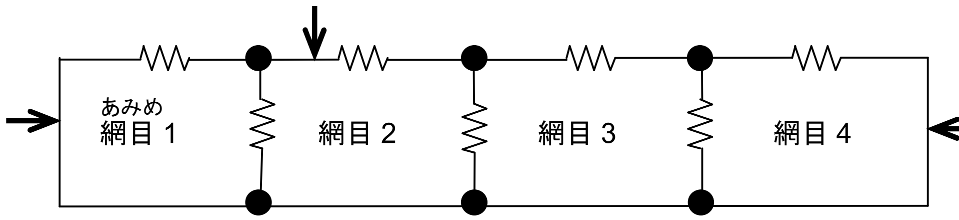
相反（そうはん）の定理について　　　　２０２１年１２月２４日　　　　目次へ戻る

2022.6.20　2022.11.24　2024.5.10　訂正

相反の定理とは「無電源回路網中の枝路（しろ）a に電源 V を挿入した時、同じ回路網中の他の任意の枝路 b に流れる電流は、枝路 a から外した電源を枝路 b に挿入した時、枝路 a に流れる電流に等しい。」と言うものです。枝路（しろ）とは分岐合流の無い区間のことです。

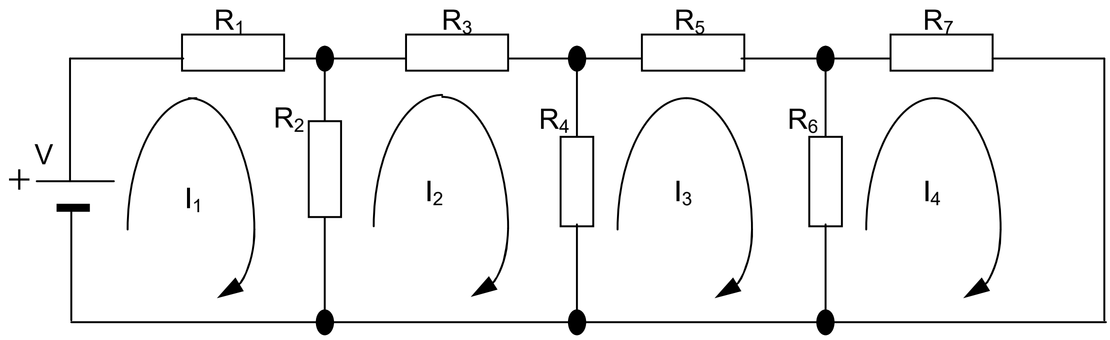
1、一方の枝路は単独枝路もう一方の枝路も単独枝路の場合

最初に、隣の網目と共通にならない枝路に限定して考えます。下図の矢印で示される様な場所です。




(1)電源が $I_1$ の網目にあるとき網目電流 $I_4$ を求める

電源の位置を左側にして、回路の網目（あみめ）電流を下図の様に決めます。網目電流の決め方については、「必要な網目電流の数」の章をご覧下さい。




キルヒホッフの第 2 法則（電圧則）により、網目電流の向きを正の向きとし、網目内の全ての電源電圧と全ての電圧降下を加えると零になります。$I_1$ の網目において、$R_1$ には $I_1$ による電圧降下が $I_1$ の向きとは反対に生じます。（入る側が＋出る側がー）$R_2$ には $I_1$ による電圧降下が $I_1$ の向きとは反対に生じます。同じく $R_2$ には $I_2$ による電圧降下が $I_1$ と同じ向きに生じます。電源 V が $I_1$ と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$V - R_1 I_1 - R_2 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

式を変形して行きますと、

$$V = R_1 I_1 + R_2 I_1 - R_2 I_2$$

$$(R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 = V$$

になります。

最後の式に注目し、左辺に電圧降下、右辺に電源電圧を書き、初めから釣り合いの式にする方法もあります。既に移項されていますので、自分の網目電流および同一方向の電流による電圧降下は＋、自分の網目電流とは反対方向の電流による電圧降下はーになります。

右辺の電圧も同様に、網目電流と同じ向きの電源は＋、反対向きの電源はーになります。次の網目からは、この方法で式を立てます。

$I_2$ の網目において $R_2$、$R_3$、$R_4$ には $I_2$ による＋の電圧降下、$R_2$ には $I_1$ によるーの電圧降下、$R_4$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 - R_4 I_3 = 0$$

$I_3$ の網目において $R_4$、$R_5$、$R_6$ には $I_3$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_2$ によるーの電圧降下、$R_6$ には $I_4$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6) I_3 - R_6 I_4 = 0$$

$I_4$ の網目において $R_6$、$R_7$ には $I_4$ による＋の電圧降下、$R_6$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_6 I_3 + (R_6 + R_7) I_4 = 0$$

行列に書き直す為、各式に足りない電流を書き加えますと、

$$(R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 = V$$

$$-R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 - R_4 I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$$

$$0 \cdot I_1 - R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6) I_3 - R_6 I_4 = 0$$

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - R_6 I_3 + (R_6 + R_7) I_4 = 0$$

になります。行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-①$$

になります。1ー①式の行列を網目行列と呼ぶことにします。

電源から最も遠い網目電流 $I_4$ を求めます。1ー①式からクラーメル（クラメルやクラメールとも呼びます）の解法により、

$$I_4=\frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & V \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}=\frac{V\cdot\Delta_{14}}{\Delta}$$

になります。$\Delta$ は分母行列式を表すとします。1ー①式右辺の電圧の列が、分子行列式の 4 列目に入ります。求めたい $I_4$ の列に電圧の列を入れます。電圧の列では 1 行目に V があり、2 行目 3 行目 4 行目が 0 ですから、分子を 4 列目で展開し、$V\cdot\Delta_{14}$ （$\Delta_{14}$ は分子行列式の 1 行目 4 列目の余因子。余因子については 8 ページをご覧下さい。）にしますと、

$$V\cdot\Delta_{14}=V\cdot-\begin{vmatrix} -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-②$$

になります。1 行目 4 列目の余因子は頭にーが付きます。さらに 1 列目で展開をしますと、

$$=-V(-R_2)\begin{vmatrix} -R_4 & R_4+R_5+R_6 \\ 0 & -R_6 \end{vmatrix}$$

$$=VR_2(-R_4)(-R_6)$$
$$=VR_2R_4R_6$$

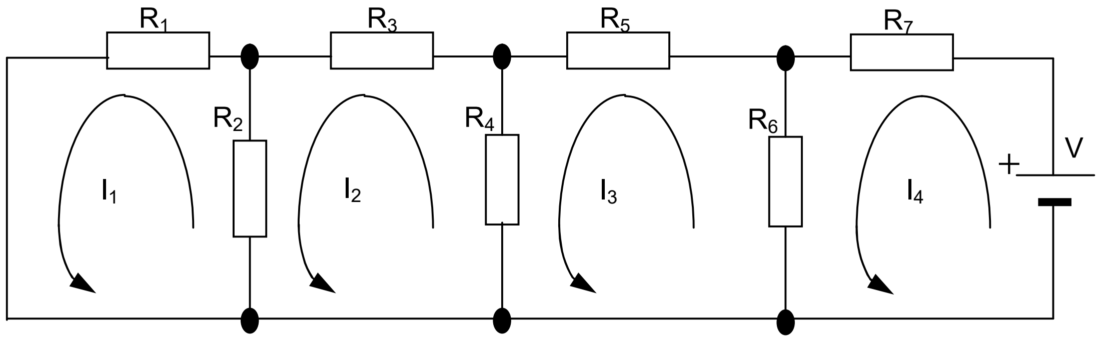
になります。したがって網目電流 $I_4$ は、

$$I_4 = \frac{VR_2R_4R_6}{\Delta}$$

となります。

(2) 電源が $I_4$ の網目のとき網目電流 $I_1$ を求める

電源の位置を右側にして、回路の網目（あみめ）電流を下図の様に決めます。電流の向きを(1)の時とは逆にします。キルヒホッフの第 2 法則により式を立てます。




(1)の時と同じく、最初から釣り合いの式として書きます。$I_1$ の網目において、$R_2$、$R_1$ には $I_1$ による＋の電圧降下、$R_2$ には $I_2$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 = 0$$

$I_2$ の網目において $R_4$、$R_3$、$R_2$ には $I_2$ による＋の電圧降下、$R_2$ には $I_1$ によるーの電圧降下、$R_4$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4I_3 = 0$$

$I_3$ の網目において $R_6$、$R_5$、$R_4$ には $I_3$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_2$ によるーの電圧降下、$R_6$ には $I_4$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 - R_6I_4 = 0$$

$I_4$ の網目において $R_7$、$R_6$ には $I_4$ による＋の電圧降下、$R_6$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源 V が $I_4$ と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$-R_6I_3 + (R_6 + R_7)I_4 = V$$

行列に書き直す為、各式に足りない電流を書き加えますと、

$$(R_1+R_2)I_1-R_2I_2+0\cdot I_3+0\cdot I_4=0$$

$$-R_2I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3+0\cdot I_4=0$$

$$0\cdot I_1-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3-R_6I_4=0$$

$$0\cdot I_1+0\cdot I_2-R_6I_3+(R_6+R_7)I_4=V$$

になります。行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-③$$

になります。1ー③式の網目行列を 1ー①式と比較しますと、網目電流の向きを逆にしたので、V の場所が違うだけになりました。

電源が右側の時の網目電流 $I_1$ を求めます。1ー③式からクラーメルの解法により、

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ V & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}=\frac{V\cdot\Delta_{41}}{\Delta}$$

です。Δ は分母行列式を表すとします。1ー③式右辺の電圧の列が、分子行列式の 1 列目に入ります。求めたい $I_1$ の列に V の列を入れます。V の列では 1 行目 2 行目 3 行目が 0 で、4 行目に V がありますから、分子行列式を 1 列目で展開し、$V\cdot\Delta_{41}$ （$\Delta_{41}$は分子行列式の 4 行目 1 列目の余因子。余因子については 8 ページをご覧下さい。）にしますと、

$$V\cdot\Delta_{41}=V\cdot-\begin{vmatrix} -R_2 & 0 & 0 \\ R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-④$$

です。4 行目 1 列目の余因子は頭にーが付きます。さらに 3 列目で展開をしますと、

$$= -V(-R_6)\begin{vmatrix} -R_2 & 0 \\ R_2+R_3+R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

$$= VR_6(-R_2)(-R_4)$$

$$= VR_2R_4R_6$$

になります。したがって網目電流 $I_1$ は、

$$I_1 = \frac{VR_2R_4R_6}{\Delta}$$

となります。

電源が左側の時の網目電流 $I_4$ と、電源が右側の時の網目電流 $I_1$ は同じになりました。その訳は、

$I_1$ の網目に電源があり電流 $I_4$ を求める時、

電圧の列の 1 行目だけが V になり、電圧の列が行列式分子の 4 列目に入る。

$I_4$ の網目に電源があり電流 $I_1$ を求める時、

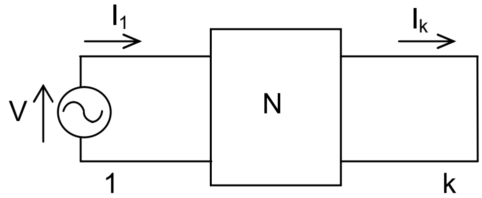
電圧の列の 4 行目だけが V になり、電圧の列が行列式分子の 1 列目に入る。

からです。分子の行列式を電圧の列で展開する際、網目行列 1ー①式および 1ー③式が対称行列であり、1ー②式の 1 行目 4 列目の余因子（＝余因数）と 1ー④式の 4 行目 1 列目の余因子（＝余因数）が同じ値になるからです。詳しくは以下をご覧下さい。

(3)一般論

電源を持たない回路網 N から、網目 1 内の枝路および網目 k 内の枝路を引き出し、網目 1 内の枝路に電源 V を挿入します。1 で述べました通り、引き出す枝路は隣の網目と共通にならない枝路に限定します。

各網目に $I_1$、$I_2$・・・・$I_k$、・・・・$I_n$ の電流が流れた時、




$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet & Z_{1k} \bullet\bullet\bullet & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet & Z_{2k} \bullet\bullet\bullet & Z_{2n} \\ \bullet & & \bullet & \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet & Z_{kk} \bullet\bullet\bullet & Z_{kn} \\ \bullet & & \bullet & \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet & Z_{nk} \bullet\bullet\bullet & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \bullet \\ I_k \\ \bullet \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots 1-⑤$$

と言う網目行列が出来ます。網目番号と電流番号は同一とします。

1 行目の $Z_{11}$ から $Z_{1n}$ までは、網目 1 の様子を表してます。

1 行目 1 列目の $Z_{11}$ は、網目 1 内で電流 $I_1$ による電圧降下を生じるインピーダンスです。

1 行目 2 列目の $Z_{12}$ は、網目 1 内で電流 $I_2$ による電圧降下を生じるインピーダンスです。

1 行目 k 列目の $Z_{1k}$ は、網目 1 内で電流 $I_k$ による電圧降下を生じるインピーダンスです。

・・・・・

2 行目の $Z_{21}$ から $Z_{2n}$ までは、網目 2 の様子を表しています。

2 行目 1 列目の $Z_{21}$ は、網目 2 内で電流 $I_1$ による電圧降下を生じるインピーダンスです。

2 行目 2 列目の $Z_{22}$ は、網目 2 内で電流 $I_2$ による電圧降下を生じるインピーダンスです。

2 行目 k 列目の $Z_{2k}$ は、網目 2 内で電流 $I_k$ による電圧降下を生じるインピーダンスです。

・・・・・

つまり添え字がゾロ目の $Z_{11}$、$Z_{22}$・・・$Z_{kk}$・・・・$Z_{nn}$ は、網目内にある全てのインピーダンスを表し、自己インピーダンスと呼ばれます。1ー①式をご参照下さい。

一方添え字の食い違っている $Z_{ij}$ は、網目 i と網目 j との間にある共通のインピーダンスで、共通（または相互）インピーダンスと呼ばれます。

例えば $Z_{12}$ は、網目 1 と網目 2 との間にある共通インピーダンスです。また $Z_{23}$ は、網目 2 と網目 3 との間にある共通インピーダンスです。

網目 1 でキルヒホッフの式を作る時の網目 2 との共通インピーダンス $Z_{12}$ は、網目 2 でキルヒホッフの式を作る時の網目 1 との共通インピーダンス $Z_{21}$ と同じになります。

つまり網目 i での網目 j との共通インピーダンス $Z_{ij}$ は、網目 j での網目 i との共通インピーダンス $Z_{ji}$ と同じもの（同じでなければ共通インピーダンスと呼ばない）ですので、$Z_{ij}=Z_{ji}$ になります。1ー①式の例で言えば $Z_{12}=Z_{21}$、$Z_{13}=Z_{31}$、$Z_{23}=Z_{32}$ などです。このように $Z_{ij}=Z_{ji}$ になっている行列を対称行列と呼びます。この事が最も重要です。

$$\text{対称行列}=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

対称行列の例です。上の行列を行列式と考えた場合、i 行目 j 列目の余因子（＝余因数）と、j 行目 i 列目の余因子（＝余因数）は同じ値になります。1 行目 3 列目の余因子 $\Delta_{13}$ は、

$$\Delta_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}=24-(-10)=34$$

3 行目 1 列目の余因子 $\Delta_{31}$ は、

$$\Delta_{31}=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=24-(-10)=34$$

となり、同じ値になりました。余因子については次ページをご覧下さい。

網目 1 内の隣の網目と共通にならない枝路に電源 V を挿入しましたので、電圧の列は 1 行目だけ V で他の行は全て 0 です。

全ての網目電流を時計回り、または全ての網目電流を反時計回りに決めます。

網目の数は最後の n に現れます。

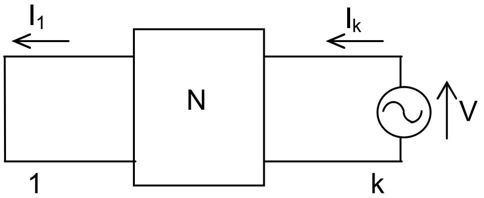
1ー⑤式から網目 k に流れる電流 $I_k$ を求めます。クラーメルの解法により、

$$I_k=\frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12}\bullet\bullet\bullet V\bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22}\bullet\bullet\bullet 0\bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2}\bullet\bullet\bullet 0\bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2}\bullet\bullet\bullet 0\bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12}\bullet\bullet\bullet Z_{1k}\bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22}\bullet\bullet\bullet Z_{2k}\bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2}\bullet\bullet\bullet Z_{kk}\bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2}\bullet\bullet\bullet Z_{nk}\bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}}=\frac{V\cdot\Delta_{1k}}{\Delta}$$

になります。1ー⑤式網目行列右辺の電圧の列は 1 行目だけ V で他の行は全て 0 です。その電圧の列が分子行列式の k 列目に挿入されます。

分子の行列式を k 列目で展開しましたので、$V\cdot\Delta_{1k}$ になりました。$\Delta_{1k}$ は分子の行列式の 1 行目 k 列目の余因子です。1 行目 k 列目の余因子とは、行列式から 1 行目と k 列目の数字や文字を除去し、頭に＋またはーを付けた行列式です。例えば i 行目 j 列目の余因子の場合、i＋j が偶数の場合は＋、i＋j が奇数の場合はーを付けます。

次に、電源を持たない回路網 N から、網目 1 内の枝路および網目 k 内の枝路を引き出し、k の枝路に電源 V を挿入します。1 で述べました通り、今回引き出す枝路は隣の網目と共通にならない枝路に限定します。各網目に $I_1$、$I_2$・・・・$I_k$、・・・・$I_n$ の電流が流れた時、



$$
\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \bullet \\ I_k \\ \bullet \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bullet \\ V \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1\text{ー⑥}
$$

と言う網目行列が出来ます。1ー⑥式から網目 1 に流れる電流 $I_k$ を求めます。クラーメルの解法により、

$$
I_k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ 0 & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ V & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ 0 & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{k1}}{\Delta}
$$

になります。1ー⑥式網目行列右辺の電圧の列は k 行目だけ V で他の行は全て 0 です。その電圧の列が分子行列式の 1 列目に挿入されます。

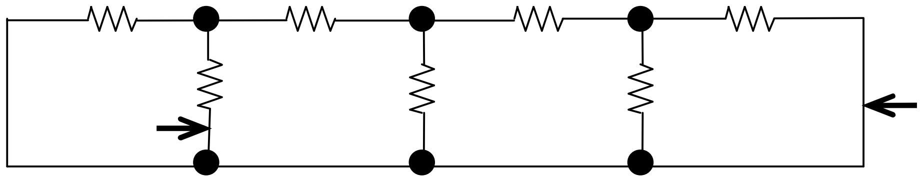
分子の行列式を 1 列目で展開しましたので、$V \cdot \Delta_{k1}$ になりました。$\Delta_{k1}$ は分子の行列式の k 行目 1 列目の余因子です。k 行目 1 列目の余因子とは、行列式から k 行目と 1 列目の数字や文字を除去し、頭に＋またはーを付けた行列式です。例えば i 行目 j 列目の余因子の場合、i＋j が偶数の場合は＋、i＋j が奇数の場合はーを付けます。

7、8 ページで紹介致しました様に、対称行列式の i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。1 行目 k 列目の余因子 $\Delta_{1k}$ と、k 行目 1 列目の余因子 $\Delta_{k1}$ は等しくなります。網目 1 内の枝路に電源 V を挿入した時、網目 k に流れる電流と、網目 k 内の枝路に電源 V を挿入した時、網目 1 に流れる電流は等しくなります。ただし今回の枝路は隣の網目と共通にならない枝路に限定します。回路から引き出す右側の枝路は網目 1 にこだわらず、隣の網目と共通にならない枝路であれば自由です。

2、一方の枝路は隣の網目と共通する枝路もう一方の枝路は単独枝路の場合

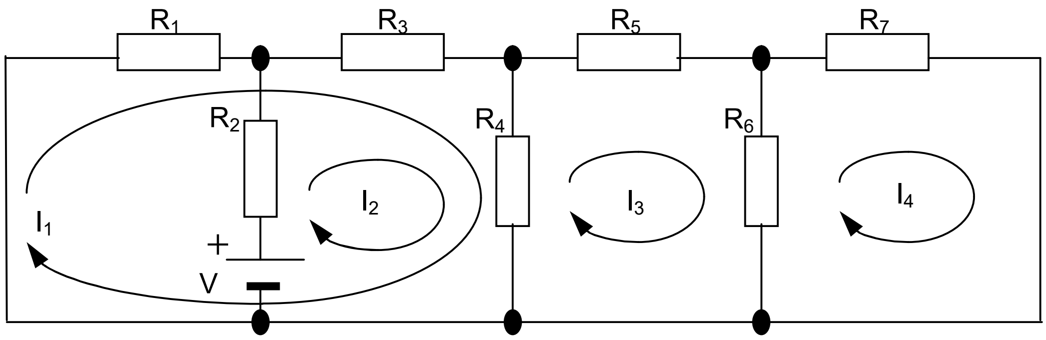
片側だけ、隣の網目と共通する枝路に電源がある場合です。

下図の左側矢印の様な所に電源があり、もう一方の枝路は 1 と同じ場合です。



(1) $R_2$ の枝路に電源がある時 $R_7$ の枝路電流 $I_4$ を求める

$R_2$ の枝路が単独枝路になる様に、回路の網目（あみめ）電流を工夫します。 $I_1$ の流れを変更し、網目電流を下図の様に決めました。$R_2$ の枝路には $I_2$ だけ流れると仮定します。この網目電流の決め方で良いことは、「必要な網目電流の数」の章をご覧下さい。




1 の時と同じく、最初から釣り合いの式として書きます。

$I_1$ の網目において、$R_1$、$R_3$、$R_4$ には $I_1$ による＋の電圧降下、$R_3$、$R_4$ には $I_2$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_1 + (R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$$

$I_2$ の網目において、$R_2$、$R_3$、$R_4$ には $I_2$ による＋の電圧降下、$R_3$、$R_4$ には $I_1$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源 V が $I_2$ と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$(R_3 + R_4)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 + 0 \cdot I_4 = V$$

$I_3$ の網目において、$R_4$、$R_5$、$R_6$ には $I_3$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_1$ と $I_2$ によるーの電圧降下、$R_6$ には $I_4$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ち

ます。

$$-R_4I_1-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3-R_6I_4=0$$

$I_4$の網目において $R_6$と $R_7$には $I_4$による＋の電圧降下、$R_6$には $I_3$によるーの電圧降下があります。内部に電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$0\cdot I_1+0\cdot I_2-R_6I_3+(R_6+R_7)I_4=0$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ・・・2ー①$$

になります。網目電流を工夫した網目行列も対象行列になります。網目電流 $I_4$を求めます。2ー①式からクラーメルの解法により、

$$I_4=\frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & V \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}=\frac{V\cdot\Delta_{24}}{\Delta}$$

です。$\Delta$は分母の行列式を表すとします。網目行列右辺の電圧の列が、分子行列式の 4 列目に入ります。求めたい $I_4$の列に V の列を入れます。V の列では 2 行目に V があり、1 行目 3 行目 4 行目が 0 ですから、分子行列式を 4 列目で展開しますと、$V\cdot\Delta_{24}$ （$\Delta_{24}$は分子行列式の 2 行目 4 列目の余因子）になります。

$$V\cdot\Delta_{24}=V\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 \end{vmatrix} \quad ・・・2ー②$$

です。さらに3行目で展開しますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 \\ -R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

になります。1列目から2列目を引きますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1 & R_3+R_4 \\ 0 & -R_4 \end{vmatrix}$$

$$= V(-R_6)R_1(-R_4)$$
$$= VR_1R_4R_6$$

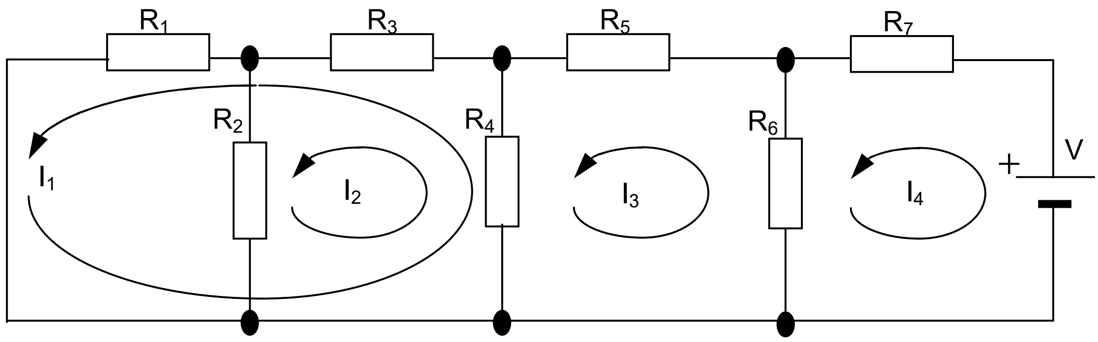
になります。したがって網目電流 $I_4$ は、

$$I_4 = \frac{VR_1R_4R_6}{\Delta}$$

となります。

(2) $R_7$ の枝路に電源がある時 $R_2$ の枝路電流 $I_2$ を求める

$R_2$ の枝路にあった電源を $R_7$ の枝路に移動します。(1)と同様に $R_2$ の枝路が単独枝路になる様に各電流を仮定しました。電流の向きを(1)の時とは逆にします。




釣り合いの式として書きます。

$I_1$ の網目において、$R_4$、$R_3$、$R_1$ には $I_1$ による＋の電圧降下、$R_4$ と $R_3$ には $I_2$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1+R_3+R_4)I_1+(R_3+R_4)I_2-R_4I_3+0\cdot I_4=0$$

$I_2$ の網目において、$R_4$、$R_3$、$R_2$ には $I_2$ による＋の電圧降下、$R_4$ と $R_3$ には $I_1$ による＋の電圧降下、$R_4$ には $I_3$ によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立

ちます。

$$(R_3+R_4)I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3+0\cdot I_4=0$$

$I_3$の網目において、$R_6$、$R_5$、$R_4$には$I_3$による＋の電圧降下、$R_4$には$I_1$と$I_2$によるーの電圧降下、$R_6$には$I_4$によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3-R_6I_4=0$$

$I_4$の網目において、$R_7$と$R_6$には$I_4$による＋の電圧降下、$R_6$には$I_3$によるーの電圧降下があります。電源Ｖが$I_4$と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$0\cdot I_1+0\cdot I_2-R_6I_3+(R_6+R_7)I_4=V$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 2-③$$

になります。(1)と同じく対象行列になります。

網目電流$I_2$を求めます。2ー③式からクラーメルの解法により、

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & 0 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & 0 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & 0 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & V & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}=\frac{V\cdot\Delta_{42}}{\Delta}$$

です。$\Delta$は分母の行列式を表すとします。網目行列右辺の電圧の列が、分子行列式の2列目に入ります。求めたい$I_2$の列にＶの列を入れます。Ｖの列では4行目にＶがあり、1行目2行目3行目が0ですから、分子行列式を2列目で展開し、$V\cdot\Delta_{42}$（$\Delta_{42}$は分子行列式の4

行目２列目の余因子）にしますと、

$$V \cdot \Delta_{42} = V\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \end{vmatrix} \cdots 2-④$$

です。さらに３列目で展開をしますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

になります。１行目から２行目を引きますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ R_3+R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

$$= V(-R_6)R_1(-R_4)$$
$$= VR_1R_4R_6$$

になります。したがって網目電流 $I_2$ は、

$$I_2 = \frac{VR_1R_4R_6}{\Delta}$$

となります。この結果は(1)で求めた、電源が $R_2$ の枝路にある時の $R_7$ の枝路電流＝網目電流 $I_4$ と一致します。

網目電流を工夫し、電源を挿入する枝路が単独枝路になる様にしました。また(2)で電流の向きを逆にして、(1)と(2)が同じ網目行列になる様にしました。

電源が $R_2$ の枝路にあり、$R_7$ の枝路電流を求める時、

電源の列の２行目が V です。それが分子行列式の４列目に入ります。この分子行列式を計算しますと、2ー②式の「V×2 行目 4 列目の余因子」になります。

電源が $R_7$ の枝路にあり、$R_2$ の枝路電流を求める時、

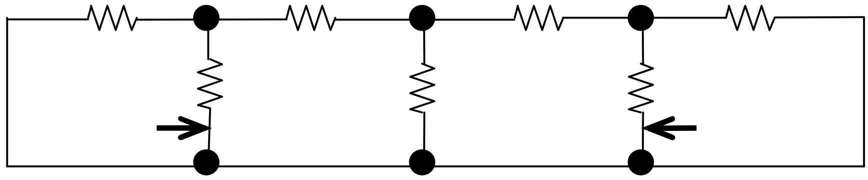
電源の列の４行目が V です。それが分子行列式の２列目に入ります。この分子行列式を計算しますと、2ー④式の「V×4 行目 2 列目の余因子」になります。

網目電流の行列は対称行列です。対称行列で作った行列式は、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。したがって電流も同じになります。

3、一方の枝路は隣の網目と共通する枝路もう一方の枝路も隣の網目と共通する枝路の場合

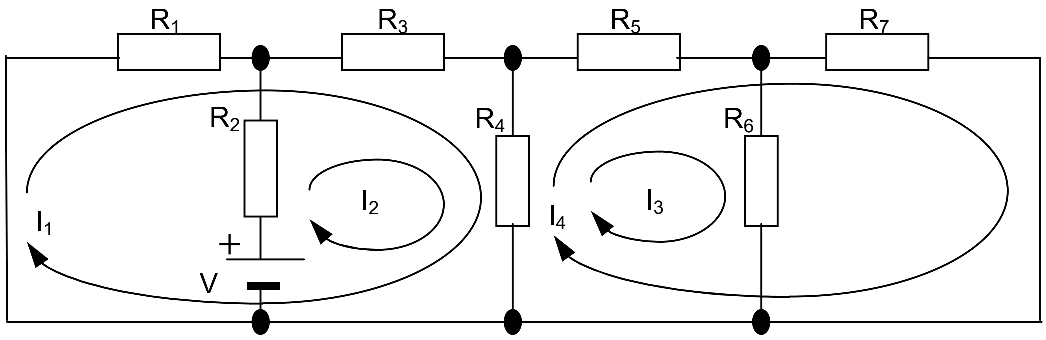
２つの網目が共有する枝路に電源がある時、そことは別の２つの網目が共有する枝路の電流を求める問題です。

下図の矢印の様な所に電源があり、もう一方の枝路も下図の矢印の様な所にある場合です。



(1) $R_2$の枝路に電源がある時 $R_6$の枝路電流を求める

下図の $R_2$の枝路及び $R_6$の枝路が単独枝路になる様に、回路の網目（あみめ）電流を工夫します。網目電流を下図の様に決めました。$R_2$の枝路には $I_2$だけ、$R_6$の枝路には $I_3$だけが流れると仮定します。この網目電流の決め方で良いことは、「必要な網目電流の数」の章をご覧下さい。




1の時と同じく、最初から釣り合いの式として書きます。

$I_1$の網目において、$R_1$、$R_3$、$R_4$には $I_1$による＋の電圧降下、$R_3$、$R_4$には $I_2$による＋の電圧降下、$R_4$には $I_3$と $I_4$によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_1 + (R_3 + R_4)I_2 - R_4I_3 - R_4I_4 = 0$$

$I_2$の網目において、$R_2$、$R_3$、$R_4$には $I_2$による＋の電圧降下、$R_3$、$R_4$には $I_1$による＋の電圧降下、$R_4$には $I_3$と $I_4$によるーの電圧降下があります。電源 V が $I_2$と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$(R_3 + R_4)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4I_3 - R_4I_4 = V$$

$I_3$の網目において、$R_4$、$R_5$、$R_6$には $I_3$による＋の電圧降下、$R_4$、$R_5$には $I_4$による＋の電圧降下、$R_4$には $I_1$、$I_2$によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立

ちます。

$$-R_4I_1 - R_4I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 + (R_4 + R_5)I_4 = 0$$

$I_4$の網目において、$R_4$、$R_5$、$R_7$には$I_4$による＋の電圧降下、$R_4$、$R_5$には$I_3$による＋の電圧降下、$R_4$には$I_1$、$I_2$によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1 - R_4I_2 + (R_4 + R_5)I_3 + (R_4 + R_5 + R_7)I_4 = 0$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3 + R_4 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & R_4 + R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 + R_5 + R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots 3-①$$

になります。網目電流を工夫した網目行列も対象行列になります。$R_6$の枝路電流＝網目電流$I_3$を求めます。3ー①式からクラーメルの解法により、

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 + R_4 & 0 & -R_4 \\ R_3 + R_4 & R_2 + R_3 + R_4 & V & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & 0 & R_4 + R_5 \\ -R_4 & -R_4 & 0 & R_4 + R_5 + R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3 + R_4 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & R_4 + R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 + R_5 + R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{23}}{\Delta}$$

です。$\Delta$は分母の行列式を表すとします。網目行列右辺の電圧の列が、分子行列式の 3 列目に入ります。求めたい$I_3$の列に V の列を入れます。V の列では 2 行目に V があり、1 行目 3 行目 4 行目が 0 ですから、分子行列式を 3 列目で展開しますと、$V \cdot \Delta_{23}$ （$\Delta_{23}$は分子行列式の 2 行目 3 列目の余因子）になります。余因子の正負に注意して、

$$V\cdot\Delta_{23}=V\cdot-\begin{vmatrix}R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4\\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5\\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_7\end{vmatrix}\cdots\cdots 3-②$$

です。3 行目から 2 行目を引きますと、

$$=V\cdot-\begin{vmatrix}R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4\\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5\\ 0 & 0 & R_7\end{vmatrix}$$

になります。3 行目で展開しますと

$$=-VR_7\begin{vmatrix}R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4\\ -R_4 & -R_4\end{vmatrix}$$

です。1 列目から 2 列目を引きますと、

$$=-VR_7\begin{vmatrix}R_1 & R_3+R_4\\ 0 & -R_4\end{vmatrix}$$

になります。

$$=-VR_7R_1(-R_4)$$

$$=VR_1R_4R_7$$

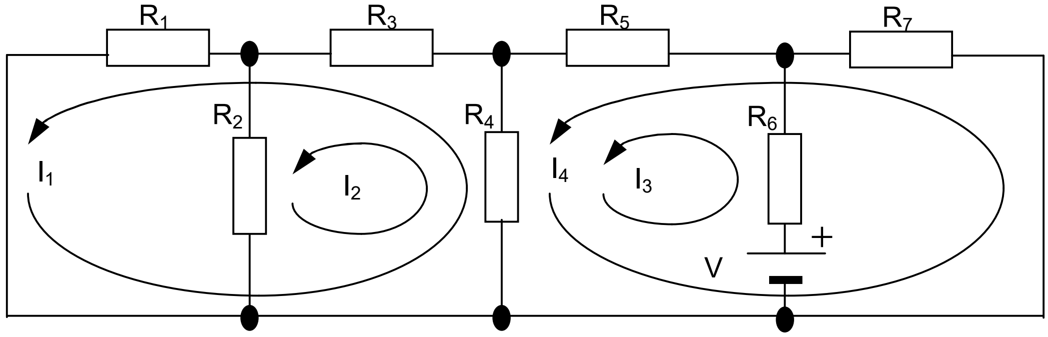
です。したがって網目電流 $I_3$ は、

$$I_3=\frac{VR_1R_4R_7}{\Delta}$$

となります。

(2)$R_6$ の枝路に電源がある時 $R_2$ の枝路電流を求める

$R_2$ の枝路にあった電源を $R_6$ の枝路に移動します。(1)と同様に $R_2$ の枝路及び $R_6$ の枝路が単独枝路になる様に各電流を仮定しました。電流の向きを(1)の時とは逆にします。



最初から釣り合いの式として書きます。

$I_1$の網目において、$R_4$、$R_3$、$R_1$には$I_1$による＋の電圧降下、$R_4$、$R_3$には$I_2$による＋の電圧降下、$R_4$には$I_3$と$I_4$によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1+R_3+R_4)I_1+(R_3+R_4)I_2-R_4I_3-R_4I_4=0$$

$I_2$の網目において、$R_4$、$R_3$、$R_2$には$I_2$による＋の電圧降下、$R_4$、$R_3$には$I_1$による＋の電圧降下、$R_4$には$I_3$と$I_4$によるーの電圧降下が生じます。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_3+R_4)I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3-R_4I_4=0$$

$I_3$の網目において、$R_6$、$R_5$、$R_4$には$I_3$による＋の電圧降下、$R_5$、$R_4$には$I_4$による＋の電圧降下、$R_4$には$I_1$と$I_2$によるーの電圧降下が生じます。電源Vが$I_3$と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3+(R_4+R_5)I_4=V$$

$I_4$の網目において、$R_7$、$R_5$、$R_4$には$I_4$による＋の電圧降下、$R_5$、$R_4$には$I_3$による＋の電圧降下、$R_4$には$I_1$と$I_2$によるーの電圧降下が生じます。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1-R_4I_2+(R_4+R_5)I_3+(R_4+R_5+R_7)I_4=0$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 3-③$$

になります。(1)と同じく対象行列になります。$R_2$の枝路電流＝網目電流 $I_2$を求めます。3ー③式からクラーメルの解法により、

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & 0 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & 0 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & V & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & 0 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{32}}{\Delta}$$

です。$\Delta$ は分母の行列式を表すとします。網目行列右辺の電圧の列が、分子行列式の 2 列目に入ります。求めたい $I_2$ の列に V の列を入れます。V の列では 3 行目に V があり、1 行目 2 行目 4 行目が 0 ですから、分子行列式を 2 列目で展開しますと、$V \cdot \Delta_{32}$（$\Delta_{32}$ は分子行列式の 3 行目 2 列目の余因子）になります。余因子の正負に注意して、

$$V \cdot \Delta_{32} = V \cdot - \begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix} \cdots\cdots 3-④$$

です。1 行目から 2 行目を引きますと、

$$= V \cdot - \begin{vmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}$$

になります。1 行目で展開しますと

$$= -VR_1 \begin{vmatrix} -R_4 & -R_4 \\ R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}$$

です。2 列目から 1 列目を引きますと、

$$= -VR_1 \begin{vmatrix} -R_4 & 0 \\ R_4+R_5 & R_7 \end{vmatrix}$$

になります。

$$= -VR_1(-R_4)R_7$$
$$= VR_1R_4R_7$$

です。したがって網目電流 $I_2$ は、

$$I_2 = \frac{VR_1R_4R_7}{\Delta}$$

となります。この結果は(1)で求めた、電源が $R_2$ の枝路にある時の $R_6$ の枝路電流＝網目電流 $I_3$ と一致します。網目電流を工夫し、電源を挿入する枝路と電流値を計算する枝路が共に単独枝路になる様にしました。また網目電流の向きを逆にして、(1)と(2)で同じ網目行列になる様にしました。

電源が $R_2$ の枝路にあり、$R_6$ の枝路電流を求める時、

電源の列の 2 行目が V です。それが分子行列式の 3 列目に入ります。この分子行列式を計算しますと、3ー②式の「V×2 行目 3 列目の余因子」になります。

電源が $R_6$ の枝路にあり、$R_2$ の枝路電流を求める時、

電源の列の 3 行目が V です。それが分子行列式の 2 列目に入ります。この分子行列式を計算しますと、3ー④式の「V×3 行目 2 列目の余因子」になります。

網目電流の行列は対称行列です。対称行列で作った行列式は、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。したがって電流も同じになります。

4、結論

以上 3 つの例から結論されることは以下のことです。

無電源回路網中の網目電流を工夫すれば、電源を挿入する枝路並びに枝路電流を計算する枝路を 1 つの網目電流だけが流れる単独枝路と仮定することが出来ます。一方、網目電流の行列は常に対称行列です。対称行列で作った行列式は、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。したがって電流も同じになり「相反の定理」となります。

目次へ戻る