、ω＝0 を重根とし ω＝±b を単根として持っている筈です。

分母は、$\omega=\dfrac{1}{\omega_1}$ と $\omega=\dfrac{1}{\omega_3}$ 以外では 0 にならないので、これらの根は有効です。したが

って、f(ω)−m は次式の様に、分子を因数分解した形で書き換えることが出来ます。ただし A は、因数分解で出てくる定数です。この定数は正の定数です。負の定数ではグラフがひっくり返るので良くありません。

$$
\begin{aligned}
f(\omega)-m &= \frac{A\omega^2(\omega+b)(\omega-b)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)} \\
&= \frac{A\omega^2(\omega^2-b^2)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}
\end{aligned}
$$

次に、図 2 のグラフを全体に m 上げる、f(ω)＋m を計算しますと、

$$
\begin{aligned}
f(\omega)+m &= \frac{\omega^2-\omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2-1}+m \\
&= \frac{(\omega^2-\omega_1{}^2)(\omega^2-\omega_3{}^2)+m(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)} \\
&= \frac{(1+m\omega_1{}^2\omega_3{}^2)\omega^4-(m\omega_1{}^2+m\omega_3{}^2+\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2+m}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)} \\
&= \frac{(1+m\omega_1{}^2\omega_3{}^2)\omega^4-(m+1)(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2+m}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}
\end{aligned}
$$

になります。m 下げの時と同様に考えれば、分子の 4 次式を＝0 と置いた時、$\omega=+\omega_2$ を重根とし $\omega=-\omega_2$ も重根として持ちますので、次式が成り立ちます。ただし B は正の定数です。

$$
\begin{aligned}
f(\omega)+m &= \frac{B(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_2)(\omega+\omega_2)(\omega+\omega_2)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)} \\
&= \frac{B(\omega^2-\omega_2{}^2)^2}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}
\end{aligned}
$$

m 下げ m 上げ式の、右辺どうし左辺どうしをかけますと、

$$
\{f(\omega)-m\}\{f(\omega)+m\} = \frac{AB\,\omega^2(\omega^2-b^2)(\omega^2-\omega_2{}^2)^2}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)^2(\omega_3{}^2\omega^2-1)^2}
$$

$$
f^2(\omega)-m^2 = \frac{AB\,\omega^2(\omega^2-b^2)(\omega^2-\omega_2{}^2)^2}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)^2(\omega_3{}^2\omega^2-1)^2} \quad ・・・①
$$

になります。次は、図２のグラフを$\frac{1}{m}$下げる$f(\omega)-\frac{1}{m}$を考えますと、

$$f(\omega)-\frac{1}{m}=\frac{\omega^2-\omega_1^{\ 2}}{\omega_1^{\ 2}\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3^{\ 2}}{\omega_3^{\ 2}\omega^2-1}-\frac{1}{m}$$

$$=\frac{(\omega^2-\omega_1^{\ 2})(\omega^2-\omega_3^{\ 2})-\frac{1}{m}(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\omega^4-\omega_3^{\ 2}\omega^2-\omega_1^{\ 2}\omega^2+\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}-\frac{1}{m}(\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^4-\omega_1^{\ 2}\omega^2-\omega_3^{\ 2}\omega^2+1)}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\omega^4-\frac{1}{m}\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^4+\frac{1}{m}\omega_1^{\ 2}\omega^2+\frac{1}{m}\omega_3^{\ 2}\omega^2-\omega_1^{\ 2}\omega^2-\omega_3^{\ 2}\omega^2+\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}-\frac{1}{m}}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\right)\omega^4+\left(\frac{1}{m}\omega_1^{\ 2}+\frac{1}{m}\omega_3^{\ 2}-\omega_1^{\ 2}-\omega_3^{\ 2}\right)\omega^2+\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}-\frac{1}{m}}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\right)\omega^4+\left(\frac{1}{m}-1\right)(\omega_1^{\ 2}+\omega_3^{\ 2})\omega^2+\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}-\frac{1}{m}}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}$$

になります。上式分子 ω^4 の係数、$1-\frac{1}{m}\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}$を通分しますと、$\frac{m-\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}}{m}$になります。

元関数の $\omega=0$ での値 f(0)は、

$$f(0)=\left[\frac{\omega^2-\omega_1^{\ 2}}{\omega_1^{\ 2}\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3^{\ 2}}{\omega_3^{\ 2}\omega^2-1}\right]_{\omega=0}=\frac{-\omega_1^{\ 2}}{-1}\bullet\frac{-\omega_3^{\ 2}}{-1}=\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}$$

です。図 2 のグラフを描く際、f(0)とした値は m です。したがって、$\omega_1^2\omega_3^2=m$ です。ω^4 の係数、$\frac{m-\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}}{m}$は 0 になります。$\omega^4$ の項は無く、

$$f(\omega)-\frac{1}{m}=\frac{(\frac{1}{m}-1)(\omega_1^{\ 2}+\omega_3^{\ 2})\omega^2+\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}-\frac{1}{m}}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2-1)(\omega_3^{\ 2}\omega^2-1)}$$

となります。図２のグラフを$\frac{1}{m}$だけ下げてみれば分りますが、上式には０になる場所があります。分数式が０になるのは、分子が０になることが必要かつ十分条件ですから、分子の２次式を＝0 と置いた場合、ω＝±$\frac{1}{b}$を単根として持っています。また、分母は$\omega=\frac{1}{\omega_1}$と$\omega=\frac{1}{\omega_3}$以外では０にならないので、この根は有効です。$f(\omega)-\frac{1}{m}$は、次式のように分子を因数分解した形で、書き換えることが出来ます。ただし C は正の定数です。

$$f(\omega)-\frac{1}{m}=\frac{C\left(\omega-\frac{1}{b}\right)\left(\omega+\frac{1}{b}\right)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{C\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

さらに、図２のグラフを$\frac{1}{m}$上げる、$f(\omega)+\frac{1}{m}$を考えますと、

$$f(\omega)+\frac{1}{m}=\frac{\omega^2-\omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2-1}+\frac{1}{m}$$

$$=\frac{(\omega^2-\omega_1{}^2)(\omega^2-\omega_3{}^2)+\frac{1}{m}(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\omega^4-\omega_3{}^2\omega^2-\omega_1{}^2\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2+\frac{1}{m}(\omega_1{}^2\omega_3{}^2\omega^4-\omega_1{}^2\omega^2-\omega_3{}^2\omega^2+1)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\omega^4+\frac{1}{m}\omega_1{}^2\omega_3{}^2\omega^4-\frac{1}{m}\omega_1{}^2\omega^2-\frac{1}{m}\omega_3{}^2\omega^2-\omega_1{}^2\omega^2-\omega_3{}^2\omega^2-\omega_1{}^2\omega_3{}^2+\frac{1}{m}}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{m}\omega_1{}^2\omega_3{}^2\right)\omega^4-\left(\frac{1}{m}\omega_1{}^2+\frac{1}{m}\omega_3{}^2+\omega_1{}^2+\omega_3{}^2\right)\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2+\frac{1}{m}}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{m}\omega_1{}^2\omega_3{}^2\right)\omega^4-\left(\frac{1}{m}+1\right)(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)\omega^2+\omega_1{}^2\omega_3{}^2+\frac{1}{m}}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

になります。図２のグラフを$\frac{1}{m}$上げてみれば分りますが、上式には０になる場所がありま す。分数式が０になるのは、分子が０になることが必要かつ十分条件ですから、分子の４次式を＝0 と置いた場合、$\omega=-\frac{1}{\omega_2}$を重根とし、$\omega=+\frac{1}{\omega_2}$も重根として持っています。また、分母は$\omega=\frac{1}{\omega_1}$と$\omega=\frac{1}{\omega_3}$以外では０になりませんので、これらの根は有効です。したがって$f(\omega)+\frac{1}{m}$は、次の様に分子を因数分解した形で書き換えることが出来ます。ただし D は正の定数です。

$$f(\omega)+\frac{1}{m}=\frac{D\left(\omega-\frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega-\frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega+\frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega+\frac{1}{\omega_2}\right)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{D\left(\omega-\frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega+\frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega-\frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega+\frac{1}{\omega_2}\right)}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$$=\frac{D\left(\omega^2-\frac{1}{\omega_2{}^2}\right)^2}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)}$$

$\frac{1}{m}$下げ$\frac{1}{m}$上げ式の、右辺どうし左辺どうしをかけますと、

$$\left\{f(\omega)-\frac{1}{m}\right\}\left\{f(\omega)+\frac{1}{m}\right\}=\frac{CD\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)\left(\omega^2-\frac{1}{\omega_2{}^2}\right)^2}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)^2(\omega_3{}^2\omega^2-1)^2}$$

$$f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}=\frac{CD\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)\left(\omega^2-\frac{1}{\omega_2{}^2}\right)^2}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)^2(\omega_3{}^2\omega^2-1)^2}\quad\cdots②$$

になります。

最後に元関数、$f(\omega)=\frac{\omega^2-\omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2-1}\bullet\frac{\omega^2-\omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2-1}$の微分を考えます。商の微分の公式から、

$$\frac{df(\omega)}{d\omega}=\frac{\{(\omega^2-\omega_1{}^2)(\omega^2-\omega_3{}^2)\}'(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)-(\omega^2-\omega_1{}^2)(\omega^2-\omega_3{}^2)\{(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)\}'}{(\omega_1{}^2\omega^2-1)^2(\omega_3{}^2\omega^2-1)^2}$$

$$= \frac{(\omega^4 - \omega_3^{\ 2}\omega^2 - \omega_1^{\ 2}\omega^2 + \omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2})'(\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^4 - \omega_1^{\ 2}\omega^2 - \omega_3^{\ 2}\omega^2 + 1)}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$- \frac{(\omega^4 - \omega_3^{\ 2}\omega^2 - \omega_1^{\ 2}\omega^2 + \omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2})(\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^4 - \omega_1^{\ 2}\omega^2 - \omega_3^{\ 2}\omega^2 + 1)'}{(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(4\omega^3 - 2\omega_3^{\ 2}\omega - 2\omega_1^{\ 2}\omega)(\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^4 - \omega_1^{\ 2}\omega^2 - \omega_3^{\ 2}\omega^2 + 1)}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$- \frac{(\omega^4 - \omega_3^{\ 2}\omega^2 - \omega_1^{\ 2}\omega^2 + \omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2})(4\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^3 - 2\omega_1^{\ 2}\omega - 2\omega_3^{\ 2}\omega)}{(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{4\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^7 - 4\omega_1^{\ 2}\omega^5 - 4\omega_3^{\ 2}\omega^5 + 4\omega^3 - 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 4}\omega^5 + 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^3 + 2\omega_3^{\ 4}\omega^3 - 2\omega_3^{\ 2}\omega}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$\underline{- 2\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 2}\omega^5 + 2\omega_1^{\ 4}\omega^3 + 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^3 - 2\omega_1^{\ 2}\omega}$$

$$\frac{- 4\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^7 + 2\omega_1^{\ 2}\omega^5 + 2\omega_3^{\ 2}\omega^5 + 4\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 4}\omega^5 - 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^3 - 2\omega_3^{\ 4}\omega^3}{(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$\underline{+ 4\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 2}\omega^5 - 2\omega_1^{\ 4}\omega^3 - 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2}\omega^3 - 4\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 4}\omega^3 + 2\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 2}\omega + 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 4}\omega}$$

$$= \frac{- 2\omega_1^{\ 2}\omega^5 - 2\omega_3^{\ 2}\omega^5 + 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 4}\omega^5 + 2\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 2}\omega^5 - 4\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 4}\omega^3 + 4\omega^3}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$\frac{+ 2\omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 2}\omega + 2\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 4}\omega - 2\omega_1^{\ 2}\omega - 2\omega_3^{\ 2}\omega}{(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2(\omega_1^{\ 2} + \omega_3^{\ 2})(\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2} - 1)\omega^5 + 4(1 - \omega_1^{\ 4}\omega_3^{\ 4})\omega^3 + 2(\omega_1^{\ 2} + \omega_3^{\ 2})(\omega_1^{\ 2}\omega_3^{\ 2} - 1)\omega}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2}$$

となります。分子は ω の 5 次式ですが、図 2 のグラフを眺めれば分りますが、$f(\omega)$を微分すると 0 になる場所があります。分数式が 0 になるのは、分子が 0 になることが必要かつ十分条件ですから、分子の 5 次式を＝0 と置いた場合、$\omega=0$ と $\omega=\pm\omega_2$ および $\omega=\pm\dfrac{1}{\omega_2}$ を単根として持っています。また、分母は $\omega = \dfrac{1}{\omega_1}$ と $\omega = \dfrac{1}{\omega_3}$ 以外では 0 にならないので、これらの根は有効です。分子は次の様に因数分解出来ます。ただし E は正の定数です。

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{E\omega(\omega - \omega_2)(\omega + \omega_2)\left(\omega - \frac{1}{\omega_2}\right)\left(\omega + \frac{1}{\omega_2}\right)}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2} = \frac{E\omega(\omega^2 - \omega_2^{\ 2})\left(\omega^2 - \frac{1}{\omega_2^{\ 2}}\right)}{(\omega_1^{\ 2}\omega^2 - 1)^2(\omega_3^{\ 2}\omega^2 - 1)^2} \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

①、②、③式より、ω_1、ω_2 、$\frac{1}{\omega_1}$、$\frac{1}{\omega_2}$ を消去します。

$$\omega^2-\omega_2{}^2=P$$

$$(\omega_1{}^2\omega^2-1)(\omega_3{}^2\omega^2-1)=Q$$

$$\omega^2-\frac{1}{\omega_2{}^2}=R$$

と置きます。すると①式は、

$$f^2(\omega)-m^2=\frac{AB\,\omega^2(\omega^2-b^2)P^2}{Q^2}$$

となります。②式は、

$$f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}=\frac{CD\,(\omega^2-\frac{1}{b^2})R^2}{Q^2}$$

となります。上の二式をかけますと、

$$\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}=\frac{ABCDP^2R^2\omega^2(\omega^2-b^2)(\omega^2-\frac{1}{b^2})}{Q^4}$$

になります。③式は、

$$\frac{df(\omega)}{d\omega}=\frac{E\omega PR}{Q^2}$$

です。$\left\{\frac{df(\omega)}{d\omega}\right\}^2=\frac{E^2\omega^2P^2R^2}{Q^4}$ ですので、

$$\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}=\frac{ABCD}{E^2}\left\{\frac{df(\omega)}{d\omega}\right\}^2(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$F\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}=\left\{\frac{df(\omega)}{d\omega}\right\}^2(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

となります。全ての定数をまとめて$\frac{E^2}{ABCD}=F$と表しました。変数分離系の微分方程式が得られました。この微分方程式を解き、微係数を含まない現実の関数の姿を明らかにする必要があります。まず変数を分離しますと、

$$F\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}(d\omega)^2=(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)\{df(\omega)\}^2$$

になります。ω の項を dω の方へ、f(ω)の項を df(ω)の方へ移項しますと、

$$\frac{(d\omega)^2}{(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\dfrac{1}{b^2}\right)}=\frac{\{df(\omega)\}^2}{F\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\dfrac{1}{m^2}\right\}}$$

になります。左辺の分母を展開して並べ替え、再び因数分解しますと、

$$\begin{aligned}(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)&=\omega^4-\frac{1}{b^2}\omega^2-b^2\omega^2+1\\&=1-b^2\omega^2-\frac{1}{b^2}\omega^2+\omega^4\\&=(b^2-\omega^2)\left(\frac{1}{b^2}-\omega^2\right)\end{aligned}$$

になります。同様に、F 以外の右辺の分母を展開して並べ替え、再び因数分解しますと、

$$\begin{aligned}\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}&=f^4(\omega)-\frac{1}{m^2}f^2(\omega)-m^2f^2(\omega)+1\\&=1-m^2f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}f^2(\omega)+f^4(\omega)\\&=\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}\end{aligned}$$

になります。したがって、

$$\frac{(d\omega)^2}{(b^2-\omega^2)\left(\dfrac{1}{b^2}-\omega^2\right)}=\frac{1}{F}\frac{\{df(\omega)\}^2}{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\dfrac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}$$

という式が出来ます。この両辺を$\dfrac{1}{2}$乗しますと、

$$\frac{d\omega}{\sqrt{(b^2-\omega^2)\left(\dfrac{1}{b^2}-\omega^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\dfrac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

になります。ω＝0 のとき f(0)＝m であることに注意して、両辺を積分しますと、（上端下端がこうなる訳は、3 次連立チェビシェフフィルターの章の 6、付録に説明があります。）

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{(b^2-\omega^2)\left(\frac{1}{b^2}-\omega^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \int_m^{f(\omega)} \frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

になります。左辺において、ω＝bx の置換を行います。ω＝bx の両辺を dx で微分しますと、

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{dbx}{dx}$$

$$\frac{d\omega}{dx} = b$$

$$d\omega = bdx$$

になり、dω が bdx に変わります。積分区間は、bx＝0 の $x = \frac{0}{b} = 0$ から、bx＝ω の $x = \frac{\omega}{b}$ までに置換されます。これを 0 から x と表現しますが、x はあくまでも $\frac{\omega}{b}$ です。左辺は、

$$\int_0^{x} \frac{bdx}{\sqrt{(b^2-b^2x^2)\left(\frac{1}{b^2}-b^2x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \int_m^{f(\omega)} \frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

$$\int_0^{x} \frac{bdx}{\sqrt{b^2(1-x^2)\frac{1}{b^2}(1-b^4x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \int_m^{f(\omega)} \frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

$$b\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^4x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \int_m^{f(\omega)} \frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

となります。b＝$\sqrt{k}$ と置きますと、b^2＝k、b^4＝k^2 ですから、

$$\sqrt{k}\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \int_m^{f(\omega)} \frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

となります。次に右辺において f(ω)＝my の置換を行います。f(ω)＝my の両辺を dy で微分しますと、

$$\frac{df(\omega)}{dy} = \frac{dmy}{dy}$$

$$\frac{df(\omega)}{dy} = m$$

$$df(\omega) = mdy$$

になり、df(ω)が mdy に変わります。積分区間は、my＝m の $y = \frac{m}{m} = 1$から、my＝f(ω)の $y = \frac{f(\omega)}{m}$ までに置換されます。これを 1 から y と表現しますが、終端の y はあくまでも $\frac{f(\omega)}{m}$ です。右辺は、

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{F}}\int_1^y \frac{mdy}{\sqrt{(m^2-m^2y^2)\left(\frac{1}{m^2}-m^2y^2\right)}}$$

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{F}}\int_1^y \frac{mdy}{\sqrt{m^2(1-y^2)\frac{1}{m^2}(1-m^4y^2)}}$$

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{m}{\sqrt{F}}\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^4y^2)}}$$

となります。m＝$\sqrt{k_1}$ と置きますと、m^2＝k_1 、m^4＝k_1^2 ですから、

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{F}}\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k}\sqrt{F}}\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$

となります。F、k、k_1 は全て正なので、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{k_1}{kF}}\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$

となります。右辺の積分区間を変更しますと、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{k_1}{kF}}\left\{\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} - \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}\right\}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{k_1}{kF}}\left\{\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} - K_1\right\}$$

になります。$K_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$ の完全楕円積分です。また、$\sqrt{\frac{kF}{k_1}} = \mu$ と置けば、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\mu}\left\{\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} - K_1\right\}$$

と言う式が得られます。この式は、両辺ともヤコビの第一種楕円積分と呼ばれ、積分は出来ません。積分出来ないのでこれ以上微分方程式は解けません。y＝f(x)の形にはなりません。

$$\int_0^x f(x)dx = C\left\{\int_0^y f(y)dy - A\right\}$$

の形であり、楕円積分で表された x が、楕円積分で表された y から定数 A を引いた値の、C 倍になった形です。

楕円関数を用いて計算を続けます。それを予期し、楕円積分標準形になるように変数の置換を行いました。楕円関数については「ヤコビの楕円関数」の章をご参照下さい。

$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ において、x＝sn (u,k)

$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$ において、y＝sn (v,k_1)

とすれば、求める元関数 f(ω)は、

b＝$\sqrt{k}$

b^2＝k

ω＝bx＝$\sqrt{k}$ x＝$\sqrt{k}$ sn(u,k)

m＝$\sqrt{k_1}$

m^2＝k_1

f(ω) ＝my＝$\sqrt{k_1}$ y＝$\sqrt{k_1}$ sn(v,k_1)

$u = \frac{1}{\mu}(v - K_1)$

のように表されます。長々しい計算の目的は、元関数 f(ω)が図 2 のグラフに示す特性になる

ように、各未知数、ω_1、ω_3の値を定めることでした。まだ、ω_1、ω_3の値は出ていません。

正規化角周波数 ω を変化させた時の、元関数 f(ω)の値を楕円関数を用いて求め、表 1 にしてみます。

① $\omega=0\to\omega_1\to\omega_2\to\omega_3\to b=\sqrt{k}\to 1\to\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{k}}\to\frac{1}{\omega_3}\to\frac{1}{\omega_2}\to\frac{1}{\omega_1}\to\infty$を、1 行めに書きます。図 2 のグラフの ω 軸を表します。

② この ω の値から、$x=\frac{\omega}{b}=\frac{\omega}{\sqrt{k}}$により x の値を計算し、2 行目に書きます。

③ つぎに、この x に対応する x＝sn(u,k)の u の値を求め、3 行目に書きます。「ヤコビの楕円関数」の章を参照すれば、ほとんどの値は分ります。すぐには分らない値は、括弧にしておきます。

④ x の各値に対する f(ω)の値を、図 2 のグラフを参照して、4 行目に書き加えます。

⑤ この f(ω)の値に対応する y の値を、$y=\frac{f(\omega)}{m}=\frac{f(\omega)}{\sqrt{k_1}}$により求め、5 行目、6 行目に書きます。

⑥ この y に対応する y＝sn(v,k_1)の v を求め、7 行目に書きます。「ヤコビの楕円関数」の章を参照すれば、ほとんどすぐに埋まります。

表 1 において次の値、

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\qquad K'=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$K_1=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}\qquad K_1'=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1'^2y^2)}}$$

は、それぞれの母数における完全楕円積分値を表します。

表 1

ω	0	ω_1	ω_2	ω_3	B＝$\sqrt{k}$	1
x＝ω/$\sqrt{k}$	0	$\omega_1/\sqrt{k}$	$\omega_2/\sqrt{k}$	$\omega_3/\sqrt{k}$	1	1/$\sqrt{k}$
u	0	(　)	(　)	(　)	K	K＋jK'/2
f(ω)	m	0	－m	0	m	1
y＝f(ω)/m	1	0	－1	0	1	1/m
y＝f(ω)/$\sqrt{k_1}$	1	0	－1	0	1	1/$\sqrt{k_1}$
v	K_1	$2K_1$	$3K_1$	$4K_1$	$5K_1$	$5K_1$＋jK_1'/2

ω	$1/b=1/\sqrt{k}$	$1/\omega_3$	$1/\omega_2$	$1/\omega_1$	∞
x	1/k	$1/\omega_3\sqrt{k}$	$1/\omega_2\sqrt{k}$	$1/\omega_1\sqrt{k}$	∞
u	K＋jK’	（ ）	（ ）	（ ）	jK’
f(ω)	1/m	±∞	－1/m	±∞	1/m
y	$1/m^2$	±∞	$-1/m^2$	±∞	$1/m^2$
y	$1/k_1$	±∞	$-1/k_1$	±∞	$1/k_1$
v	$5K_1+jK_1'$	$4K_1+jK_1'$	$3K_1+jK_1'$	$2K_1+jK_1'$	K_1+jK_1'

表 1 では、ω_1、ω_2 および ω_3、それと同等の、$\frac{1}{\omega_3}$、$\frac{1}{\omega_2}$、$\frac{1}{\omega_1}$ 欄が括弧です。表 1 を眺めて気が付くことを列挙します。

・ω は正規化された周波数なので、実数です。x も ω を実数 $\sqrt{k}$ で割ったものなので、実数です。

・積分値 u の値は、x が 1 までは実数ですが、x が 1 を超えると複素数になります。

・f(ω)は、ある正規化周波数での出力なので実数です。y も f(ω)を実数 m で割ったものなので実数です。

・積分値 v の値は、1 から－1 の間、つまり f(ω)が m から－m 間を動いている場合は、実数ですが、それを超える部分を動くときには複素数になります。

・u＝ 0＋j0 のとき $v=K_1+j0$ です。

・u＝ K＋j0 のとき $v=5K_1+j0$ です。

・u＝ K＋j K’/2 のとき $v=5K_1+j\,K_1'/2$ です。

・u＝ K＋j K’のとき $v=5K_1+j\,K_1'$です。

・u＝ 0＋j K’のとき $v=K_1+j\,K_1'$です。

この中に、u と v の関係が隠されています。③で求められず、括弧にした表 1 の中の値は、次のようにして求めることが出来ます。

u の実数部が K の時、v の実数部は $5K_1$ である。

ことと、

u の虚数部が K’の時、v の虚数部は K_1'である。

こと。さらに、

$$u=\frac{1}{\mu}(v-K_1)$$

であることから、

$$K+jK'=\frac{1}{\mu}(5K_1-K_1+jK_1')=\frac{1}{\mu}4K_1+\frac{1}{\mu}jK_1'$$

が得られます。右辺を見てから左辺を見ます。v の実数部から K_1 を引いたものは $4K_1$ です。

$4K_1$ に $\frac{1}{\mu}$ をかければ u の実数部の K と等しくなり、v の虚数部 K_1'に $\frac{1}{\mu}$ をかければ、u の虚数部 K'と等しくなるのです。したがって、

$$K = \frac{1}{\mu} 4K_1$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K}{4K_1}$$

であり、

$$K' = \frac{1}{\mu} K_1'$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K'}{K_1'}$$

です。つまり、

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K}{4K_1} = \frac{K'}{K_1'}$$

となります。

$$u = u_1 + ju_2$$
$$v = v_1 + jv_2$$

と置きますと、

$$u_1 = \frac{K}{4K_1}(v_1 - K_1)$$

$$u_2 = \frac{K'}{K_1'} v_2$$

です。この関係を用いれば、表 1 の括弧内の値はただちに求められます。表 1 の ω が、

ω_1 の時、v＝$2K_1$＋j0 ですから、$u = \frac{K}{4K_1}(2K_1 - K_1) + j\frac{K'}{K_1'} \bullet 0 = \frac{K}{4}$

ω_2 の時、v＝$3K_1$＋j0 ですから、$u = \frac{K}{4K_1}(3K_1 - K_1) + j\frac{K'}{K_1'} \bullet 0 = \frac{2K}{4}$

ω_3 の時、v＝$4K_1$＋j0 ですから、$u = \frac{K}{4K_1}(4K_1 - K_1) + j\frac{K'}{K_1'} \bullet 0 = \frac{3K}{4}$

$\dfrac{1}{\omega_3}$ の時、v＝4K_1＋jK_1' ですから、$u=\dfrac{K}{4K_1}(4K_1-K_1)+j\dfrac{K'}{K_1'}\bullet K_1'=\dfrac{3K}{4}+jK'$

$\dfrac{1}{\omega_2}$ の時、v＝3K_1＋jK_1' ですから、$u=\dfrac{K}{4K_1}(3K_1-K_1)+j\dfrac{K'}{K_1'}\bullet K_1'=\dfrac{2K}{4}+jK'$

$\dfrac{1}{\omega_1}$ の時、v＝2K_1＋jK_1' ですから、$u=\dfrac{K}{4K_1}(2K_1-K_1)+j\dfrac{K'}{K_1}\bullet K_1'=\dfrac{K}{4}+jK'$

となります。u と v と言う sn の変数どうしは、上記関係で結ばれます。このようにして表2が完成しました。

表 2

	0	ω_1	ω_2	ω_3	b=$\sqrt{k}$	1
x＝$\omega/\sqrt{k}$	0	$\omega_1/\sqrt{k}$	$\omega_2/\sqrt{k}$	$\omega_3/\sqrt{k}$	1	$1/\sqrt{k}$
u	0	K/4	2K/4	3K/4	K	K＋jK'/2
f(ω)	m	0	－m	0	m	1
y＝f(ω)/m	1	0	－1	0	1	1/m
y＝f(ω)/$\sqrt{k_1}$	1	0	－1	0	1	$1/\sqrt{k_1}$
v	K_1	2K_1	3K_1	4K_1	5K_1	5K_1＋jK_1'/2

ω	1/b＝$1/\sqrt{k}$	$1/\omega_3$	$1/\omega_2$	$1/\omega_1$	∞
x	1/k	$1/\omega_3\sqrt{k}$	$1/\omega_2\sqrt{k}$	$1/\omega_1\sqrt{k}$	∞
u	K＋jK'	3K/4＋jK'	2K/4＋jK'	K/4＋jK'	jK'
f(ω)	1/m	±∞	－1/m	±∞	1/m
y	$1/m^2$	±∞	$-1/m^2$	±∞	$1/m^2$
y	$1/k_1$	±∞	$-1/k_1$	±∞	$1/k_1$
v	5K_1＋jK_1'	4K_1＋jK_1'	3K_1＋jK_1'	2K_1＋jK_1'	K_1＋jK_1'

k は、過渡帯域に突入する通過域端正規化角周波数 b（過渡帯域を抜ける阻止域先端正規化角周波数は$\dfrac{1}{b}$）を 2 乗したものです。b＝$\sqrt{k}$ です。したがって k は、過渡帯域幅を決める定数です。

k_1 は通過域うねりの絶対値、m（阻止域うねりの絶対値は$\dfrac{1}{m}$）を 2 乗したものです。m＝$\sqrt{k_1}$ です。したがって k_1 は、うねりを決める定数です。

この両者を母数とする楕円積分値が、定数$\dfrac{1}{\mu}$で関係付けられていると言うことは、過渡

帯域幅を先に決めれば、うねりは決まってしまい、うねりを先に決めれば、過渡帯域幅は決まってしまうと言うことを表しています。

それは、次のことからも分ります。先ほど

$$\frac{K}{4K_1} = \frac{K'}{K_1'}$$

と言う式がありましたが、この式を次のように書き換えます。

$$4K_1K' = KK_1'$$

$$\frac{4K_1K'}{K} = K_1'$$

$$4\frac{K'}{K} = \frac{K_1'}{K_1}$$

目次にもどり、完全楕円積分の表のページをご覧下さい。母数 k による完全楕円積分値 K の表です。副母数 k'による完全楕円積分値 K'との比、$\frac{K'}{K}$ も提示されています。$\frac{K'}{K}$ は母数 k によって一つに決まることを示しています。

全く同じことが、母数 k_1 による完全楕円積分値 K_1 と、副母数 k_1'による完全楕円積分値 K_1'との比、$\frac{K_1'}{K_1}$ にも当てはまります。$\frac{K_1'}{K_1}$ も母数 k_1 によって、一つに決まります。

$\frac{K'}{K}$ の 4 倍が、$\frac{K_1'}{K_1}$ に一致しなくてはいけないのですから、過渡帯域幅を先に決めれば、うねりは決まってしまい、うねりを先に決めれば、過渡帯域幅は決まってしまうと分ります。

完成した表 2 により図 2、ω 軸上の各点を求めますと、次のようになります。

$$\omega_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{1}{4}K, k\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2}{4}K, k\right)$$

$$\omega_3 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{3}{4}K, k\right)$$

すべて、母数 k の楕円関数により決まります。うねりの大きさ m の値は、ω=0 のときの f(0)=m から求められます。すなわち、

$$m = f(0) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2\omega^2 - 1} \bullet \frac{\omega^2 - \omega_3^2}{\omega_3^2\omega^2 - 1}\right]_{\omega=0}$$

$$= \omega_1{}^2 \omega_3{}^2$$

$$= k^2 \mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{4}K, k\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{3}{4}K, k\right)$$

です。元関数のうねりの大きさも k_1 の関数でありながら、k の値により、ある大きさにただ１つ決まってしまいます。同様に母数 k の関数になっています。

3、周波数伝達関数の絶対値の２乗を求める

以上で元関数 f(ω)の、すべての未知数が定まりました。フィルターとしての周波数伝達関数の絶対値の２乗である、$y^2(\omega)$を求めます。周波数伝達関数の絶対値の２乗のことを、ここでは略して２乗 ω 特と呼びます。

「フィルター近似とは」の章で説明しましたが、２乗 ω 特 $y^2(\omega)$は、元関数 f(ω)を２乗して１を足し逆数にしたものです。

２乗 ω 特の平方根が、周波数伝達関数の絶対値になります。周波数伝達関数の絶対値、つまりただの ω 特が、正規化角周波数でのフィルターの利得を表したものです。

元関数の図２と、フィルターの図１の違いはここで生じます。図２の中心部の出っ張りが、図１で窪んでいる理由です。

２乗 ω 特は、

$$y^2(\omega) = \frac{1}{1 + H^2 f^2(\omega)}$$

$$= \frac{1}{1 + H^2\left(\dfrac{\omega^2 - \omega_1{}^2}{\omega_1{}^2\omega^2 - 1} \bullet \dfrac{\omega^2 - \omega_3{}^2}{\omega_3{}^2\omega^2 - 1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + H^2 \dfrac{\left\{\omega^2 - k\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{4}K, k\right)\right\}^2 \left\{\omega^2 - k\mathrm{sn}^2\left(\frac{3}{4}K, k\right)\right\}^2}{\left\{k\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{4}K, k\right)\omega^2 - 1\right\}^2 \left\{k\mathrm{sn}^2(\left(\frac{3}{4}K, k\right))\omega^2 - 1\right\}^2}}$$

となります。分母の分数を通分しますと、

$$= \frac{1}{\dfrac{\left\{k\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{4}K, k\right)\omega^2 - 1\right\}^2 \left\{k\mathrm{sn}^2\left(\frac{3}{4}K, k\right)\omega^2 - 1\right\}^2 + H^2\left\{\omega^2 - k\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{4}K, k\right)\right\}^2 \left\{\omega^2 - k\mathrm{sn}^2\left(\frac{3}{4}K, k\right)\right\}^2}{\left\{k\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{4}K, k\right)\omega^2 - 1\right\}^2 \left\{k\mathrm{sn}^2\left(\frac{3}{4}K, k\right)\omega^2 - 1\right\}^2}}$$

になります。f(ω)は、f(ω)＝my＝$\sqrt{k_1}$ y＝$\sqrt{k_1}$ sn(v,k_1)とも表されるので、

$$= \frac{1}{1+H^2\{\sqrt{k_1}sn(v,k_1)\}^2}$$

$$= \frac{1}{1+H^2k_1sn^2(v,k_1)}$$

も明らかに 2 乗 ω 特です。$m^2=k_1$ ですから、

$$= \frac{1}{1+H^2m^2sn^2(v,k_1)}$$

とも表せます。周波数伝達関数の絶対値 y(ω)、略して ω 特は $y^2(\omega)$の平方根ですから、

$$y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$$

となります。

4、H について

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特で突然出てきた、H とは何かについて説明します。

(1)過渡帯域幅を、優先的に設計する場合の H

設計する際、ユーザー側からの要求仕様があります。過渡帯域幅の要求仕様により、$b^2=k$ を先に決定した場合、$\frac{1}{\mu}(v-K_1)=u$ の関係から k_1 も決まり、元関数 f(ω)の通過域うねりの値 m 、および元関数の阻止域うねりの値 $\frac{1}{m}$ は、自動的に決定されます。

ユーザー側からの要求仕様の「通過域での許容最大減衰値」あるいは「阻止域での許容最小減衰値」から、周波数伝達関数を逆に計算して得られる、元関数への要求うねりの大きさとは必ず食い違います。

うねりの大きさを変える為、元関数 f(ω)の外側に H を付けて調整します。

H とは、元関数 f(ω)の通過域うねりの値 m を、ユーザー要求仕様の「通過域での許容最大減衰値」から得られる、元関数への要求うねりに合わせる為の係数です。

または、元関数 f(ω)の阻止域うねりの値 $\frac{1}{m}$ を、ユーザー要求仕様の「阻止域での許容最小減衰値」から得られる、元関数への要求うねりに合わせる為の係数です。

H をつけることで、上記許容値の片方とは一致出来ますが、両方とも一致は出来ないです。

過渡帯域幅を先に決めてしまうと、「通過域での許容最大減衰値」あるいは「阻止域での許容最小減衰値」の、両方のユーザー要求仕様を満足させる H は無いです。

(2) 通過域および阻止域の許容減衰量を、優先的に設計する場合の H

設計する際、ユーザーの要求仕様「通過域での許容最大減衰値」と「阻止域での許容最小減衰値」の両方を満足したいとします。

元関数 f(ω)の通過域うねりの極大値は m、阻止域うねりの値は $\frac{1}{m}$ です。

ユーザー要求仕様の「通過域での許容最大減衰値」から、周波数伝達関数を逆に計算して出て来る元関数への通過域うねりの要求値、例えばαと、ユーザー要求仕様の「阻止域での許容最小減衰値」から、周波数伝達関数を逆に計算して出て来る元関数への阻止域うねり要求値、例えばβがあります。

m に H をかけるとαになり、$\frac{1}{m}$ に H をかけるとβになる。そのような m と H を決定すれば良いです。

これにより、k_1 値が先に決定されます。$\frac{1}{\mu}(v - K_1) = u$ の関係から、k も一方的に決定され、過渡帯域幅が勝手に決まってしまいます。ユーザー要求仕様の「過渡帯域幅」が満足されるか、吟味が必要となります。

具体的に H の求め方について研究します。

(1)過渡帯域幅優先の場合

過渡帯域幅の要求仕様により、b^2＝k を先に決定した場合、$u = \frac{1}{\mu}v - K_1$ の関係から、k_1 も決まり、元関数 f(ω)の通過域うねりの値 m、 および元関数 f(ω) の阻止域うねりの値、$\frac{1}{m}$ は自動的に決定されます。

①過渡帯域幅と通過域での許容最大減衰値を、ユーザー仕様に合わせる場合

ユーザーの要求仕様で決まる「通過域での許容最大減衰値」（うねりの許容値）を負の数ーA_P[dB]としますと、通過域うねりが一番大きな部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は次の様になります。

$$-A_P = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}[\mathrm{dB}]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}=\frac{-A_P}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN}=10^{\frac{-A_P}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT}=\frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}}=\left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1}=10^{\frac{A_P}{20}}$$

一方、フィルターの周波数伝達関数は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}=\frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)}=\frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(10^{\frac{A_P}{20}}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

になります。通過域内での元関数 f(ω)の、うねりの値の 2 乗は $f^2(0)$ ＝m^2 ですので、

$$H^2m^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$H^2=\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2}$$

となります。H はユーザー仕様側の、元関数への通過域うねり要求値を、元関数側の通過域うねりの値で割ったものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの阻止域における最小減衰量、ーA_S[dB]は次のように計算されます。その場所の元関数 f(ω)における値が、$f^2\left(\frac{1}{\omega_2}\right)=\frac{1}{m^2}$ですので、

$$-A_S=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2\left(\frac{1}{\omega_2}\right)}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2\bullet\frac{1}{m^2}}}$$

$$= 20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2}\bullet\dfrac{1}{m^2}}} = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^4}}}$$

となります。この値がユーザーの要求仕様の「阻止域での許容最小減衰値」を満たすか、吟味が必要です。

②過渡帯域幅と阻止域での許容最小減衰値を、ユーザー仕様に合わせる場合

ユーザーの要求仕様で決まる「阻止域での許容最小減衰値」を負の数－A_S[dB]としますと、阻止域うねり部分（図 1 の右の山 2 つ）での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、次の様になります。

$$-A_S = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[dB]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN} = \frac{-A_S}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_S}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT} = \frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_S}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_S}{20}}$$

一方、フィルターの周波数伝達関数は、$\dfrac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)} = \frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_S}{20}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1$$

になります。阻止域内での元関数 f(ω)の、うねりの値の 2 乗は、$f^2\left(\frac{1}{\omega_2}\right)=\frac{1}{m^2}$ですので、

$$H^2\frac{1}{m^2}=10^{\frac{A_S}{10}}-1$$

$$H^2=\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{\frac{1}{m^2}}=\left(10^{\frac{A_S}{10}}-1\right)m^2$$

となります。H は、ユーザー仕様側の元関数への阻止域うねり要求値を、元関数側の阻止域うねりの値で割ったもの、あるいはユーザー仕様側の元関数への阻止域うねり要求値に、元関数側の通過域うねりの値をかけたものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの通過域における最大減衰量$-A_P$[dB]は、次のように計算されます。その場所の元関数 f(ω)における値が、$f^2(0)=m^2$ですので、

$$-A_P=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(0)}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2m^2}}$$

$$=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{\frac{1}{m^2}}\bullet m^2}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\left(10^{\frac{A_S}{10}}-1\right)m^4}}$$

となります。この値がユーザー仕様の「通過域での許容最大減衰値」を満たすか、吟味が必要です。

(2) 通過域および阻止域の許容減衰量優先の場合

ユーザーの要求仕様で決まる「通過域での許容最大減衰値」（通過域うねりの許容値）を負の数$-A_P$[dB]としますと、通過域うねり最大部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_P=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[dB]$$

$$\frac{IN}{OUT}=\frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}}=\left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1}=10^{\frac{A_P}{20}}$$

となります。周波数伝達関数は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}=\frac{OUT}{IN}$$

$$H^2f^2(\omega)=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

になります。(1)の①と全く同じです。これは通過域最大減衰地点で、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき、ユーザーからの要求値です。

次に、ユーザーの要求仕様で決まる「阻止域での許容最小減衰値」を負の数ーA_S[dB]としますと、阻止域うねり部分（図 1 の右の山 2 つ）での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_S=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[\mathrm{dB}]$$

$$\frac{IN}{OUT}=\frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}}=\left(10^{\frac{-A_S}{20}}\right)^{-1}=10^{\frac{A_S}{20}}$$

となります。周波数伝達関数は、$\dfrac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}=\frac{OUT}{IN}$$

$$H^2f^2(\omega)=10^{\frac{A_S}{10}}-1$$

になります。(1)の②と全く同じです。これは阻止域最小減衰地点で、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき、ユーザーからの要求値です。

通過域最大減衰地点および阻止域最小減衰地点で、元関数 f(ω)の 2 乗値 $f^2(\omega_2)$および $f^2\left(\dfrac{1}{\omega_2}\right)$が取ることの出来る値は、$m^2$ および $\dfrac{1}{m^2}$ です。したがって、

$$H^2m^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1 \cdot\cdot\cdot ①$$

$$H^2\frac{1}{m^2}=10^{\frac{A_S}{10}}-1 \cdot\cdot\cdot ②$$

が成り立ちます。②から、

$$m^2=\frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}}-1}$$

です。①に代入し、

$$H^2\frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}}-1}=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$H^4 = \left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)$$

$$H^2 = \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}$$

です。①から、

$$m^2 = \frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}} = k_1$$

が成り立ちます。または②から、

$$m^2 = \frac{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}} = k_1$$

が成り立ちます。

ここで決定されたことは、「通過域での許容最大減衰値」と「阻止域での許容最小減衰値」の両方が、ユーザーの要求仕様通りのフィルターを作る場合の、H の値と元関数 f(ω)の取るべき通過域うねりの大きさです。これにより、k_1 値が先に決定され、$\frac{1}{\mu}(v - K_1) = u$ の関係から k も勝手に決定されます。k は過渡帯域幅を決めます。その k がユーザーの要求仕様の過渡帯域幅を満たすか、吟味が必要になります。

このように、連立チェビチェフフィルターの設計には限られた自由さしか無いです。連立チェビシェフフィルターの設計の進め方として「連立チェビシェフフィルターソフトの設計」の章において、ユーザーとのインターフェースについて記述しています。

5、次の作業

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特とは、正規化角周波数 ω で記述されたフィルターの利得式です。ω に比例した利得は、正弦波を微分しなければ得られません。伝達関数に s があれば、正弦波は微分され ω 倍されます。同様に s^n があれば、正弦波は n 回微分され ω^n 倍されます。「s とは何か」の章をご参照下さい。

2 乗 ω 特を s の関数である伝達関数に直す作業が必要です。その初めが 2 乗 ω 特を因数

分解し、1 次と 2 次の関数の積に分解する作業です。このことについて、章を改めて書きます。

目次へ戻る