連立チェビシェフフィルター3 次の場合　(元関数改良 2006 年 5 月 17 日)　　目次へ戻る

2024.12.29　訂正

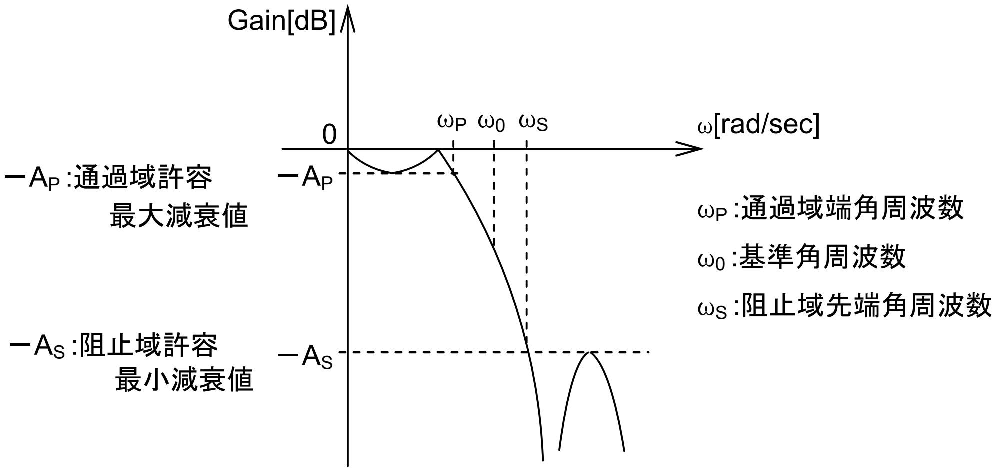


図 1 : 3 次連立チェビシェフ　ローパスフィルター

1、元関数

図 1 が 3 次連立チェビシェフフィルターの特性図ですが､このフィルターを作る為の元になる関数、つまり元関数は、入力する角周波数を ω、関数の値を f(ω)とした場合、次のようになることが分っています｡｢分数関数を作る｣の章で検討済みです｡(元関数については｢フィルター近似とは｣の章をご参照下さい｡)

$$f(\omega) = \frac{\omega(\omega^2 - {\omega_2}^2)}{{\omega_2}^2\omega^2 - 1}$$

元関数から、

① $\omega = 0$ と $\omega^2 = {\omega_2}^2$ で、この関数は零になる。

② $\omega = \infty$ と $\omega^2 = \frac{1}{{\omega_2}^2}$ で、この関数は極になる。

ことが分ります。(ω＝∞での極については、本章の 6、付録に説明があります。)

次に、この元関数の ω に $\frac{1}{\omega}$ を入力してみますと、

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega^2} - {\omega_2}^2\right)}{\frac{{\omega_2}^2}{\omega^2} - 1} = \frac{\frac{1}{\omega}\left(\frac{1 - {\omega_2}^2\omega^2}{\omega^2}\right)}{\frac{{\omega_2}^2 - \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \bullet \frac{1 - {\omega_2}^2\omega^2}{\omega^2} \bullet \frac{\omega^2}{{\omega_2}^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega} \bullet \frac{1 - {\omega_2}^2\omega^2}{{\omega_2}^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{1}{\omega} \bullet \frac{-(1-{\omega_2}^2\omega^2)}{-({\omega_2}^2-\omega^2)} = \frac{1}{\omega} \bullet \frac{{\omega_2}^2\omega^2-1}{\omega^2-{\omega_2}^2} = \frac{{\omega_2}^2\omega^2-1}{\omega(\omega^2-{\omega_2}^2)} = \frac{1}{\dfrac{\omega(\omega^2-{\omega_2}^2)}{{\omega_2}^2\omega^2-1}}$$

になります。ω の逆数を入力しますと、関数の値も ω を入力したときの逆数になることが分ります。例えば 0.2 を入力した時と $\frac{1}{0.2}=5$ を入力した時とでは、関数の値も逆数になり、f(0.2)が a なら f(5)は $\frac{1}{a}$ になります。両者をかければ 1 になります。

連立チェビシェフフィルターの設計でも、各周波数は生（なま）のものを用いないで、スケーリングを行い、正規化角周波数で表します。（スケーリングの章をご参照下さい。）

正規化角周波数＝生角周波数×縮尺

です。他のフィルターでは、$\dfrac{1}{\text{通過域端生角周波数}}$ を縮尺として使用しますが、連立チェビシェフフィルターでは、$\dfrac{1}{\text{通過域端生角周波数}}$ を縮尺にしません。通過域端角周波数の逆数が阻止域先端角周波数になるからです。通過域端が 1 [rad/sec]になると、阻止域先端角周波数も 1 [rad/sec]になり、過渡域が無く困ります。もう少し高い角周波数、つまり通過域端と阻止域先端の間に 1 [rad/sec]の基準角周波数を置くことになります。図 1 をご覧下さい。

設計仕様として与えられる、通過域端生角周波数を $2\pi f_P$ [rad/sec]、同じく阻止域先端生角周波数を $2\pi f_s$ [rad/sec]、正規化された時 1 [rad/sec]になる基準生角周波数を、仮に $2\pi f_0$ [rad/sec]としますと、$\dfrac{1}{\text{基準生角周波数}}$ を縮尺として正規化角周波数は、

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{2\pi f_P}{2\pi f_0} \qquad \omega_P：\text{正規化された通過域端角周波数}$$

$$\omega_S = 2\pi f_S \bullet \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{2\pi f_S}{2\pi f_0} \qquad \omega_S：\text{正規化された阻止域先端角周波数}$$

になります。連立チェビシェフフィルターでは、正規化された通過域端角周波数の逆数が、正規化された阻止域先端角周波数になりますから、

$$\frac{1}{\omega_P} = \omega_S$$

$$\frac{2\pi f_0}{2\pi f_P} = \frac{2\pi f_S}{2\pi f_0}$$

$$2^2\pi^2 f_0{}^2 = 2^2\pi^2 f_P f_S$$

$$2\pi f_0 = \pm 2\pi\sqrt{f_P f_S}$$

となります。1 [rad/sec]を、基準生角周波数 $2\pi f_0$ [rad/sec]で割ったものが縮尺になります。現実世界ではマイナスの周波数は無いので、正号の方を基準生角周波数にします。つまり、

$$縮尺 = \frac{1[\mathrm{rad / sec}]}{基準生角周波数\quad[\mathrm{rad / sec}]}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{通過域端生周波数 \bullet 阻止域先端生周波数}}$$

正規化角周波数 [rad/sec]＝生角周波数 [rad/sec]×縮尺

です。

連立チェビシェフフィルターを設計する為、元関数 $f(\omega)$について次の様に決めます。

① 通過域うねりの絶対値を m とする。通過域ではこれを超えない。

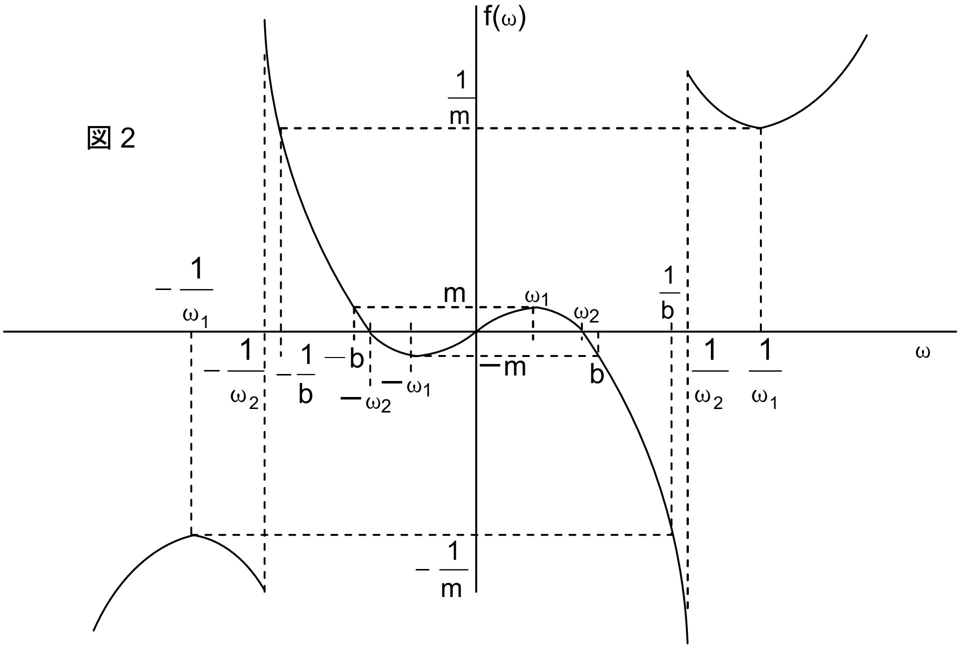
② 通過域うねりの絶対値 m を超え、過渡帯域に入る通過域端正規化角周波数を b とする。
$b = \omega_P$ である。

③ 過渡帯域を抜け、阻止域うねりの絶対値 $\frac{1}{m}$ に突入する阻止域先端正規化角周波数を、$\frac{1}{b}$ とする。$\frac{1}{b} = \frac{1}{\omega_P} = \omega_S$ である。

④ 阻止域うねりの絶対値を $\frac{1}{m}$ とする。阻止域ではこれより小さくならない。通過域の減衰最大値の逆数は、阻止域での減衰最小値になるからである。

ω に対する元関数 $f(\omega)$の変化をグラフにして示せば、図 2 のような奇関数になります。マイナスの周波数もあると考えます。

図 2



2、未知数の決定

元関数 f(ω)が、図 2 のグラフと同じになるようにしたいです。$f(\omega)=\dfrac{\omega(\omega^2-\omega_2^{\,2})}{\omega_2^{\,2}\omega^2-1}$ の未知数 ω_2 を求める為、次のように式を立てます。

まず、グラフを全体に m 下げる、f(ω)－m を考えますと、

$$
\begin{aligned}
f(\omega)-m &= \frac{\omega(\omega^2-\omega_2^{\,2})}{\omega_2^{\,2}\omega^2-1}-m\\
&= \frac{\omega(\omega^2-\omega_2^{\,2})-m(\omega_2^{\,2}\omega^2-1)}{\omega_2^{\,2}\omega^2-1}\\
&= \frac{\omega^3-m\omega_2^{\,2}\omega^2-\omega_2^{\,2}\omega+m}{\omega_2^{\,2}\omega^2-1}
\end{aligned}
$$

になります。グラフを m だけ下げてみれば分るように、上式には 0 になる場所があります。

分数式が 0 になるのは、分子が 0 になることが必要かつ十分条件ですから、分子の 3 次式を＝0 と置いた場合、$\omega=+\omega_1$ を重根とし、$\omega=-b$ を単根として持っている筈です。また、分母は $\omega=\dfrac{1}{\omega_2^{\,2}}$ 以外では 0 にならないので、これらの根は有効です。したがって、f(ω)－m は次式の様に、分子を因数分解した形で書き換えることが出来ます。ただし A は因数分解で出てくる定数です。この定数は正の定数です。負の定数ではグラフがひっくり返るの

で良くありません。

$$f(\omega)-m=\frac{A(\omega-\omega_1)^2(\omega+b)}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$$

次に、グラフを全体に m 上げる、f(ω)＋m を考えます。前式と全く同様に、分子を＝0 と置いた場合、ω＝－ω_1 を重根とし、ω＝＋b を単根として持ちますので、次式が成り立ちます。ただし B は正の定数です。

$$f(\omega)+m=\frac{B(\omega+\omega_1)^2(\omega-b)}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$$

上二式の右辺どうし、左辺どうしをかけますと、

$$\{f(\omega)-m\}\{f(\omega)+m\}=\frac{AB(\omega-\omega_1)^2(\omega+\omega_1)^2(\omega+b)(\omega-b)}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}$$

$$f^2(\omega)-m^2=\frac{AB(\omega^2-\omega_1{}^2)^2(\omega^2-b^2)}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}\quad\cdot\cdot\cdot ①$$

になります。今度はグラフを$\frac{1}{m}$下げる、$f(\omega)-\frac{1}{m}$を考えますと、

$$f(\omega)-\frac{1}{m}=\frac{\omega(\omega^2-\omega_2{}^2)}{\omega_2{}^2\omega^2-1}-\frac{1}{m}$$

$$=\frac{\omega(\omega^2-\omega_2{}^2)-\frac{1}{m}(\omega_2{}^2\omega^2-1)}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$$

$$=\frac{\omega^3-\frac{1}{m}\omega_2{}^2\omega^2-\omega_2{}^2\omega+\frac{1}{m}}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$$

になります。グラフを参照して、上式には 0 になる場所があります。分数式が 0 になるのは、分子が 0 になることが必要かつ十分条件ですから、分子の 3 次式を＝0 と置いた場合、$\omega=+\frac{1}{\omega_1}$を重根とし、$\omega=-\frac{1}{b}$を単根として持っている筈です。また、分母は$\omega=\frac{1}{\omega_2{}^2}$以

外では0にならないので、これらの根は有効です。したがって、$f(\omega)-\dfrac{1}{m}$ 式は次式の様に、

分子を因数分解した形で書き換えることが出来ます。ただしCは正の定数です。

$$f(\omega)-\frac{1}{m}=\frac{C\left(\omega-\dfrac{1}{\omega_1}\right)^2\left(\omega+\dfrac{1}{b}\right)}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$$

更にグラフを $\dfrac{1}{m}$ 上げる $f(\omega)+\dfrac{1}{m}$ を考えますと、前式と全く同様に、分子を＝0と置いた場合、$\omega=-\dfrac{1}{\omega_1}$ を重根とし、$\omega=+\dfrac{1}{b}$ を単根として持っています。次式が成り立ちます。ただしDは正の定数です。

$$f(\omega)+\frac{1}{m}=\frac{D\left(\omega+\dfrac{1}{\omega_1}\right)^2\left(\omega-\dfrac{1}{b}\right)}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$$

上二式の右辺どうし、左辺どうしをかけますと、

$$\left\{f(\omega)-\frac{1}{m}\right\}\left\{f(\omega)+\frac{1}{m}\right\}=\frac{CD\left(\omega-\dfrac{1}{\omega_1}\right)^2\left(\omega+\dfrac{1}{\omega_1}\right)^2\left(\omega+\dfrac{1}{b}\right)\left(\omega-\dfrac{1}{b}\right)}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}$$

$$f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}=\frac{CD\left(\omega^2-\dfrac{1}{\omega_1{}^2}\right)^2\left(\omega^2-\dfrac{1}{b^2}\right)}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}\quad\cdots②$$

になります。最後に元関数 $f(\omega)=\omega\dfrac{\omega^2-\omega_2{}^2}{\omega_2{}^2\omega^2-1}$ の微分を考えます。商の微分の公式から、

$$\frac{df(\omega)}{d\omega}=\frac{(\omega^3-\omega_2{}^2\omega)'(\omega_2{}^2\omega^2-1)-(\omega^3-\omega_2{}^2\omega)(\omega_2{}^2\omega^2-1)'}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}$$

$$=\frac{(3\omega^2-\omega_2{}^2)(\omega_2{}^2\omega^2-1)-(\omega^3-\omega_2{}^2\omega)\bullet 2\omega_2{}^2\omega}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}$$

$$=\frac{\omega_2{}^2\omega^4+(\omega_2{}^4-3)\omega^2+\omega_2{}^2}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2}$$

となります。グラフを見ますと、f(ω)を微分すると 0 になる場所があります。分数式が 0 になるのは、分子が 0 になることが必要かつ十分条件ですから、分子の 4 次式を＝0 と置いた場合、根は $\omega = \pm\omega_1$ と $\pm\dfrac{1}{\omega_1}$ になります。分子の 4 次式は因数分解出来、

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{E(\omega-\omega_1)(\omega+\omega_1)\left(\omega-\dfrac{1}{\omega_1}\right)\left(\omega+\dfrac{1}{\omega_1}\right))}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2} = \frac{E(\omega^2-\omega_1{}^2)\left(\omega^2-\dfrac{1}{\omega_1{}^2}\right)}{(\omega_2{}^2\omega^2-1)^2} \quad \cdot\cdot\cdot③$$

となります。ただし E は正の定数です。①式、②式、③式から、ω_1, ω_2, $\dfrac{1}{\omega_1}$ を消去します。

$$\omega^2-\omega_1{}^2 = P \text{、} \omega_2{}^2\omega^2-1 = Q \text{、} \omega^2-\frac{1}{\omega_1{}^2} = R$$

とおきます。すると①式は、

$$f^2(\omega)-m^2 = \frac{ABP^2(\omega^2-b^2)}{Q^2}$$

となります。②式は、

$$f^2(\omega)-\frac{1}{m^2} = \frac{CDR^2\left(\omega^2-\dfrac{1}{b^2}\right)}{Q^2}$$

となります。上二式をかけますと、

$$\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\} = \frac{ABCDP^2R^2(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\dfrac{1}{b^2}\right)}{Q^4}$$

になります。③式は、

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{EPR}{Q^2}$$

です。$\left\{\dfrac{df(\omega)}{d\omega}\right\}^2 = \dfrac{E^2P^2R^2}{Q^4}$ ですので、

$$\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\} = \frac{ABCD}{E^2}\left\{\frac{df(\omega)}{d\omega}\right\}^2(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$F\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\} = \left\{\frac{df(\omega)}{d\omega}\right\}^2(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

となりました。全ての定数をまとめて、$\dfrac{E^2}{ABCD} = F$ と表しています。変数分離系の微分方程式が得られました。微分方程式を解く為に、まず変数を分離しますと、

$$F\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}(d\omega)^2=\{df(\omega)\}^2(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

になります。ω の項を dω の方へ、f(ω)の項を df(ω)の方へ移項しますと、

$$\frac{(d\omega)^2}{(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)}=\frac{\{df(\omega)\}^2}{F\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}}$$

になります。左辺の分母を展開して並べ替え、再び因数分解しますと、

$$(\omega^2-b^2)\left(\omega^2-\frac{1}{b^2}\right)=\omega^4-\frac{1}{b^2}\omega^2-b^2\omega^2+1$$

$$=1-b^2\omega^2-\frac{1}{b^2}\omega^2+\omega^4$$

$$=(b^2-\omega^2)\left(\frac{1}{b^2}-\omega^2\right)$$

になります。同様に、F 以外の右辺の分母を展開して並べ替え、再び因数分解しますと、

$$\{f^2(\omega)-m^2\}\left\{f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}\right\}=f^4(\omega)-\frac{1}{m^2}f^2(\omega)-m^2f^2(\omega)+1$$

$$=1-m^2f^2(\omega)-\frac{1}{m^2}f^2(\omega)+f^4(\omega)$$

$$=\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}$$

になります。したがって、

$$\frac{(d\omega)^2}{(b^2-\omega^2)(\frac{1}{b^2}-\omega^2)}=\frac{\{df(\omega)\}^2}{F\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}$$

と言う式が出来ます。この両辺を $\frac{1}{2}$ 乗しますと、

$$\frac{d\omega}{\sqrt{(b^2-\omega^2)\left(\frac{1}{b^2}-\omega^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

になります。ω＝0 のとき f(0)＝0 であることに注意して、両辺を積分しますと、（本章の 6、付録に説明があります。）

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{(b^2-\omega^2)\left(\frac{1}{b^2}-\omega^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^{f(\omega)}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

になります。左辺において、ω＝bx の置換を行います。ω＝bx の両辺を dx で微分しますと、

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{dbx}{dx}$$

$$\frac{d\omega}{dx}=b$$

$$d\omega=bdx$$

になり dω が bdx に変わります。積分区間は、bx＝0 の $x=\frac{0}{b}=0$ から、bx＝ω の $x=\frac{\omega}{b}$ までに置換されます。これを 0 から x と表現しますが、x はあくまでも $\frac{\omega}{b}$ です。左辺は、

$$\int_0^x \frac{bdx}{\sqrt{(b^2-b^2x^2)\left(\frac{1}{b^2}-b^2x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^{f(\omega)}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

$$\int_0^x \frac{bdx}{\sqrt{b^2(1-x^2)\frac{1}{b^2}(1-b^4x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^{f(\omega)}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

$$b\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^4x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^{f(\omega)}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

となります。b＝$\sqrt{k}$ と置きますと、b^4＝k^2 ですから、

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^{f(\omega)}\frac{df(\omega)}{\sqrt{\{m^2-f^2(\omega)\}\left\{\frac{1}{m^2}-f^2(\omega)\right\}}}$$

となります。次に右辺において、f(ω)＝my の置換を行います。f(ω)＝my の両辺を dy で微分しますと、

$$\frac{df(\omega)}{dy}=\frac{dmy}{dy}$$

$$\frac{df(\omega)}{dy}=m$$

$$df(\omega)=mdy$$

になり df(ω)が mdy に変わります。積分区間は、my＝0 の $y=\dfrac{0}{m}=0$ から、my＝f(ω)の $y=\dfrac{f(\omega)}{m}$ までに置換されます。これも 0 から y と表現しますが、y はあくまでも $y=\dfrac{f(\omega)}{m}$ です。右辺は、

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^y \frac{mdy}{\sqrt{(m^2-m^2y^2)\left(\dfrac{1}{m^2}-m^2y^2\right)}}$$

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{F}}\int_0^y \frac{mdy}{\sqrt{m^2(1-y^2)\dfrac{1}{m^2}(1-m^4y^2)}}$$

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{m}{\sqrt{F}}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^4y^2)}}$$

となります。m＝$\sqrt{k_1}$ と置きますと、m^4＝k_1^2 ですから、

$$\sqrt{k}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\sqrt{\frac{k_1}{F}}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\sqrt{\frac{k_1}{kF}}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$

となります。再び定数をまとめ、$\mu=\sqrt{\dfrac{kF}{k_1}}$ と置きますと、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\mu}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$

と言う式が得られます。この式は両辺ともヤコビの第一種楕円積分と呼ばれ、この積分は出来ません。積分出来ないので、これ以上微分方程式は解けません。y=f(x)の形にはなりません。両辺は、

$$\int_0^x f(x)dx = c\int_0^y f(y)dy$$

の形であり、楕円積分で表された y が、楕円積分で表された x の c 倍になった形です。

　楕円関数を用いて計算を続けます。それを予期し、楕円積分標準形になるように変数の置換を行いました。楕円関数については「ヤコビの楕円関数」の章をご参照下さい。

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$ において、x＝sn(u,k)

$$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}$$ において、y＝sn(v,k_1)

とすれば、求める元関数 f(ω)は、

$b=\sqrt{k}$

$b^2=k$

$\omega=bx=\sqrt{k}\,x=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(u,k)$

$m=\sqrt{k_1}$

$m^2=k_1$

$f(\omega)=my=\sqrt{k_1}\,y=\sqrt{k_1}\,\mathrm{sn}(v,k_1)$

$$u=\frac{1}{\mu}v$$

のように表されます。長々しい計算の目的は、元関数 f(ω)が、図 2 のグラフと同じになるように、ω_2 の値を定めることでした。まだ ω_2 の値は出ていません。正規化角周波数 ω を変化させたときの元関数 f(ω)の値を、楕円関数を用いて求め、表 1 にしてみます。

① 正規化角周波数、$\omega=0\rightarrow\omega_1\rightarrow\omega_2\rightarrow b=\sqrt{k}\rightarrow1\rightarrow\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{k}}\rightarrow\frac{1}{\omega_2}\rightarrow\frac{1}{\omega_1}\rightarrow\infty$ を、1 行めに書きます。図 2 のグラフの ω 軸を表します。

② この ω の値から、$x=\frac{\omega}{b}=\frac{\omega}{\sqrt{k}}$ により x の値を計算し、2 行目に書きます。

③ つぎにこの x に対応する x＝sn(u,k)の u の値を求め、3 行目に書きます。楕円関数の章を参照すれば、ほとんどの値は分りますが、すぐには分らない値は括弧にしておきます。

④ x の各値に対する f(ω)の値を、図 2 のグラフを参照して、4 行目に書き加えます。

⑤ この f(ω)の値に対応する y の値を、$y=\frac{f(\omega)}{m}=\frac{f(\omega)}{\sqrt{k_1}}$ により求め、5 行目、6 行目に書きます。

⑥ この y に対応する y＝sn(v,k_1)の v の値を求め、7 行目に書きます。楕円関数の章を参照すれば、ほとんどすぐに埋まります。表 1 において、

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} \qquad K_1' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1'^2y^2)}}$$

の完全楕円積分値です。それぞれ母数が違います。

表 1

ω	0	ω_1	ω_2	B＝$\sqrt{k}$	1
x=$\omega/\sqrt{k}$	0	$\omega_1/\sqrt{k}$	$\omega_2/\sqrt{k}$	1	$1/\sqrt{k}$
u	0	(　)	(　)	K	K＋jK'/2
f(ω)	0	m	0	－m	－1
y=f(ω)/m	0	1	0	－1	－1/m
y=f(ω)/$\sqrt{k_1}$	0	1	0	－1	$-1/\sqrt{k_1}$
v	0	K_1	$2K_1$	$3K_1$	$3K_1+jK_1'/2$

ω	1/b＝$1/\sqrt{k}$	$1/\omega_2$	$1/\omega_1$	∞
x=$\omega/\sqrt{k}$	1/k	$1/\sqrt{k}\ \omega_2$	$1/\sqrt{k}\ \omega_1$	∞
u	K＋jK'	(　)	(　)	jK'
f(ω)	－1/m	±∞	1/m	∞
y=f(ω)/m	$-1/m^2$	±∞	$1/m^2$	∞
y=f(ω)/$\sqrt{k_1}$	$-1/k_1$	±∞	$1/k_1$	∞
v	$3K_1+jK_1'$	$2K_1+jK_1'$	K_1+jK_1'	jK_1'

表 1 では、ω_1 および肝心の ω_2、それと同等の $1/\omega_2$、$1/\omega_1$ 欄が括弧です。表 1 を眺めて気が付くことを列挙します。

・ω は正規化された周波数なので実数である。x も ω を $\sqrt{k}$ で割ったものなので実数である。

・積分値 u の値は x が 1 までは実数だが、x が 1 を超えると複素数になる。

・f(ω) は、ある正規化周波数での出力なので実数である。y も f(ω)を m で割ったものなので実数である。

・積分値 v の値も 1 から－1 の間、つまり f(ω)が、m から－m 間を動いている間は実数だが、それを越えると複素数になる。

・u＝ 0＋j0 のとき v＝0＋j0 である。

・u＝ K＋j0 のとき v＝$3K_1$＋j0 である。

・u＝ K＋jK'/2 のとき v＝$3K_1+jK_1'/2$ である。

・u＝ K＋jK'のとき v＝$3K_1+jK_1'$である。

・u＝ 0＋jK'のとき v＝$0+jK_1'$である。

この中に、u と v の関係が隠されています。③で求められず、括弧にした表 1 の中の値は、

次のようにして求めることが出来ます。

u の実数部が K の時、v の実数部は $3K_1$ である。

ことと、

u の虚数部が K'の時、v の虚数部は K_1'である。

こと、さらに、

$$u = \frac{1}{\mu} v$$

であることから、

$$K + jK' = \frac{1}{\mu}(3K_1 + jK_1') = \frac{1}{\mu}3K_1 + j\frac{1}{\mu}K_1'$$

が得られます。右辺を見てから左辺を見ます。v の実数部は $3K_1$ です。$3K_1$ に $\frac{1}{\mu}$ をかければ u の実数部の K と等しくなり、v の虚数部 K_1'に $\frac{1}{\mu}$ をかければ、u の虚数部 K'と等しくなるのです。したがって、

$$K = \frac{1}{\mu}3K_1$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K}{3K_1}$$

であり、

$$K' = \frac{1}{\mu}K_1'$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K'}{K_1'}$$

です。つまり、

$$\frac{1}{\mu} = \frac{K}{3K_1} = \frac{K'}{K_1'}$$

となります。

$$u = u_1 + ju_2$$

$$v = v_1 + jv_2$$

とおけば、

$$u_1 = \frac{K}{3K_1} v_1$$

$$u_2 = \frac{K'}{K_1'} v_2$$

です。この関係を用いれば、表 1 の括弧内の u の値は、ただちに求められます。表 1 の ω が、

ω_1 の時、v=K_1+j0 ですから、$u = \dfrac{K}{3K_1}K_1 + j\dfrac{K'}{K_1'}\bullet 0 = \dfrac{K}{3}$

ω_2 の時、v=$2K_1$+j0 ですから、$u = \dfrac{K}{3K_1}2K_1 + j\dfrac{K'}{K_1'}\bullet 0 = \dfrac{2K}{3}$

$\dfrac{1}{\omega_2}$ の時、v=$2K_1$+jK_1' ですから、$u = \dfrac{K}{3K_1}2K_1 + j\dfrac{K'}{K_1'}K_1' = \dfrac{2K}{3} + jK'$

$\dfrac{1}{\omega_1}$ の時、v=K_1+jK_1' ですから、$u = \dfrac{K}{3K_1}K_1 + j\dfrac{K'}{K_1}K_1' = \dfrac{K}{3} + jK'$

となります。u と v と言う sn の変数どうしは、上記関係で結ばれます。このようにして、表 2 が完成されました。

表 2

ω	0	ω_1	ω_2	b=$\sqrt{k}$	1
x=ω/$\sqrt{k}$	0	$\omega_1/\sqrt{k}$	$\omega_2/\sqrt{k}$	1	$1/\sqrt{k}$
u	0	K/3	2K/3	K	K+jK'/2
f(ω)	0	m	0	−m	−1
y=f(ω)/m	0	1	0	−1	−1/m
y=f(ω)/$\sqrt{k_1}$	0	1	0	−1	$-1/\sqrt{k_1}$
v	0	K_1	$2K_1$	$3K_1$	$3K_1+jK_1'/2$

ω	1/b=$1/\sqrt{k}$	$1/\omega_2$	$1/\omega_1$	∞
x=ω/$\sqrt{k}$	1/k	$1/\sqrt{k}\,\omega_2$	$1/\sqrt{k}\,\omega_1$	∞
u	K+jK'	2K/3+jK'	K/3+jK'	jK'
f(ω)	−1/m	±∞	1/m	∞
y=f(ω)/m	$-1/m^2$	±∞	$1/m^2$	∞
y=f(ω)/$\sqrt{k_1}$	$-1/k_1$	±∞	$1/k_1$	∞
v	$3K_1+jK_1'$	$2K_1+jK_1'$	K_1+jK_1'	jK_1'

k は、過渡帯域に突入する通過域端正規化角周波数 b（過渡帯域を抜ける阻止域先端正規化角周波数は $\dfrac{1}{b}$）を 2 乗したものです。b=$\sqrt{k}$ です。したがって k は、過渡帯域幅を決める定数です。

k_1は通過域うねりの絶対値、m（阻止域うねりの絶対値は$\frac{1}{m}$）を 2 乗したものです。m ＝$\sqrt{k_1}$です。したがってk_1は、うねりを決める定数です。

この両者を母数とする楕円積分値が、定数$\frac{1}{\mu}$で関係付けられていると言うことは、過渡帯域幅を先に決めれば、うねりは決まってしまい、うねりを先に決めれば、過渡帯域幅は決まってしまうと言うことを表しています。

それは、次のことからも分ります。先ほど、

$$\frac{K}{3K_1} = \frac{K'}{K_1'}$$

と言う式がありましたが、この式を次のように書き換えます。

$$3K_1K' = KK_1'$$

$$\frac{3K_1K'}{K} = K_1'$$

$$3\frac{K'}{K} = \frac{K_1'}{K_1}$$

目次にもどり、完全楕円積分の表のページをご覧下さい。母数 k による完全楕円積分値 K の表です。副母数 k'による完全楕円積分値 K'との比、$\frac{K'}{K}$も提示されています。$\frac{K'}{K}$は母数 k によって、一つに決まることを示しています。

全く同じことが、母数k_1による完全楕円積分値K_1と、副母数k_1'による完全楕円積分値K_1'との比、$\frac{K_1'}{K_1}$にも当てはまります。$\frac{K_1'}{K_1}$も母数k_1によって、一つに決まります。

$\frac{K'}{K}$の 3 倍が、$\frac{K_1'}{K_1}$に一致しなくてはいけないのですから、過渡帯域幅を先に決めればうねりは決まってしまい、うねりを先に決めれば、過渡帯域幅は決まってしまうと分ります。

完成した表 2 によりω_2は、

$$\omega_2 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2}{3}K, k\right)$$

となりました。またω_1は、

$$\omega_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{1}{3}K, k\right)$$

となりました。ともに母数 k の楕円関数により決まります。母数が k と決定されている場合のうねりの大きさ m の値は、$\omega=\omega_1$のときの$f(\omega_1)=m$から求められます。すなわち、

$$m = f(\omega_1) = \omega_1 \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2 - 1}$$

$$= \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{1}{3}K, k\right) \bullet \frac{k\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) - k\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)}{k\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) \bullet k\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}K, k\right) - 1}$$

$$= \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{1}{3}K, k\right) k \bullet \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) - \mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)}{k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) \bullet \mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}K, k\right) - 1}$$

ですが、ここで次の計算を行ってみます。母数 k は省略します。楕円関数の加法定理により、

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{snucnvdnv} + \mathrm{snvcnudnu}}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v}}$$

$$\mathrm{sn}(u-v) = \frac{\mathrm{snucn}(-v)\mathrm{dn}(-v) + \mathrm{sn}(-v)\mathrm{cnudnu}}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2(-v)}$$

$$= \frac{\mathrm{snucnvdnv} - \mathrm{snvcnudnu}}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v}}$$

$$\because \mathrm{sn}(-v) = -\mathrm{snv},\ \mathrm{cn}(-v) = \mathrm{cnv},\ \mathrm{dn}(-v) = \mathrm{dnv}$$

が成り立ちます。両者をかけ合わせますと、

$$\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{sn}(u-v) = \frac{(\mathrm{snucnvdnv} + \mathrm{snvcnudnu})(\mathrm{snucnvdnv} - \mathrm{snvcnudnu})}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})}$$

$$= \frac{\mathrm{sn}^2\mathrm{ucn}^2\mathrm{vdn}^2\mathrm{v} - \mathrm{sn}^2\mathrm{vcn}^2\mathrm{udn}^2\mathrm{u}}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})}$$

$$= \frac{\mathrm{sn}^2\mathrm{u}(1 - \mathrm{sn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{v}) - \mathrm{sn}^2\mathrm{v}(1 - \mathrm{sn}^2\mathrm{u})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{u})}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})}$$

$$= \frac{(\mathrm{sn}^2\mathrm{u} - \mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{v}) - (\mathrm{sn}^2\mathrm{v} - \mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{u})}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})}$$

$$= \frac{\mathrm{sn}^2\mathrm{u} - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v} - \mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v} + k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^4\mathrm{v} -}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})}$$

$$\frac{\mathrm{sn}^2\mathrm{v} + k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v} + \mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v} - k^2\mathrm{sn}^4\mathrm{usn}^2\mathrm{v}}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v})}$$

$$= \frac{sn^2u - k^2sn^4usn^2v - sn^2v + k^2sn^2usn^4v}{(1-k^2sn^2usn^2v)(1-k^2sn^2usn^2v)}$$

$$= \frac{(sn^2u - sn^2v)(1 - k^2sn^2usn^2v)}{(1-k^2sn^2usn^2v)(1-k^2sn^2usn^2v)}$$

$$= \frac{sn^2u - sn^2v}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

になります。m の式は、$u = \frac{1}{3}K$、$v = \frac{2}{3}K$ として、次のように変形出来、

$$m = \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)k \bullet \frac{sn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) - sn^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)}{k^2 sn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) \bullet sn^2\left(\frac{2}{3}K, k\right) - 1}$$

$$= \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)k \bullet \frac{sn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) - sn^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)}{-\left\{1 - k^2 sn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) \bullet sn^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)\right\}}$$

$$= \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)(-k) \bullet \frac{sn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) - sn^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)}{1 - k^2 sn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right) \bullet sn^2\left(\frac{2}{3}K, k\right)}$$

$$= \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)(-k)\left\{sn\left(\frac{1}{3}K, k + \frac{2}{3}K, k\right) \bullet sn\left(\frac{1}{3}K, k - \frac{2}{3}K, k\right)\right\}$$

$$= \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)(-k)\left\{sn\,(K, k) \bullet sn\left(-\frac{1}{3}K, k\right)\right\}$$

$$= \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)(-k)sn\left(-\frac{1}{3}K, k\right)$$

$$= \sqrt{k}\,sn\left(\frac{1}{3}K, k\right)(-k)\left\{-\,sn\,(\left(\frac{1}{3}K, k\right)\right\}$$

$$= \sqrt{k} \bullet ksn^2\left(\frac{1}{3}K, k\right)$$

$$= \sqrt{k}\,\omega_1^{\,2}$$

但し sn(K,k)＝1　sn(－v,k)＝－sn(v,k)

となります。元関数のうねりの大きさ m も、k_1 の関数でありながら、k が先に決定されている場合は、k の関数になってしまうのです。

3、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗を求める

以上で元関数 f(ω)の未知数、ω_2 の値が決まりました。フィルターとしての周波数伝達関数の絶対値の 2 乗である、$y^2(\omega)$を求めます。ここでは周波数伝達関数の絶対値の 2 乗のことを、略して 2 乗 ω 特と呼びます。

「フィルター近似とは」の章で説明しましたが、2 乗 ω 特 $y^2(\omega)$は、元関数 f(ω)を 2 乗して 1 を足し逆数にしたものです。

2 乗 ω 特の平方根が、周波数伝達関数の絶対値になります。周波数伝達関数の絶対値、つまり ω 特が、正規化角周波数でのフィルターの利得を表したものになります。

元関数の図 2 と、フィルターの図 1 の違いはここで生じます。図 2 の ω_1 の出っ張りが、図 1 で窪んでいる理由です。

$$y^2(\omega)=\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)}$$

$$=\frac{1}{1+H^2\left(\omega\,\dfrac{\omega^2-{\omega_2}^2}{{\omega_2}^2\omega^2-1}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+H^2\dfrac{\omega^2\left\{\omega^2-k\,sn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\right\}^2}{\left\{k\,sn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2}}$$

となります。分母の分数を通分しますと、

$$=\frac{1}{\dfrac{\left\{k\,sn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2+H^2\omega^2\left\{\omega^2-k\,sn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\right\}^2}{\left\{k\,sn^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2}}$$

になります。f(ω)は、f(ω)＝my＝$\sqrt{k_1}$ y＝$\sqrt{k_1}$ sn(v,k_1)とも表されるので、

$$=\frac{1}{1+H^2\{\sqrt{k_1}\,sn(v,k_1)\}^2}$$

$$=\frac{1}{1+H^2k_1sn^2(v,k_1)}$$

も明らかに2乗ω特です。$m^2=k_1$ですから、

$$=\frac{1}{1+H^2m^2sn^2(v,k_1)}$$

とも表せます。周波数伝達関数の絶対値 y(ω)、略して ω 特は上式の平方根ですので、

$$y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$$

となります。

4、H について

周波数伝達関数の絶対値の2乗、略して2乗ω特で突然出てきた、H とは何かについて説明します。

(1)過渡帯域幅を、優先的に設計する場合の H

設計する際、ユーザー側からの要求仕様があります。過渡帯域幅の要求仕様により、$b^2=k$ を先に決定した場合、$u=\frac{1}{\mu}v$ の関係から、k_1 も決まり、元関数 f(ω)の通過域うねりの値 m、および元関数 f(ω) の阻止域うねりの値、$\frac{1}{m}$ は自動的に決定されます。

ユーザー側からの要求仕様の「通過域での許容最大減衰値」あるいは「阻止域での許容最小減衰値」から、周波数伝達関数を逆に計算して得られる、元関数への要求うねりの大きさとは必ず食い違います。

うねりの大きさを変える為、元関数 f (ω)の外側に、H を付けて調整します。

H とは、元関数 f (ω)の通過域うねりの値 m を、ユーザー要求仕様の「通過域での許容最大減衰値」から得られる、元関数への要求うねりに合わせる為の係数です。

または、元関数 f(ω)の阻止域うねりの値 $\frac{1}{m}$ を、ユーザー要求仕様の「阻止域での許容最小減衰値」から得られる、元関数への要求うねりに合わせる為の係数です。

H をつけることで、上記許容値のどちらかを満足させ得ますが、もう一方の許容値は満足させ得ません。

過渡帯域幅を先に決めてしまいますと「通過域での許容最大減衰値」あるいは「阻止域での許容最小減衰値」の両方のユーザー要求仕様を満足させる H は無いです。

(2) 通過域と阻止域の許容減衰量を、優先的に設計する場合の H

設計する際、ユーザーの要求仕様「通過域での許容最大減衰値」と「阻止域での許容最小減衰値」の両方を満足したいとします。

元関数 f (ω)の通過域うねりの値は m、阻止域うねりの値は $\frac{1}{m}$ です。

ユーザー要求仕様の「通過域での許容最大減衰値」から得られる、元関数への通過域うねりの要求値、例えば α と、

ユーザー要求仕様の「阻止域での許容最小減衰値」から得られる、元関数への阻止域うねりの要求値、例えば β があります。

m に H をかけると α になり、$\frac{1}{m}$ に H をかけると β になる。そのような m と H を決定すれば良いことになります。

これにより、k_1 値が先に決定され、$u = \frac{1}{\mu} v$ の関係から k も一方的に決定される為、過渡帯域幅が勝手に決まってしまいます。ユーザーの要求仕様の「過渡帯域幅」が満足されるかが問題になります。

具体的に H の求め方について研究します。

(1)過渡帯域幅優先の場合

過渡帯域幅の要求仕様により、b^2＝k を先に決定した場合、$u = \frac{1}{\mu} v$ の関係から、k_1 も決まり、元関数 f(ω)の通過域うねりの値 m、 および元関数 f(ω) の阻止域うねりの値、$\frac{1}{m}$ は自動的に決定されます。

①過渡帯域幅と通過域での許容最大減衰値を、仕様に合わせる場合

ユーザーの要求仕様で決まる「通過域での許容最大減衰値（うねりの許容値）」を負の数－A_P[dB]としますと、通過域うねりが一番大きな部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は次の様になります。

$$-A_P = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}[\mathrm{dB}]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}} = \frac{-A_P}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN}=10^{\frac{-A_P}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT}=\frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}}=\left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1}=10^{\frac{A_P}{20}}$$

一方フィルターの周波数伝達関数は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}=\frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)}=\frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(10^{\frac{A_P}{20}}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

になります。通過域内での元関数 f (ω)のうねりの値の 2 乗は、$f^2(\omega_1)=m^2$ ですので、

$$H^2m^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$H^2=\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2}$$

となります。

H はユーザー仕様側の元関数への通過域うねり要求値を、元関数側の通過域うねりの値で割ったものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの阻止域における最小減衰量$-A_S$[dB]は次のように計算されます。その場所の元関数 f(ω)における値が、$f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)=\frac{1}{m^2}$ ですので、

$$-A_S=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2\bullet\frac{1}{m^2}}}$$

$$=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2}\bullet\frac{1}{m^2}}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^4}}}$$

となります。この値がユーザーの要求仕様の「阻止域での許容最小減衰値」を満たすかが問題となります。

②過渡帯域幅と阻止域での許容最小減衰値を、仕様に合わせる場合

ユーザーの要求仕様で決まる「阻止域での許容最小減衰値」を負の数ーA_S[dB]としますと、阻止域うねり部分（図 1 の右側小山頂上）での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は次の様になります。

$$-A_S = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}[\mathrm{dB}]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}} = \frac{-A_S}{20}$$

$$\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}} = 10^{\frac{-A_S}{20}}$$

$$\frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{OUT}} = \frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_S}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_S}{20}}$$

一方フィルターの周波数伝達関数は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ですので､両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)} = \frac{\mathrm{OUT}^2}{\mathrm{IN}^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{OUT}}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{OUT}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_S}{20}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1$$

になります。阻止域内での元関数 f(ω)のうねりの値の 2 乗は、$f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right) = \frac{1}{m^2}$ですので、

$$H^2\frac{1}{m^2} = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1$$

$$H^2 = \frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{\frac{1}{m^2}} = \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right) m^2$$

となります。H はユーザー仕様側の元関数への阻止域うねり要求値を、元関数側の阻止域うねりの値で割ったもの、あるいはユーザー仕様側の元関数への阻止域うねり要求値に、元関数側の通過域うねりの値をかけたものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの通過域における最大減衰量ーA_P[dB]は次のように計算されます。その場所の元関数 f(ω)における値が、$f^2(\omega_1)=m^2$ ですので、

$$-A_P = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}} = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega_1)}} = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2m^2}}$$

$$= 20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{\frac{1}{m^2}}\bullet m^2}} = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\left(10^{\frac{A_S}{10}}-1\right)m^4}}$$

となります。この値がユーザー仕様の「通過域での許容最大減衰値」を満たすかが問題となります。

(2) 通過域および阻止域の許容減衰量優先の場合

ユーザーの要求仕様で決まる「通過域での許容最大減衰値（うねりの許容値）」を負の数ーA_P[dB]としますと、通過域うねり最大部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_P = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}[\mathrm{dB}]$$

$$\frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{OUT}} = \frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_P}{20}}$$

となります。周波数伝達関数は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

になります。(1)の①と全く同じです。これは通過域最大減衰地点で、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき、ユーザーからの要求値です。

次に、ユーザーの要求仕様で決まる「阻止域での許容最小減衰値」を負の数ーA_S[dB]と

しますと、阻止域うねり部分（図 1 の右側小山頂上）での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_S = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}[\mathrm{dB}]$$

$$\frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{OUT}} = \frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_S}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_S}{20}}$$

となります。周波数伝達関数は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ ですので、両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{\mathrm{OUT}}{\mathrm{IN}}$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1$$

になります。(1)の②と全く同じです。これは阻止域最小減衰地点で、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき、ユーザーからの要求値です。通過域最大減衰地点および阻止域最小減衰地点で、元関数 f(ω)の 2 乗値 $f^2(\omega_1)$、および $f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)$ が取ることの出来る値は、m^2 および $\frac{1}{m^2}$ です。したがって、

$$H^2m^2 = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1 \quad \cdots ①$$

$$H^2\frac{1}{m^2} = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1 \quad \cdots ②$$

が成り立ちます。②から、

$$m^2 = \frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}$$

です。これを①に代入し、

$$H^2\frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

$$H^4 = \left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)$$

$$H^2 = \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}$$

です。①から、

$$m^2 = \frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

が成り立ちます。または②から、

$$m^2 = \frac{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

が成り立ちます。

ここで決定されたことは、「通過域での最大許容減衰値」と「阻止域での許容最小減衰値」の両方が、ユーザーの要求仕様通りのフィルターを作る場合の、H の値と元関数 f(ω)の取るべき通過域うねりの大きさです。これにより、k_1 値が先に決定されます。その後、$u = \frac{1}{\mu} v$ の関係から k も勝手に決定されます。k は過渡帯域幅を決めます。その k が、ユーザーの要求仕様の過渡帯域幅を満たすかが問題となります。

このように、連立チェビシェフフィルターの設計には、限られた自由さしか無いです。

連立チェビシェフフィルターの設計の進め方として、「連立チェビシェフフィルターソフトの設計」と言う章において、ユーザーとのインターフェースについて記述しています。

5、次の作業

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特とは、正規化角周波数 ω で記述されたフィルターの利得式です。ω に比例した利得は、正弦波を微分しなければ得られません。伝達関数に s があれば、正弦波は微分され、ω 倍されます。同様に s^n があれば、正弦波は n 回微分され、ω^n 倍されます。「s とは何か」の章をご参照下さい。

2 乗 ω 特を、s の関数である伝達関数に直す作業が必要です。その初めが 2 乗 ω 特を因数分解し、1 次と 2 次の関数の積に分解する作業です。このことについて、章を改めて書きます。

6、付録

(1) ω＝∞での極についての説明

$$f(\omega)=\frac{\omega(\omega^2-{\omega_2}^2)}{{\omega_2}^2\omega^2-1}=\frac{\omega\bullet\omega^2\left(1-\frac{{\omega_2}^2}{\omega^2}\right)}{\omega^2\left({\omega_2}^2-\frac{1}{\omega^2}\right)}=\frac{\omega\left(1-\frac{{\omega_2}^2}{\omega^2}\right)}{{\omega_2}^2-\frac{1}{\omega^2}}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega\left(1-\frac{{\omega_2}^2}{\omega^2}\right)}{{\omega_2}^2-\frac{1}{\omega^2}}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega}{{\omega_2}^2}=\infty$$

(2)微分方程式初期値問題についての説明

変数分離形微分方程式、

$$g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)\ \cdot\cdot\cdot ①$$

を初期条件「$x=x_0$、$y=y_0$」のもとで解けば、特殊解は、

$$\int_{y_0}^{y}g(y)dy=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

になります。このことを証明します。

①式の変数を分離しますと、

$$g(y)dy=f(x)dx$$

になります。両辺を積分すれば、

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C\qquad \text{(C は積分定数)}\cdot\cdot\cdot ②$$

となります。これは一般解です。②の両辺の積分をそれぞれ、

$$\int g(y)dy=G(y)\ \cdot\cdot\cdot ③$$

$$\int f(x)dx=F(x)\ \cdot\cdot\cdot ④$$

とおけば、②は、

$$G(y)=F(x)+C\ \cdot\cdot\cdot ⑤$$

となります。初期条件 $x=x_0$、$y=y_0$ を、⑤に代入すれば、

$$G(y_0) = F(x_0) + C$$
$$C = G(y_0) - F(x_0)$$

となります。この C を再び⑤に代入して、

$$G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$$

となります。これが求める特殊解です。これを変形して、

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \cdots ⑥$$

になります。ところが③によって、

$$G(y) - G(y_0) = \int_{y_0}^{y} g(y)dy$$

です。また④によって、

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

です。これを⑥に代入すれば、

$$\int_{y_0}^{y} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

となります。これは求める特殊解です。これで証明を終わります。

目次へ戻る