リアクタンス回路の性質　　　　　　　　　　２０１５年４月１４日　　　　目次へ戻る

1、駆動点リアクタンスまたは駆動点サセプタンスの因数分解

(1) 駆動点リアクタンス

　コイルとコンデンサーはすべて実数の値を持っています。これら実数の四則演算によって出来ているのが、駆動点リアクタンスです。s の係数は全て実数です。リアクタンス回路の入力端子から見た駆動点リアクタンス X は、例えば、

$$X=\frac{D}{D_{11}}=\frac{a_m s^{2m}+s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1 s^2+a_0}{b_{m-1}s^{2m-1}+b_{m-2}s^{2m-3}+\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1 s^3+b_0 s}$$

$$=\frac{a_m s^{2m}+a_{m-1}s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1 s^2+a_0}{s(b_{m-1}s^{2m-2}+b_{m-2}s^{2m-4}+\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1 s^2+b_0)}$$

でした。「リアクタンス回路」の章をご参照下さい。

　上式分母の括弧内および分子は、s の偶数乗の項と定数項だけで出来ている為、偶関数です。分母括弧内の式を取り出し、b_{m-1} を前に出しますと、

$$b_{m-1}s^{2m-2}+b_{m-2}s^{2m-4}+\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1 s^2+b_0$$

$$=b_{m-1}\left(s^{2m-2}+\frac{b_{m-2}}{b_{m-1}}s^{2m-4}+\bullet\bullet\bullet\bullet+\frac{b_1}{b_{m-1}}s^2+\frac{b_0}{b_{m-1}}\right)$$

になります。この括弧内の式を＝0 と置き方程式にしますと、

$$s^{2m-2}+\frac{b_{m-2}}{b_{m-1}}s^{2m-4}+\bullet\bullet\bullet\bullet+\frac{b_1}{b_{m-1}}s^2+\frac{b_0}{b_{m-1}}=0$$

になります。因数分解する為に、この方程式の根（解）を探します。s に代入すると答えが 0 になる数が根です。代数学の基本定理により、複素数までの範囲に必ず根が存在します。また、駆動点リアクタンス X の式の分母を 0 にする根ですから、極です。

　この方程式の左辺は、s の偶数乗の項と定数項だけですから偶関数です。偶関数では正でも負でも、絶対値が同じ数を代入すれば同じ答えになります。

　根が実数だとしますと、例えば+a と－a の 2 つで 1 組の根になります。ところが、電源を持たない受動回路の、ラプラスの世界での駆動点インピーダンス Z（駆動点リアクタンス X も含む）では、虚軸を除く複素平面右半面に極があってはいけないのです。(「虚軸上の留数は正である」の章を御参照下さい。）複素平面右半面の根+a は無効です。その根は使え

ませんので、因数分解出来ないことになり、左半面の根－a も無効になります。実数の根はだめです。伝達関数の場合と混同しないで下さい。ラプラスの世界での駆動点インピーダンス Z（駆動点リアクタンス X も含む）についてです。

次に「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章でも書きましたが、偶関数の方程式が複素数 c＋jd と言う根を持つ時、共役の c－jd も根です。また、負の－(c＋jd)＝－c－jd、負の共役の－(c－jd)＝－c＋jd も根です。4 つで 1 組の根になります。ところが実数の根の時と同じ理由で、複素平面右半面の根 c＋jd と c－jd が無効です。その根は使えませんので因数分解出来ず、左半面の複素数根も無効になります。複素数の根もだめです。これも伝達関数の場合と混同しないで下さい。駆動点インピーダンス Z（X も含む）についてです。

「虚軸上の留数は正である」の章に書きました様に、根としては原点と純虚数の根が存在出来ます。0 と言う根または、例えば＋jb と－jb の 2 つで 1 組の根になります。＋jb が根ならば、共役の－jb も必ず根になります。このことについては、「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章の 5 をご参照下さい。方程式の根は実数と複素数を除いた、0 や幾組かの純虚数共役根だけです。また、「虚軸上の留数は正である」の章の 3 に在ります様に、2 位の極が無いことから、分母の根として重根以上の根も存在出来ません。

(2) 駆動点サセプタンス

次に駆動点サセプタンス B を求めますと、駆動点リアクタンスの逆数ですから、

$$B=\frac{1}{X}=\frac{D_{11}}{D}=\frac{b_{m-1}s^{2m-1}+b_{m-2}s^{2m-3}+\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1s^3+b_0s}{a_ms^{2m}+a_{m-1}s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1s^2+a_0}$$

$$=\frac{s(b_{m-1}s^{2m-2}+b_{m-2}s^{2m-4}+\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1s^2+b_0)}{a_ms^{2m}+a_{m-1}s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1s^2+a_0}$$

になります。分母は s の偶数乗の項と定数の項だけで出来ている多項式の為、偶関数です。

分母の式を取り出し、a_m を前に出しますと、

$$a_ms^{2m}+a_{m-1}s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1s^2+a_0$$

$$=a_m\left(s^{2m}+\frac{a_{m-1}}{a_m}s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+\frac{a_1}{a_m}s^2+\frac{a_0}{a_m}\right)$$

になります。この括弧内の式を＝0 と置き方程式にしますと、

$$s^{2m}+\frac{a_{m-1}}{a_m}s^{2m-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet+\frac{a_1}{a_m}s^2+\frac{a_0}{a_m}=0$$

になります。因数分解する為に、この方程式の根（解）を探します。s に代入すると答えが 0 になる数が根です。代数学の基本定理により、複素数までの範囲に必ず根が存在します。

方程式の左辺は、s の偶数乗の項と定数項だけですから偶関数です。偶関数では、正でも負でも、絶対値が同じ数を代入すれば同じ答えになります。

根が実数の場合、例えば＋a と－a の 2 つで 1 組の根になります。ところが、電源を持たない受動回路の駆動点アドミッタンス Y（駆動点サセプタンス B も含む）の分母では、虚軸を除く複素平面右半面の根＋a は存在出来ません。（「アドミッタンスについて」の章を御参照下さい。）その根は使えませんので、因数分解出来ないことになり、左半面の根－a も無効になります。実数の根はだめです。伝達関数の場合と混同しないで下さい。駆動点アドミッタンス Y（B も含）についてです。

次に「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章の 5 でも書きましたが、偶関数の方程式が複素数 c＋jd と言う根を持つ時、共役の c－jd も根です。また、負の－(c＋jd)＝－c－jd、負の共役の－(c－jd)＝－c＋jd も根です。4 つで 1 組の根になります。ところが、実数の根の時と同じ理由で複素平面右半面の根 c＋jd、c－jd は存在出来ません。その根は使えませんので因数分解出来ず、左半面の複素数根も無効になります。複素数の根もだめです。伝達関数の場合と混同しないで下さい。駆動点アドミッタンス Y（B も含）についてです。

「アドミッタンスについて」の章に書きました様に、根としては原点と純虚数の根が存在出来ます。0 と言う根、または例えば＋jb と共役の－jb の 2 つで 1 組の根になります。＋jb が根ならば共役の－jb も必ず根になります。このことについては、「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章の 5 を参照下さい。根は実数と複素数を除いた、0 や幾組かの純虚数共役根だけです。また、「アドミッタンスについて」の章にあります様に、2 位の極が無いことから、分母の根として重根以上の根も存在出来ません。

(3)因数分解のまとめ

駆動点リアクタンス X の分子は駆動点サセプタンス B の分母です。したがって駆動点リアクタンス X の分母と分子は、

$$\begin{aligned}X=\frac{D}{D_{11}}&=\frac{a_m s^{2m}+a_{m-1}s^{2m-2}\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1s^2+a_0}{b_{m-1}s^{2m-1}+b_{m-2}s^{2m-3}\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1s^3+b_0s}\\&=\frac{a_m s^{2m}+a_{m-1}s^{2m-2}\bullet\bullet\bullet\bullet+a_1s^2+a_0}{s(b_{m-1}s^{2m-2}+b_{m-2}s^{2m-4}\bullet\bullet\bullet\bullet+b_1s^2+b_0)}\\&=\frac{a_m(s-j\omega_1)(s+j\omega_1)(s-j\omega_3)(s+j\omega_3)(s-j\omega_5)(s+j\omega_5)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}s(s-j\omega_2)(s+j\omega_2)(s-j\omega_4)(s+j\omega_4)\bullet\bullet\bullet\bullet}\end{aligned}$$

$$=\frac{a_m(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)(s^2+\omega_5{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}s(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

のように因数分解されます。駆動点リアクタンス X は、虚軸上の 1 次の零点、虚軸上の 1 次の極だけで出来ています。

駆動点サセプタンス B の分子は駆動点リアクタンス X の分母です。駆動点サセプタンス B の分子と分母も、駆動点リアクタンス X と全く同じように因数分解されます。

2、リアクタンス関数

駆動点リアクタンスおよび駆動点サセプタンスを、合わせてリアクタンス関数と言います。リアクタンス関数の分子と分母の次数の差は、たかだか 1 です。奇関数ですから分母または分子のどちらかが偶関数、どちらかが奇関数になります。これらのことは、「リアクタンス回路」の章をご参照下さい。

リアクタンス関数には次の様な 4 種類があります。式中の●●●●は分子分母ともに、「同じ個数の」因数が増えることを表します。

①、$\dfrac{a_{m-1}\,s\,(s^2+\omega_2{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\,(s^2+\omega_1{}^2)\,(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$　括弧の数は分子が少ない。単独 s が分子にある。

②、$\dfrac{a_m\,s\,(s^2+\omega_2{}^2)\,(s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\,(s^2+\omega_1{}^2)\,(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$　括弧の数は分子分母で同数。単独 s が分子にある。

③、$\dfrac{a_{m-1}\,(s^2+\omega_1{}^2)\,(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\,s\,(s^2+\omega_2{}^2)\,(s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$　括弧の数は分子分母で同数。単独 s が分母にある。

④、$\dfrac{a_m\,(s^2+\omega_1{}^2)\,(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\,s\,(s^2+\omega_2{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$　括弧の数は分母が少ない。単独 s が分母にある。

(1)　s が 0 の時の値

①と②は分子に単独 s がのっている為、s＝0 でリアクタンスまたはサセプタンスが 0 です。③と④は分母に単独 s がある為、s＝0 でリアクタンスまたはサセプタンスが∞です。

(2)　s が∞の時の値

①を展開し、分子分母に $\dfrac{1}{s^4}$ をかけますと、

$$\frac{a_{m-1}s(s^2+\omega_2{}^2)}{b_m(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)}=\frac{a_{m-1}s^3+a_{m-1}\omega_2{}^2 s}{b_m s^4+b_m(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)s^2+b_m\omega_1{}^2\omega_3{}^2}$$

$$=\frac{\dfrac{a_{m-1}s^3}{s^4}+\dfrac{a_{m-1}\omega_2{}^2 s}{s^4}}{\dfrac{b_m s^4}{s^4}+\dfrac{b_m(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)s^2}{s^4}+\dfrac{b_m\omega_1{}^2\omega_3{}^2}{s^4}}=\frac{\dfrac{a_{m-1}}{s}+\dfrac{a_{m-1}\omega_2{}^2}{s^3}}{b_m+\dfrac{b_m(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)}{s^2}+\dfrac{b_m\omega_1{}^2\omega_3{}^2}{s^4}}$$

になります。s を∞にしますと、

$$\left[\frac{\dfrac{a_{m-1}}{s}+\dfrac{a_{m-1}\omega_2{}^2}{s^3}}{b_m+\dfrac{b_m(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)}{s^2}+\dfrac{b_m\omega_1{}^2\omega_3{}^2}{s^4}}\right]_{s=\infty}=0$$

になります。分子の次数が分母より小さいので、s＝∞でリアクタンスまたはサセプタンスが 0 です。

②を展開し、分子分母に $\dfrac{1}{s^4}$ をかけますと、

$$\frac{a_m s(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)}{b_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)}=\frac{a_m s^5+a_m(\omega_2{}^2+\omega_4{}^2)s^3+a_m\omega_2{}^2\omega_4{}^2 s}{b_{m-1}s^4+b_{m-1}(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)s^2+b_{m-1}\omega_1{}^2\omega_3{}^2}$$

$$=\frac{\dfrac{a_m s^5}{s^4}+\dfrac{a_m(\omega_2{}^2+\omega_4{}^2)s^3}{s^4}+\dfrac{a_m\omega_2{}^2\omega_4{}^2 s}{s^4}}{\dfrac{b_{m-1}s^4}{s^4}+\dfrac{b_{m-1}(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)s^2}{s^4}+\dfrac{b_{m-1}\omega_1{}^2\omega_3{}^2}{s^4}}=\frac{a_m s+\dfrac{a_m(\omega_2{}^2+\omega_4{}^2)}{s}+\dfrac{a_m\omega_2{}^2\omega_4{}^2}{s^3}}{b_{m-1}+\dfrac{b_{m-1}(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)}{s^2}+\dfrac{b_{m-1}\omega_1{}^2\omega_3{}^2}{s^4}}$$

になります。s を∞にしますと、

$$\left[\frac{a_m s+\dfrac{a_m(\omega_2{}^2+\omega_4{}^2)}{s}+\dfrac{a_m\omega_2{}^2\omega_4{}^2}{s^3}}{b_{m-1}+\dfrac{b_{m-1}(\omega_1{}^2+\omega_3{}^2)}{s^2}+\dfrac{b_{m-1}\omega_1{}^2\omega_3{}^2}{s^4}}\right]_{s=\infty}=\infty$$

になります。分子の次数が分母より大きいので s＝∞でリアクタンスまたはサセプタンスが∞です。同様なことを③、④についても行いますと、

③は②の逆数になりますから、s＝∞でリアクタンスまたはサセプタンスが 0 です。

④は①の逆数になりますから、s＝∞でリアクタンスまたはサセプタンスが∞です。

(3)リアクタンス関数の種類

リアクタンス関数には、

①の 0ー0 型

②の 0ー∞型

③の∞ー0 型

④の∞ー∞型

の 4 種類があります。

3、リアクタンス関数の部分分数分解

本章の 5 で、駆動点リアクタンスまたは駆動点サセプタンスを微分して性質を調べる為、ここで部分分数に分解する方法を検討します。①～④は、それぞれ次の様に部分分数分解されます。

①の 0ー0 型・・・0 を除く虚軸上の極だけがあります。分子の次数が低いです。

$$\frac{a_{m-1}s(s^2+\omega_2{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}=\frac{C}{s-j\omega_1}+\frac{D}{s+j\omega_1}+\frac{E}{s-j\omega_3}+\frac{F}{s-j\omega_3}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

②の 0ー∞型・・・0 を除く虚軸上の極があります。分子の次数が高いので s＝∞で∞になる As 項があります。

$$\frac{a_m s(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}=As+\frac{C}{s-j\omega_1}+\frac{D}{s+j\omega_1}+\frac{C}{s-j\omega_3}+\frac{D}{s+j\omega_3}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

③の∞ー0 型・・・単独 s が分母にあるので 0 での極、$\frac{B}{s}$ 項があります。0 を除く虚軸上の極もあります。分子の次数が低いので As 項はありません。

$$\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m s(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}=\frac{B}{s}+\frac{C}{s-j\omega_2}+\frac{D}{s+j\omega_2}+\frac{C}{s-j\omega_4}+\frac{D}{s+j\omega_4}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

④の∞ー∞型・・・分子の次数が高いので s＝∞で∞になる As 項があります。単独 s が分母にあるので 0 での極、$\frac{B}{s}$ 項もあります。0 を除く虚軸上の極もあります。

$$\frac{a_m(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}s(s^2+\omega_2{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}=As+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-j\omega_2}+\frac{D}{s+j\omega_2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

(1) 留数 A の求め方

②と④の様に分子の次数が分母より 1 次高い場合です。本章の 5 ページで②の計算をしましたが、分子の次数が分母より大きい時 s＝∞でリアクタンスまたはサセプタンスが∞になります。その為の部分分数 As 項の A を求めます。リアクタンス関数として②型の、

$$\frac{a_m s^5+a_{m-1}s^3+a_{m-2}s}{b_{m-1}s^4+b_{m-2}s^2+b_{m-3}}$$

を考えます。

分子の次数が分母より高い場合、分子÷分母の割り算を行います。分子の頭でっかち分を外に出します。すると残った分子は分母より次数が下がります。s が∞になる時に、分数の値も∞になることは無くなります。つまり、リアクタンス関数の分子の極を分離します。

分子の$a_m s^5+a_{m-1}s^3+a_{m-2}s$を分母で割ります。

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{a_m}{b_{m-1}}s \\
b_{m-1}s^4+b_{m-2}s^2+b_{m-3} & a_m s^5 \quad +a_{m-1}s^3 \quad +a_{m-2}s \\
 & a_m s^5+\frac{a_m b_{m-2}}{b_{m-1}}s^3+\frac{a_m b_{m-3}}{b_{m-1}}s \\
\hline
 & \left(a_{m-1}-\frac{a_m b_{m-2}}{b_{m-1}}\right)s^3+\left(a_{m-2}-\frac{a_m b_{m-3}}{b_{m-1}}\right)s
\end{array}$$

となり、商と余りが求まりました。したがって、

$$\frac{a_m s^5+a_{m-1}s^3+a_{m-2}s}{b_{m-1}s^4+b_{m-2}s^2+b_{m-3}}=\frac{a_m}{b_{m-1}}s+\frac{\left(a_{m-1}-\frac{a_m b_{m-2}}{b_{m-1}}\right)s^3+\left(a_{m-2}-\frac{a_m b_{m-3}}{b_{m-1}}\right)s}{b_{m-1}s^4+b_{m-2}s^2+b_{m-3}}$$

となります。商が As であり余りは新しい分子で、分子の次数が分母より下りました。実際に欲しいのは、留数$A=\frac{a_m}{b_{m-1}}$だけです。分子÷分母の割り算を行わずして留数を求めることも出来ます。

$$\frac{a_m s^5+a_{m-1}s^3+a_{m-2}s}{b_{m-1}s^4+b_{m-2}s^2+b_{m-3}}$$

を s で割りますと、

$$\frac{a_m s^5 + a_{m-1}s^3 + a_{m-2}s}{s(b_{m-1}s^4 + b_{m-2}s^2 + b_{m-3})} = \frac{s(a_m s^4 + a_{m-1}s^2 + a_{m-2})}{s(b_{m-1}s^4 + b_{m-2}s^2 + b_{m-3})} = \frac{a_m s^4 + a_{m-1}s^2 + a_{m-2}}{b_{m-1}s^4 + b_{m-2}s^2 + b_{m-3}}$$

になります。分子各項の s を 1 つ消し、分子分母の最高次数を合わせます。次に分子分母に s の最高次数の逆数を掛け、

$$\frac{\frac{1}{s^4}(a_m s^4 + a_{m-1}s^2 + a_{m-2})}{\frac{1}{s^4}(b_{m-1}s^4 + b_{m-2}s^2 + b_{m-3})} = \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{s^2} + \frac{a_{m-2}}{s^4}}{b_{m-1} + \frac{b_{m-2}}{s^2} + \frac{b_{m-3}}{s^4}}$$

s を無限大にしますと、

$$\left[\frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{s^2} + \frac{a_{m-2}}{s^4}}{b_{m-1} + \frac{b_{m-2}}{s^2} + \frac{b_{m-3}}{s^4}}\right]_{s=\infty} = \frac{a_m}{b_{m-1}}$$

になります。分子÷分母の割り算無しで、留数 $A = \frac{a_m}{b_{m-1}}$ が求まります。つまり、A はリアクタンス関数を s で割り、更に s を無限大にする事により求めることが出来、

$$\left[\frac{X}{s}\right]_{s\to\infty} = A$$

となります。この式の駆動点リアクタンス X は、駆動点サセプタンス B の場合もあります。

As 項が出るのは、分子の次数の高い②の 0ー∞型、

$$\frac{a_m s(s^2 + \omega_2{}^2)(s^2 + \omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}(s^2 + \omega_1{}^2)(s^2 + \omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

と、同じく分子の次数の高い④の∞ー∞型、

$$\frac{a_m(s^2 + \omega_1{}^2)(s^2 + \omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}s(s^2 + \omega_2{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

の 2 種類です。どちらも初めに s で割ることによって、分子分母が同次になりますので、$A = \frac{a_m}{b_{m-1}}$ を取り出すことが出来ます。s を無限大にする前に、分子分母に $\frac{1}{s^n}$ を掛ける等の工夫をして、$\frac{\infty}{0}$ や $\frac{\infty}{\infty}$ にならない様にしなくてはなりません。

(2) 留数 B の求め方

③型と④型の様に、虚軸上の 0 に極がある場合です。リアクタンス関数の式が、

$$X = As + \frac{B}{s} + \frac{C}{s - j\omega_2} + \frac{D}{s + j\omega_2} + \frac{E}{s - j\omega_4} + \frac{F}{s + j\omega_4} \bullet\bullet\bullet\bullet$$

の様に既に部分分数分解されていると仮定します。両辺に s を掛け、その後 s を 0 にしますと、

$$[s \bullet X]_{s=0} = \left[s \bullet \left(As + \frac{B}{s} + \frac{C}{s - j\omega_2} + \frac{D}{s + j\omega_2} + \frac{E}{s - j\omega_4} + \frac{F}{s + j\omega_4} \bullet\bullet\bullet\bullet \right) \right]_{s=0}$$

$$= \left[As^2 + \frac{sB}{s} + \frac{sC}{s - j\omega_2} + \frac{sD}{s + j\omega_2} + \frac{sE}{s - j\omega_4} + \frac{sF}{s + j\omega_4} \bullet\bullet\bullet\bullet \right]_{s=0}$$

$$= \left[As^2 + B + \frac{sC}{s - j\omega_2} + \frac{sD}{s + j\omega_2} + \frac{sE}{s - j\omega_4} + \frac{sF}{s + j\omega_4} \bullet\bullet\bullet\bullet \right]_{s=0}$$

$$= 0 + B + 0 + 0 + 0 + 0 \bullet\bullet\bullet\bullet$$
$$= B$$

となります。リアクタンス関数に s を掛けた後、s を 0 にします。$[s \bullet X]_{s=0}$ を計算することにより、留数 B を求めることが出来ます。この式の駆動点リアクタンス X は、駆動点サセプタンス B の場合もあります。実際に留数 B を求めますと、④型が因数分解されていない場合は、

$$B = \left[s \bullet \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1}s^{2m-2} \bullet\bullet\bullet\bullet + a_1 s^2 + a_0}{b_{m-1}s^{2m-1} + b_{m-2}s^{2m-3} \bullet\bullet\bullet\bullet + b_1 s^3 + b_0 s} \right]_{s=0}$$

$$= \left[\frac{a_m s^{2m} + a_{m-1}s^{2m-2} \bullet\bullet\bullet\bullet + a_1 s^2 + a_0}{b_{m-1}s^{2m-2} + b_{m-2}s^{2m-4} \bullet\bullet\bullet\bullet + b_1 s^2 + b_0} \right]_{s=0}$$

$$= \frac{a_0}{b_0}$$

になります。③型が因数分解されている場合は、

$$B = \left[s \bullet \frac{a_{m-1}(s^2 + \omega_1{}^2)(s^2 + \omega_3{}^2) \bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m s(s^2 + \omega_2{}^2)(s^2 + \omega_4{}^2) \bullet\bullet\bullet\bullet} \right]_{s=0}$$

$$=\left[\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1{}^2)(s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m(s^2+\omega_2{}^2)(s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=0}$$

$$=\frac{a_{m-1}\cdot\omega_1{}^2\cdot\omega_3{}^2\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\cdot\omega_2{}^2\cdot\omega_4{}^2\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

になります。どちらもまず分母の余分な s を取り除き、さらに s＝0 により分子分母の全部の s の項を取り除き、定数の項を残します。

「虚軸上の極の留数は正である」の章にありますように、虚軸上の極 0 の留数 B も正の実数になります。

(3)虚軸上の極の留数

虚軸上の 0 以外に極がある場合で、①②③④型全てに当てはまります。リアクタンス関数の式が、

$$X=As+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-j\omega_2}+\frac{D}{s+j\omega_2}+\frac{E}{s-j\omega_4}+\frac{F}{s+j\omega_4}\bullet\bullet\bullet\bullet$$

の様に既に部分分数分解されていると仮定します。留数 C、D、E、F 等を求めるには、両辺に$(s-j\omega_n)$または$(s+j\omega_n)$をかけ、その後 s を$j\omega_n$や$-j\omega_n$にします。下の例は留数 C を求める場合です。

$$\left[(s-j\omega_2)\bullet X\right]_{s=j\omega_2}=\left[(s-j\omega_2)\bullet\left(As+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-j\omega_2}+\frac{D}{s+j\omega_2}+\bullet\bullet\bullet\bullet\right)\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\left[As(s-j\omega_2)+\frac{(s-j\omega_2)B}{s}+\frac{(s-j\omega_2)C}{s-j\omega_2}+\frac{(s-j\omega_2)D}{s+j\omega_2}+\bullet\bullet\bullet\bullet\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\left[As(s-j\omega_2)+\frac{(s-j\omega_2)B}{s}+C+\frac{(s-j\omega_2)D}{s+j\omega_2}+\bullet\bullet\bullet\bullet\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=0+0+C+0+\bullet\bullet\bullet\bullet$$
$$=C$$

になりますので、左辺の$\left[(s-j\omega_2)\bullet X\right]_{s=j\omega_2}$を計算することにより C を求めることが出来ます。この式の駆動点リアクタンス X は、駆動点サセプタンス B の場合もあります。実際に③型で留数 C を求めますと、

$$C=\left[(s-j\omega_2)\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1^{\,2})(s^2+\omega_3^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m s(s^2+\omega_2^{\,2})(s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\left[(s-j\omega_2)\cdot\frac{a_{m-1}(s^2+\omega_1^{\,2})(s^2+\omega_3^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m s(s-j\omega_2)(s+j\omega_2)(s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\left[\frac{a_{m-1}\,(s^2+\omega_1^{\,2})\ (s^2+\omega_3^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\ s\ \ (s+j\omega_2)\ (s^2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\frac{a_{m-1}\ \ (-\omega_2^{\,2}+\omega_1^{\,2})\ (-\omega_2^{\,2}+\omega_3^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\cdot j\omega_2\cdot 2j\omega_2\ \ (-\omega_2+\omega_4^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{a_{m-1}\cdot-(\omega_2^{\,2}-\omega_1^{\,2})\ (\omega_3^{\,2}-\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\cdot-2\omega_2^{\,2}\ \ (\omega_4^{\,2}-\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{a_{m-1}\ \ (\omega_2^{\,2}-\omega_1^{\,2})\ (\omega_3^{\,2}-\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\cdot 2\omega_2^{\,2}\cdot(\omega_4^{\,2}-\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

$\omega_1<\omega_2<\omega_3<\omega_4$ であり、$0<a_{m-1}$、$0<b_m$ であれば、

$$=\frac{a_{m-1}\ \ (\omega_2^{\,2}-\omega_1^{\,2})\ (\omega_3^{\,2}-\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\cdot 2\omega_2^{\,2}\cdot(\omega_4^{\,2}-\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}>0$$

になります。

「虚軸上の極の留数は正である」の章にありますように、虚軸上の極の留数は正の実数ですので、C、D、E、F 等は正の実数になります。

したがって、$\omega_1<\omega_2<\omega_3<\omega_4$ であり、$\dfrac{a_{m-1}}{b_m}$ は正の実数であることが分かります。

留数 C、D、E、F 等が①～④のどの種類でも、必ず正の実数になる様子は「0 および∞を除く虚軸上の極の留数が正の実数になる訳」の章をご覧下さい。

(1)で、分子が分母より 1 次高い場合、割り算をせずに、$\left[\dfrac{X}{s}\right]_{s\to\infty}=A$ という計算で留数 A を求めました。この場合割り算をしていないので駆動点リアクタンス X の式は、分子の次数が分母より 1 次高い頭でっかち状態のままです。通常、部分分数分解の時は分子の次数を分母の次数より下げろと言いますが、リアクタンス関数の留数計算の場合は、分子の次数が分母より 1 次高い状態のままで C、D、E、F 等を求める留数計算をして良いです。そ

の訳は次の通りです。

リアクタンス関数として簡単な式 $\dfrac{s(s^2+2)}{s^2+1}$ で考えます。通常、部分分数分解する時に分子の次数が高い場合、分子÷分母を行い、

$$\begin{array}{r} s \\ s^2+1 \,\big)\overline{\,s^3+2s\,} \\ \underline{s^3+s} \\ s \end{array}$$

$\dfrac{s(s^2+2)}{s^2+1}=s+\dfrac{s}{s^2+1}$ の様に、割り算の答えを前に出し分子の次数を低くしてから、

$\dfrac{s}{s^2+1}=\dfrac{s}{(s-j)(s+j)}=\dfrac{C}{s-j}+\dfrac{D}{s+j}$ と置き、

留数 C は、$C=(s-j)\bullet\left.\dfrac{s}{(s-j)(s+j)}\right|_{s=j}=\dfrac{j}{j+j}=\dfrac{j}{2j}=\dfrac{1}{2}$

留数 D は、$D=(s+j)\bullet\left.\dfrac{s}{(s-j)(s+j)}\right|_{s=-j}=\dfrac{-j}{-j-j}=\dfrac{-j}{-2j}=\dfrac{1}{2}$

と計算するのが普通です。ところが、割り算をして前に出した s を通分して見ますと、

$$\begin{aligned}\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}&=s+\frac{s}{s^2+1}\\&=\frac{s(s^2+1)}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}\\&=\frac{s(s-j)(s+j)}{(s-j)(s+j)}+\frac{s}{(s-j)(s+j)}\\&=\frac{s(s-j)(s+j)+s}{(s-j)(s+j)}\end{aligned}$$

になり、通分した時、s の後ろに分母の因数が全部付いて来ます。この形で留数計算を行いますと、

留数 C は、$C=(s-j)\bullet\left.\dfrac{s(s-j)(s+j)+s}{(s-j)(s+j)}\right|_{s=j}=\dfrac{0+j}{j+j}=\dfrac{j}{2j}=\dfrac{1}{2}$

留数 D は、$D=(s+j)\bullet\left.\dfrac{s(s-j)(s+j)+s}{(s-j)(s+j)}\right|_{s=-j}=\dfrac{0-j}{-j-j}=\dfrac{-j}{-2j}=\dfrac{1}{2}$

になり、s に j またはーj を代入したときに分子第 1 項は消えてしまいます。割り算後通分した上式の分子と、元の式の分子とは同じものである為、分子の次数が 1 次高い元の式で留数計算をしても、

留数 C は、$C = (s - j) \bullet \left.\dfrac{s(s^2 + 2)}{(s - j)(s + j)}\right|_{s=j} = \dfrac{j(j^2 + 2)}{j + j} = \dfrac{j(-1 + 2)}{2j} = \dfrac{1}{2}$

留数 D は、$D = (s + j) \bullet \left.\dfrac{s(s^2 + 2)}{(s - j)(s + j)}\right|_{s=-j} = \dfrac{-j\{(-j)^2 + 2\}}{-j - j} = \dfrac{-j(-1 + 2)}{-2j} = \dfrac{1}{2}$

の様に、割り算を行い分子の次数が低い場合と全く同じ結果になります。分子の次数が 1 次高い状態のままでも、虚軸上の 0 以外の極の留数が正しく求まります。

4、虚軸上の共役な極について

(1)留数

虚軸上の共役な極の留数は同じになります。例えば、

$$\frac{a_{m-1}(s^2 + {\omega_1}^2)(s^2 + {\omega_3}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s(s + \omega_2)(s^2 + {\omega_4}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

$$= \frac{a_{m-1}(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)(s - j\omega_3)(s + j\omega_3)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_m\, s(s - j\omega_2)(s + j\omega_2)(s - j\omega_4)(s + j\omega_4)\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

で虚軸上の共役な極の留数を求めます。留数を求めようとする分母の共役の因数、$s - j\omega_2$ と $s + j\omega_2$ だけを残し、

$$= \frac{g(s)}{(s - j\omega_2)(s + j\omega_2)\cdot f(s)}$$

と表します。分子は因数を全部まとめて g(s)、分母は $s - j\omega_2$ と $s + j\omega_2$ 以外の因数をまとめて f(s)という式の名前にしました。

極＋jω_2 での留数 C を求める時、$s - j\omega_2$ を掛けてから s に jω_2 を代入します。

$$C = \left[\cancel{(s - j\omega_2)}\cdot\frac{g(s)}{\cancel{(s - j\omega_2)}(s + j\omega_2)\cdot f(s)}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\left[\frac{g(s)}{(s+j\omega_2)\cdot f(s)}\right]_{s=j\omega_2}$$

$$=\frac{g(j\omega_2)}{2j\omega_2\cdot f(j\omega_2)}$$

となります。次に極$-j\omega_2$での留数 D を求める時、$s+j\omega_2$を掛けてから s に$-j\omega_2$を代入します。

$$D=\left[\cancel{(s+j\omega_2)}\cdot\frac{g(s)}{(s-j\omega_2)\cancel{(s+j\omega_2)}\cdot f(s)}\right]_{s=-j\omega_2}$$

$$=\left[\frac{g(s)}{(s-j\omega_2)\cdot f(s)}\right]_{s=-j\omega_2}$$

$$=\frac{g(-j\omega_2)}{-2j\omega_2\cdot f(-j\omega_2)}$$

となります。複素数の性質として、「ある式に複素数を代入した答えと、同じ式に共役複素数を代入した答えは、共役になる。」と言うものがありました。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章の 2 をご参照下さい。留数 C を求める式の g(s)、f(s)には $s=0+j\omega_2=j\omega_2$ と言う複素数が代入され、留数 D を求める式の g(s)、f(s)には $s=0-j\omega_2=-j\omega_2$ と言う複素数が代入されました。

また分母の f(s)の前には、2s と言う式が付いているのと同じと考えられます。留数 C を求める場合は、2s に $s=0+j\omega_2=j\omega_2$ が代入され $2j\omega_2$ となり、留数 D を求める場合は 2s に $s=0-j\omega_2=-j\omega_2$ が代入され$-2j\omega_2$ となります。

同じ式に共役複素数を代入した答えですから、留数 C と留数 D は共役になります。留数 C が仮に P＋jQ と言う複素数なら、留数 D は P－jQ と言う共役になります。

ところが「虚軸上の留数は正である」の章に有ります様に、リアクタンス関数の留数は必ず正の実数になります。極$+j\omega_2$での留数 C と、極$-j\omega_2$での留数 D は同じ実数 P になります。

(2)フォスター展開

上記の様に、共役な極$\pm j\omega_2$の部分分数分解は同じ留数を持つ、

$$\frac{P}{s-j\omega_2}+\frac{P}{s+j\omega_2}$$

になります。この２つの分数を通分しますと、

$$
\begin{aligned}
&=\frac{P(s+j\omega_2)}{(s-j\omega_2)(s+j\omega_2)}+\frac{P(s-j\omega_2)}{(s-j\omega_2)(s+j\omega_2)}\\
&=\frac{Ps+j\omega_2+Ps-j\omega_2}{(s-j\omega_2)(s+j\omega_2)}\\
&=\frac{2Ps}{s^2+\omega_2{}^2}
\end{aligned}
$$

になります。この原理を利用した「フォスター展開」と言う留数の求め方があります。虚軸上の共役な極の留数が１回で求まります。駆動点リアクタンス X が、

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{a_m\ (s^2+\omega_1{}^2)\ (s^2+\omega_3{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\ s\ (s^2+\omega_2{}^2)\ (s^2+\omega_4{}^2)\bullet\bullet\bullet\bullet}\\
&= As+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-j\omega_2}+\frac{D}{s+j\omega_2}+\frac{E}{s-j\omega_4}+\frac{F}{s+j\omega_4}\bullet\bullet\bullet\bullet\\
&= As+\frac{B}{s}+\frac{2Cs}{s^2+\omega_2{}^2}+\frac{2Es}{s^2+\omega_4{}^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet
\end{aligned}
$$

と部分分数出来ると仮定します。両辺に $\dfrac{(s^2+\omega_2{}^2)}{s}$ を掛けますと、

$$
\begin{aligned}
\frac{X\bullet(s^2+\omega_2{}^2)}{s} &= \frac{As(s^2+\omega_2{}^2)}{s}+\frac{B(s^2+\omega_2{}^2)}{s^2}+\frac{2Cs(s^2+\omega_2{}^2)}{s(s^2+\omega_2{}^2)}+\frac{2Es(s^2+\omega_2{}^2)}{s(s^2+\omega_4{}^2)}+\bullet\bullet\bullet\bullet\\
&= A(s^2+\omega_2{}^2)+\frac{B(s^2+\omega_2{}^2)}{s^2}+2C+\frac{2E(s^2+\omega_2{}^2)}{(s^2+\omega_4{}^2)}+\bullet\bullet\bullet\bullet
\end{aligned}
$$

になります。ここで右辺の $s^2=-\omega_2{}^2$ と置きますと、

$$\left[A(s^2+\omega_2{}^2)+\frac{B(s^2+\omega_2{}^2)}{s^2}+2C+\frac{2E(s^2+\omega_2{}^2)}{(s^2+\omega_4{}^2)}+\bullet\bullet\bullet\bullet\right]_{s^2=-\omega_2{}^2}=2C$$

になり、右辺は 2C 以外は零となります。したがって 2C、2E 等は、

$$\left[\frac{X\cdot(s^2+\omega_n{}^2)}{s}\right]_{s^2=-\omega_n{}^2}$$

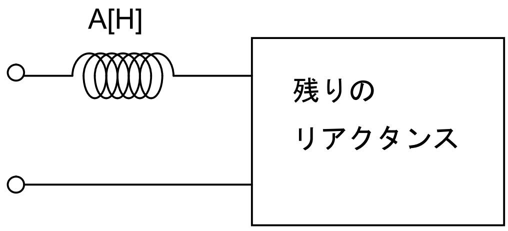
で求めることが出来ます。この式の駆動点リアクタンス X は、駆動点サセプタンス B の場合もあります。

5、部分分数分解したリアクタンス関数で回路を作る

(1)As 項の実現

①駆動点リアクタンスの場合

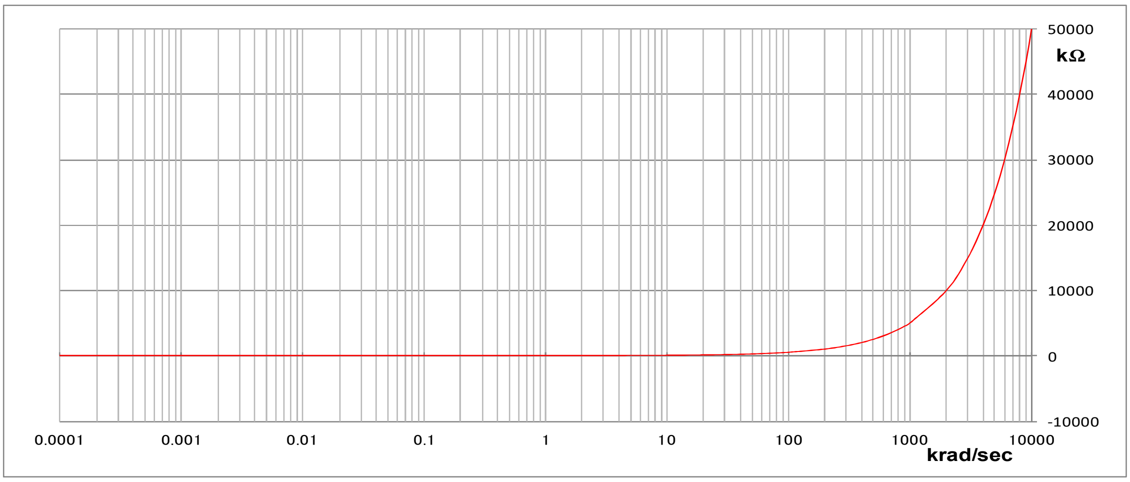
　ラプラスの世界でコイルのリアクタンスは sL です。したがって As 項は L=A で実現できます。A ヘンリーのコイルです。コイルは∞の周波数で∞のリアクタンスを持ちますので、直列で取り出します。



As の s に jω を代入しますと、

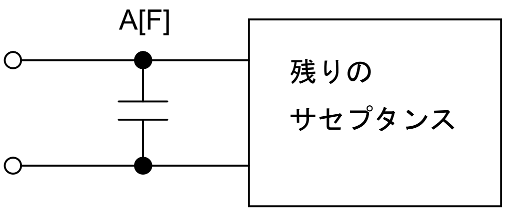
$$[As]_{s=j\omega}=Aj\omega=jA\omega$$

となります。角周波数の増加に従い、誘導性リアクタンスも、A と言う比例定数で増大して行きます。無限の角周波数で無限の誘導性リアクタンスを持ちます。下のグラフです。片側が対数ですので直線になりません。



②駆動点サセプタンスの場合

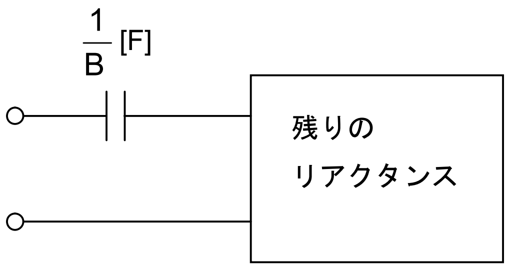
ラプラスの世界でコンデンサーのサセプタンスは sC です。したがって As 項は C=A で実現できます。A ファラッドのコンデンサーです。コンデンサーは∞の周波数で∞のサセプタンスを持ちます。サセプタンスが∞ということは、リアクタンスが 0（導通）と言うことです。したがって、サセプタンスは並列で取り出します。



(2) $\dfrac{B}{s}$ 項の実現

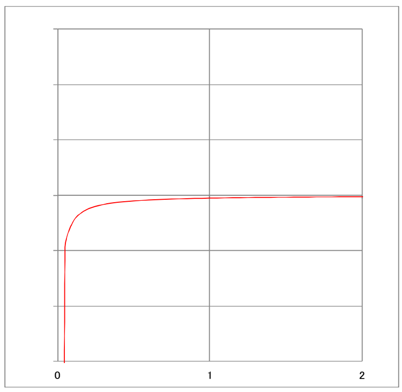
①駆動点リアクタンスの場合

ラプラスの世界でコンデンサーのリアクタンスは $\dfrac{1}{sC}=\dfrac{\frac{1}{C}}{s}$ です。したがって $\dfrac{B}{s}$ 項は $B=\dfrac{1}{C}$ つまり $C=\dfrac{1}{B}$ で実現できます。$\dfrac{1}{B}$ ファラッドのコンデンサーです。s=0 で∞のリアクタンス（開放）を持ちまのすので、リアクタンスは直列で取り出します。



$\dfrac{B}{s}$ の s に jω を代入しますと、

$$\left[\frac{B}{s}\right]_{s=j\omega}=\frac{B}{j\omega}=\frac{j\cdot B}{j\cdot j\omega}=-j\frac{B}{\omega}$$

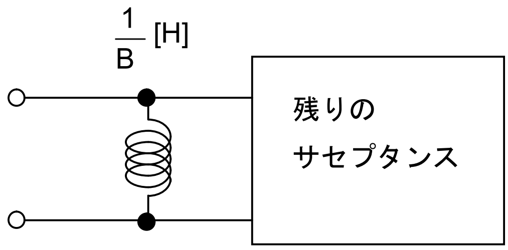


になります。容量性である負のリアクタンスを持ちます。0 が極です。角周波数が 0 から＋に変化しますと、負の巨大な容量性リアクタンスが次第に小さくなります。右のグラフです。横軸は角周波数 ω、縦軸がリア

クタンスです。

②駆動点サセプタンスの場合

ラプラスの世界でコイルのサセプタンスは $\frac{1}{sL}=\frac{\frac{1}{L}}{s}$ です。したがって $\frac{B}{s}$ 項は $B=\frac{1}{L}$ つまり $L=\frac{1}{B}$ で実現できます。$\frac{1}{B}$ ヘンリーのコイルです。s＝0 で∞のサセプタンス（導通）を持ちます。したがって、サセプタンスは並列で取り出します。



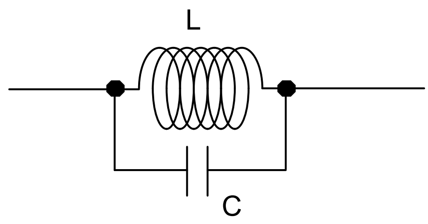
(3) $\frac{2Ps}{s^2+\omega_n^{\ 2}}$ 項の実現

フォスター展開において、虚軸上の共役な極の留数 2C、2E 等をここでは 2P で表します。

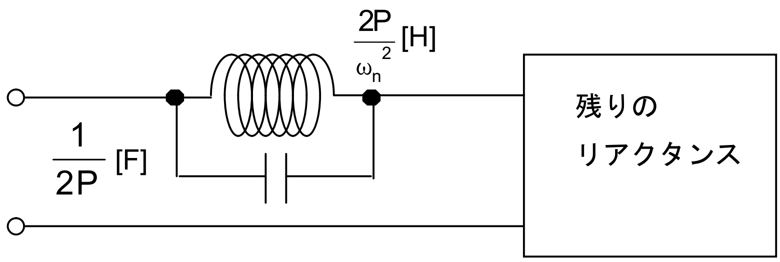
①駆動点リアクタンスの場合

並列共振回路の、ラプラスの世界でのリアクタンスは、

$$\frac{sL\bullet\frac{1}{sC}}{sL+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{s}{L}\left(sL\bullet\frac{1}{sC}\right)}{\frac{s}{L}\left(sL+\frac{1}{sC}\right)}=\frac{\frac{1}{C}s}{s^2+\frac{1}{LC}}$$



です。この式と $\frac{2Ps}{s^2+\omega_n^{\ 2}}$ が等しいとすれば、$2P=\frac{1}{C}$ ですから、$C=\frac{1}{2P}$ ファラッドとなります。$\frac{1}{LC}=\omega_n^{\ 2}$ ですから、$C=\frac{1}{2P}$ を代入しますと、$L=\frac{2P}{\omega_n^{\ 2}}$ ヘンリーとなります。リアクタンスからは並列共振回路を直列で取り出します。



フォスター展開$\dfrac{2Ps}{s^2+\omega_2{}^2}$は$j\omega_2$が極です。$\dfrac{2Ps}{s^2+\omega_2{}^2}$のsに、$j\omega_2$よりも絶対値が小さい$j\omega_1$を代入しますと、

$$\left[\frac{2Ps}{s^2+\omega_2{}^2}\right]_{s=j\omega_1}=\frac{2Pj\omega_1}{(j\omega_1)^2+\omega_2{}^2}=\frac{2Pj\omega_1}{-\omega_1{}^2+\omega_2{}^2}=j\frac{2P\omega_1}{\omega_2{}^2-\omega_1{}^2}$$

になりますので、誘導性である正のリアクタンスを持ちます。$\dfrac{2Ps}{s^2+\omega_2{}^2}$のsに、$j\omega_2$よりも絶対値が大きい$j\omega_3$を代入しますと、

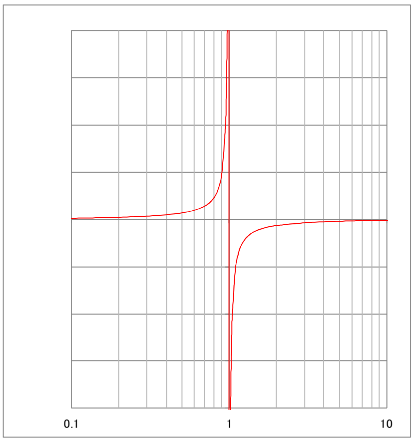
$$\left[\frac{2Ps}{s^2+\omega_2{}^2}\right]_{s=j\omega_3}=\frac{2Pj\omega_3}{(j\omega_3)^2+\omega_2{}^2}=\frac{2Pj\omega_3}{-(\omega_3{}^2-\omega_2{}^2)}=-j\frac{2P\omega_3}{\omega_3{}^2-\omega_2{}^2}$$

になりますので、容量性である負のリアクタンスを持ちます。

虚軸上の正の角周波数が小の方向から極に近づきますと、リアクタンスは正の誘導性リアクタンスがだんだん巨大になります。

極から大の方向に遠ざかりますと、負の巨大な容量性リアクタンスとして現れだんだん小さくなります。右のグラフです。

極では無限のリアクタンスを持たなければいけませんので直列で取り出します。

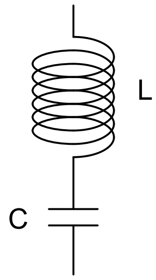


②駆動点サセプタンスの場合

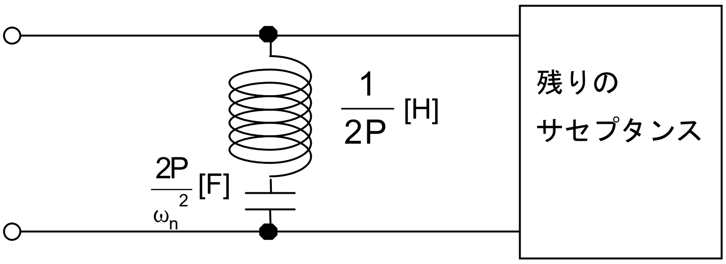
右図の直列共振回路のラプラスの世界でのサセプタンスは、

$$\frac{1}{sL+\dfrac{1}{sC}}=\frac{\dfrac{s}{L}}{\dfrac{s}{L}\left(sL+\dfrac{1}{sC}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{L}s}{s^2+\dfrac{1}{LC}}$$



です。この式と $\dfrac{2Ps}{s^2+\omega_n^{\,2}}$ が等しいとすれば、$2P=\dfrac{1}{L}$ ですから、$L=\dfrac{1}{2P}$ ヘンリーとなります。$\dfrac{1}{LC}=\omega_n^{\,2}$ ですから、$L=\dfrac{1}{2P}$ を代入しますと、$C=\dfrac{2P}{\omega_n^{\,2}}$ ファラッドとなります。直列共振回路のサセプタンスは極で∞になります。サセプタンスが∞とはリアクタンスが 0（導通）のことです。サセプタンスからは直列共振回路を並列で取り出します。



8、微分

以上でリアクタンス関数の部分分数分解の方法が分りました。部分分数に分解したリアクタンス関数を再度提示します。

$$\frac{a_m\ (s^2+\omega_1^{\,2})\ (s^2+\omega_3^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}{b_{m-1}\ s\ (s^2+\omega_2^{\,2})\ (s^2+\omega_2^{\,2})\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

$$=As+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-j\omega_2}+\frac{D}{s+j\omega_2}+\frac{E}{s-j\omega_2}+\frac{F}{s+j\omega_2}\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$=As+\frac{B}{s}+\frac{2Cs}{s^2+\omega_2^{\,2}}+\frac{2Es}{s^2+\omega_4^{\,2}}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

それぞれの項の s に jω を代入し、交流理論の世界のリアクタンス関数を求めますと、

$$jA\omega+\frac{B}{j\omega}+\frac{j2C\omega}{(j\omega)^2+\omega_2^{\,2}}+\frac{j2E\omega}{(j\omega)^2+\omega_4^{\,2}}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$=jA\omega-j\frac{B}{\omega}+j\frac{2C\omega}{\omega_2^{\,2}-\omega^2}+j\frac{2E\omega}{\omega_4^{\,2}-\omega^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$=j\left(A\omega-\frac{B}{\omega}+\frac{2C\omega}{\omega_2^{\,2}-\omega^2}+\frac{2E\omega}{\omega_4^{\,2}-\omega^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet\right)$$

になります。この括弧内を微分して ω に対する傾きを求めますと、

$$\frac{d}{d\omega}\left(A\omega-\frac{B}{\omega}+\frac{2C\omega}{{\omega_2}^2-\omega^2}+\frac{2E\omega}{{\omega_4}^2-\omega^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet\right)$$

$$=A-B\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{2C({\omega_2}^2-\omega^2)-2C\omega(-2\omega)}{({\omega_2}^2-\omega^2)^2}+\frac{2E({\omega_4}^2-\omega^2)-2E\omega(-2\omega)}{({\omega_4}^2-\omega^2)^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$=A+\frac{B}{\omega^2}+\frac{2C{\omega_2}^2-2C\omega^2+4C\omega^2}{({\omega_2}^2-\omega^2)^2}+\frac{2E{\omega_4}^2-2E\omega^2-4E\omega^2}{(\omega^2+{\omega_4}^2)^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$=A+\frac{B}{\omega^2}+\frac{2C{\omega_2}^2+2C\omega^2}{({\omega_2}^2-\omega^2)^2}+\frac{2E{\omega_4}^2+2E\omega^2}{(\omega^2+{\omega_4}^2)^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$=A+\frac{B}{\omega^2}+\frac{2C({\omega_2}^2+\omega^2)}{({\omega_2}^2-\omega^2)^2}+\frac{2E({\omega_4}^2+\omega^2)}{(\omega^2+{\omega_4}^2)^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$$

になります。留数 A、B、C、E 等は正です。微分した全ての項は、極以外で正です。リアクタンス関数は極を除いて、常に増加する関数になります。そのことにより、リアクタンス関数は、極、零点、極、零点、極と言う様に、極と零点は交互に来るようになります。下のグラフの様になります。このグラフのリアクタンス関数は、

$$\frac{(s^2+0.1^2)(s^2+10^2)(s^2+1000^2)}{s(s^2+1^2)(s^2+100^2)}$$

$$=s+\frac{100}{s}+\frac{2\cdot 4901s}{s^2+1^2}+\frac{2\cdot 490100s}{s^2+100^2}$$

です。交流理論の世界のリアクタンス関数に直しますと、

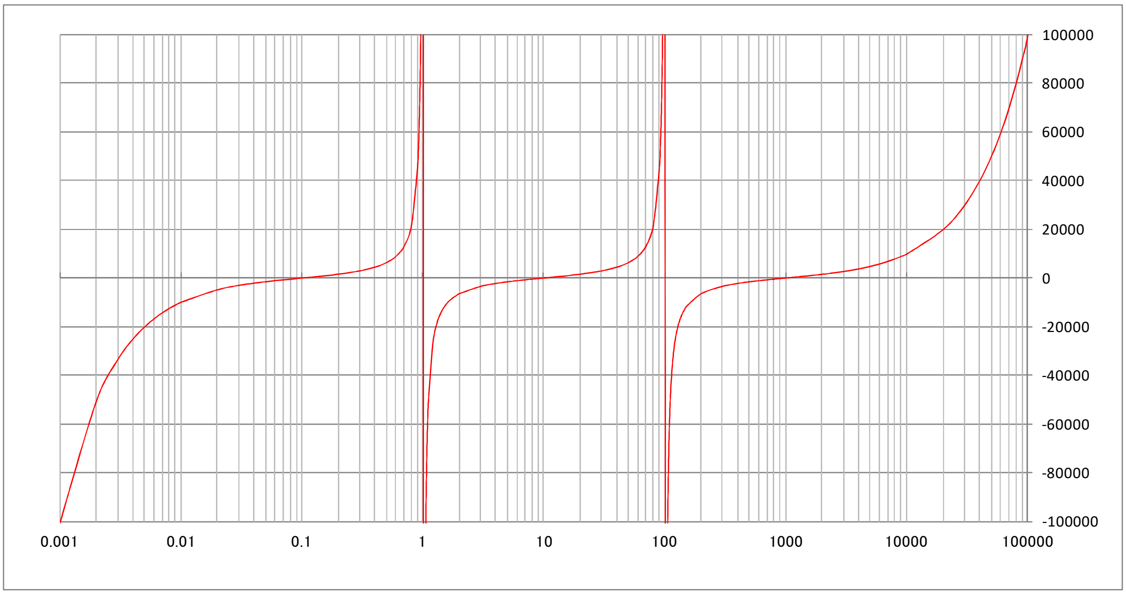
$$j\omega+\frac{100}{j\omega}+\frac{2\cdot 4901\cdot j\omega}{(j\omega)^2+1^2}+\frac{2\cdot 490100\cdot j\omega}{(j\omega)^2+100^2}$$

$$=j\omega-j\frac{100}{\omega}+j\frac{9802\omega}{1^2-\omega^2}+j\frac{980200\omega}{100^2-\omega^2}$$

$$=j\left(\omega-\frac{100}{\omega}+\frac{9802\omega}{1^2-\omega^2}+\frac{980200\omega}{100^2-\omega^2}\right)$$

$$=j\left(\omega-\frac{100}{\omega}+\frac{9802\omega}{1-\omega^2}+\frac{980200\omega}{10000-\omega^2}\right)$$

です。括弧内をグラフにしました。横軸は角周波数、縦軸は駆動点リアクタンスまたは駆動点サセプタンスです。


100000
80000
60000
40000
20000
0
-20000
-40000
-60000
-80000
-100000
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
10000
100000

目次へ戻る