

2021.10.27 2021.12.21 2021.12.27 2022.1.4 2023.1.16 訂正

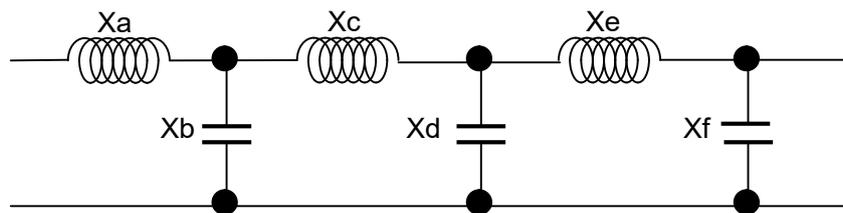
リアクタンスだけで出来た回路は電力を消費しません。ラプラスの世界で表したリアクタンスの s を $j\omega$ にして、交流理論のリアクタンスに直した時、実数部が生じず虚数部のみの $0 \pm jX [\Omega]$ になる為です。

加えた電圧に対し 90 度遅れ、または 90 度進みの電流しか流れず、電力は消費しません。その為には、回路のリアクタンスをラプラスの世界の s で表した時、 s の奇関数になることが必要です。ラプラスの世界のリアクタンス s を、 $s=j\omega$ で交流理論のリアクタンスに直した時、 s の偶関数では、 $(sL)^4 = (j\omega L)^4 = \omega^4 L^4$ の様に変化するからです。

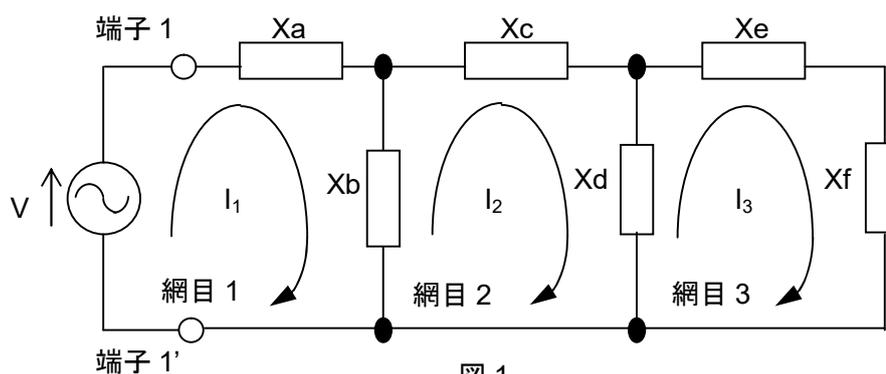
実数に変化したリアクタンスは抵抗です。抵抗は電力を消費します。リアクタンスだけの回路は、 s の奇関数の回路しか出来ないことになります。何故かを説明します。

1、網目（あみめ）法による回路解析

ラプラスの世界のリアクタンスだけの、下の回路を解析します。あまり難しい回路は考えず、常識的なはしご型回路で考えます。



回路の網目電流を、全部時計回りに決めます。キルヒホッフの法則により式を立てます。



網目電流 I_1 が流れる網目を網目 1 とします。他の網目電流と網目番号の関係も同じです。

キルヒホッフの第 2 法則により、網目電流の向きを正の向きとし、網目内の全ての電源電圧と全ての電圧降下を加えると零になります。 I_1 の網目においてリアクタンス Xa には I_1 による電圧降下が I_1 の向きとは反対に生じます。リアクタンス Xb には I_1 による電圧降下が

I_1 の向きとは反対に生じます。リアクタンス X_b には I_2 による電圧降下が I_1 と同じ向きに生じます。電源 V が I_1 と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} V - X_a I_1 - X_b I_1 + X_b I_2 &= 0 \\ V &= X_a I_1 + X_b I_1 - X_b I_2 \\ (X_a + X_b) I_1 - X_b I_2 &= V \end{aligned}$$

最後の式に注目し、左辺に電圧降下、右辺に電源電圧を書き、初めから釣り合いの式にする方法もあります。既に移項されているので、自分の網目電流およびそれと同じ向きの網目電流による電圧降下は+、自分の網目電流とは反対向きの網目電流による電圧降下は-になります。次の網目からはこの方法で式を立てます。

網目2においてリアクタンス X_b 、 X_c 、 X_d には I_2 による電圧降下、リアクタンス X_b には I_1 による電圧降下、リアクタンス X_d には I_3 による電圧降下が生じます。網目内部に電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-X_b I_1 + (X_b + X_c + X_d) I_2 - X_d I_3 = 0$$

網目3においてリアクタンス X_d 、 X_e 、 X_f には I_3 による電圧降下、リアクタンス X_d には I_2 による電圧降下が生じます。網目内部に電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-X_d I_2 + (X_d + X_e + X_f) I_3 = 0$$

行列に書き直す為、各式に足りない電流を書き加えますと、

$$\begin{aligned} (X_a + X_b) I_1 - X_b I_2 + 0 \cdot I_3 &= V \\ -X_b I_1 + (X_b + X_c + X_d) I_2 - X_d I_3 &= 0 \\ 0 \cdot I_1 - X_d I_2 + (X_d + X_e + X_f) I_3 &= 0 \end{aligned}$$

になります。この式を行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} X_a + X_b & -X_b & 0 \\ -X_b & X_b + X_c + X_d & -X_d \\ 0 & -X_d & X_d + X_e + X_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots 1-①$$

になります。1-①式の行列を網目行列と呼ぶことにします。

電源のある網目電流 I_1 を求めます。1-①式からクラメル (クラメルやクラメールとも

呼びます)の解法により、

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & -X_b & 0 \\ 0 & X_b + X_c + X_d & -X_d \\ 0 & -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_a + X_b & -X_b & 0 \\ -X_b & X_b + X_c + X_d & -X_d \\ 0 & -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}} \dots 1-②$$

になります。1-①式右辺の電圧の列が、行列式の分子1列目に入ります。求めたい I_1 の列に電圧の列を入れます。分母は行列の X と同じ並びです。分子の1列目では2行目3行目が0ですから、分子を1列目で展開しますと、

$$= \frac{V \begin{vmatrix} X_b + X_c + X_d & -X_d \\ -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -X_b & 0 \\ -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -X_b & 0 \\ X_b + X_c + X_d & -X_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_a + X_b & -X_b & 0 \\ -X_b & X_b + X_c + X_d & -X_d \\ 0 & -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{V \begin{vmatrix} X_b + X_c + X_d & -X_d \\ -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_a + X_b & -X_b & 0 \\ -X_b & X_b + X_c + X_d & -X_d \\ 0 & -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{11}}{\Delta}$$

と言う式になります。

Δ は分母の行列式です。1-①式の網目行列左辺の各リアクタンスの並びと同じです。

Δ_{11} は分母行列式または1-②の分子行列式の1行目1列目の余因数(よいんすう)です。余因数は余因子(よいんし)とも呼びます。

i 行目 j 列目の余因数とは、行列式から i 行目と j 列目の数字や文字を除去し、頭に+または-を付けた行列式です。 i 行目 j 列目の余因数の場合、 $i+j$ が偶数の場合は+、 $i+j$ が奇数の場合は-を付けます。1行目1列目の余因数の場合+になります。

1ページの図1で、端子1-1'から回路側を見た時のリアクタンスを、駆動点リアクタンスと呼びます。駆動点リアクタンス X は、 $\frac{\text{電圧 } V}{\text{電流 } I_1}$ ですから、

$$X = \frac{V}{I_1} = \frac{V}{\frac{V \cdot \Delta_{11}}{\Delta}} = \frac{V \cdot \Delta}{V \cdot \Delta_{11}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} X_a + X_b & -X_b & 0 \\ -X_b & X_b + X_c + X_d & -X_d \\ 0 & -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_b + X_c + X_d & -X_d \\ -X_d & X_d + X_e + X_f \end{vmatrix}}$$

と言う式になります。

2、リアクタンス回路の駆動点リアクタンス

ここまでの内容を一般化します。駆動点 1-1'以外に電源を持たないリアクタンス回路網の場合、網目電流の行列は次のようになります。網目番号と網目電流番号は同じとします。

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & \cdots & X_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

1 行目の X_{11} から X_{1n} までは、網目 1 の様子を表しています。

1 行目 1 列目の X_{11} は、網目 1 内で電流 I_1 による電圧降下を生じるリアクタンスです。

1 行目 2 列目の X_{12} は、網目 1 内で電流 I_2 による電圧降下を生じるリアクタンスです。

1 行目 3 列目の X_{13} は、網目 1 内で電流 I_3 による電圧降下を生じるリアクタンスです。

.....

2 行目の X_{21} から X_{2n} までは、網目 2 の様子を表しています。

2 行目 1 列目の X_{21} は、網目 2 内で電流 I_1 による電圧降下を生じるリアクタンスです。

2 行目 2 列目の X_{22} は、網目 2 内で電流 I_2 による電圧降下を生じるリアクタンスです。

2 行目 3 列目の X_{23} は、網目 2 内で電流 I_3 による電圧降下を生じるリアクタンスです。

.....

つまり添え字がゼロ目の X_{11} 、 X_{22} 、 X_{33} 、 \cdots 、 X_{nn} は、網目内にある全部のリアクタンスを表し、自己リアクタンスと呼ばれます。1-①式をご参照下さい。

一方添え字の食い違っている X_{ij} は、網目 i と網目 j との間にある共通のリアクタンスで、共通（または相互）リアクタンスと呼ばれます。例えば X_{12} は、網目 1 と網目 2 との間にある共通リアクタンスです。また X_{23} は、網目 2 と網目 3 との間にある共通リアクタンスです。

1-①式をご参照下さい。

網目 1 でキルヒホッフの式を作る時の網目 2 との共通インピーダンス X_{12} は、網目 2 でキルヒホッフの式を作る時の網目 1 との共通インピーダンス X_{21} と同じになります。

つまり網目 i での網目 j との共通インピーダンス X_{ij} は、網目 j での網目 i との共通インピーダンス X_{ji} と同じもの（同じでなければ共通インピーダンスと呼ばない）ですので、 $X_{ij} = X_{ji}$ になります。1-①式の例で言えば $X_{12} = X_{21}$ 、 $X_{13} = X_{31}$ 、 $X_{23} = X_{32}$ などです。このように $X_{ij} = X_{ji}$ になっている行列を対称行列と呼びます。

全ての網目電流を時計回り、または反時計回りに決めていきます。

網目の数は最後の n に現れます。駆動点以外に電圧を持たない場合、 V の列は 2 行目以降が 0 になります。

連立方程式のクラメールの解法により、網目電流 I_1 は、

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & X_{12} & \dots & \dots & \dots & X_{1n} \\ 0 & X_{22} & \dots & \dots & \dots & X_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ 0 & X_{n2} & \dots & \dots & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & \dots & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & \dots & \dots & X_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & \dots & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}}$$

になります。分子行列式では求めたい電流の列を除去し、 V の列を入れます。 I_1 の分子行列式 1 列目では 2 行目以降が 0 ですから、1 列目について展開しますと、

$$= \frac{V \begin{vmatrix} X_{22} & \dots & \dots & X_{2n} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ X_{n2} & \dots & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & \dots & X_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{11}}{\Delta}$$

になります。

端子 1-1' から回路内部を見る、駆動点リアクタンス X を求めますと、

$$X = \frac{V}{I_1} = \frac{V}{\frac{V \cdot \Delta_{11}}{\Delta}} = \frac{V \cdot \Delta}{V \cdot \Delta_{11}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} X_{11} & X_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccccc} X_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ X_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{array} \end{array}}{\Delta_{11}}$$

になります。先程も説明致しましたが、 Δ_{11} は Δ の 1 行目 1 列目の余因数です。i 行目 j 列目の余因数とは、行列式 Δ から i 行目と j 列目の数字や文字を除去し、頭に + または - を付けた行列式です。i 行目 j 列目の余因数の場合、i+j が偶数の場合は +、i+j が奇数の場合は - を付けます。1 行目 1 列目の余因数の場合 + になります。

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$ が、コイルとコンデンサーのみで構成されるリアクタンス回路で、コイルとコンデンサーの並列回路が全て網目に分解されているとすれば、ラプラスの世界での自己リアクタンスや共通リアクタンスは、複数のコイルのリアクタンスの和 sL と、複数のコンデンサーのリアクタンスの和 $\frac{1}{sC}$ の直列リアクタンス、

$$sL + \frac{1}{sC} = \frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$$

になります。(コンデンサーのリアクタンスの直列が、和で良いことの証明は本章の 5 にあります) 和を L と C の一文字で表しています。

自己リアクタンスや共通リアクタンスが、いつも複数のコイルと複数のコンデンサーで構成されている訳では無く、コイルが複数でコンデンサーが 1 個の場合もありますし、コイルが 1 個でコンデンサーが複数の場合もあります。また 1 個ずつの場合もあり、どちらか 1 個だけの場合もあります。

n 行 n 列の行列式の計算は、自己リアクタンスや共通リアクタンスの中からルールに従って取り出す n 個の積の、和と差になります。n とは網目の数のことです。n 個の積になれないのは、n 個の中に 0 のある場合で、その項は 0 になり消滅します。

必ず、 $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ または $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ の、どれかとどれかと \dots どれかの n 個の積の、和と差になります。

Δ は次の様に書くことが出来ます。

$$\Delta = \frac{1}{s^n}(a_n s^{2n} + a_{n-1} s^{2n-2} \cdots \cdots a_1 s^2 + a_0)$$

上式で、 $\frac{1}{s}$ は常に n 乗になります。 $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ または $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ の n 個の積だからです。括弧内の s は $2n$ 乗が最大となります。行列式の自己リアクタンスや共通リアクタンスからルールに従って取り出す n 個中に、全て s^2L が含まれている場合です。

行列式の計算では、左上の X_{11} から右下の X_{nn} までの全自己リアクタンスの積の計算が必ず表れ、それが s^2L の最高次数になります。回路図中の全リアクタンスの積ですから、他の行列式の計算が、この s^2L の次数を超えることはありません。 X_{11} から X_{nn} までの自己リアクタンスに全て $\frac{1}{s}(s^2L)$ が含まれている場合、括弧内の s が $2n$ 乗になります。

一方 Δ_{11} は Δ の 1 行目と 1 列目を取り去った、余因数の行列式です。余因数の行列式の計算は、自己リアクタンスや共通リアクタンス中からルールに従って取り出す $(n-1)$ 個の積の、和と差です。 $(n-1)$ 個の積になれないのは、 $(n-1)$ 個の中に 0 のある場合で、その項は 0 になり消滅します。必ず、 $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ または $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ の、どれかとどれかと……どれかの $(n-1)$ 個の積の、和と差になります。 Δ_{11} は次の様に書くことができます。

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= \frac{1}{s^{n-1}}(b_{n-1}s^{2(n-1)} + b_{n-2}s^{2(n-2)} \cdots \cdots b_1s^2 + b_0) \\ &= \frac{1}{s^{n-1}}(b_{n-1}s^{2n-2} + b_{n-2}s^{2n-4} \cdots \cdots b_1s^2 + b_0)\end{aligned}$$

上式で、 $\frac{1}{s}$ はつねに $(n-1)$ 乗です。括弧内の s は $(2n-2)$ 乗が最大となります。行列式の自己リアクタンスや共通リアクタンスからルールに従って取り出す $(n-1)$ 個に、全て s^2L が含まれている場合です。余因数の計算でも、左上の X_{22} から右下の X_{nn} までの自己リアクタンスの積の計算が必ず表れ、それが s^2L の最高次数になります。網目 2 から網目 n までの全リアクタンスの積ですから、他の行列式の計算が、この s^2L の次数を超えることはありません。 X_{22} から X_{nn} までの自己リアクタンスに全て $\frac{1}{s}(s^2L)$ が含まれている場合、括弧内の s が $(2n-2)$ 乗になります。

3、奇関数の回路しか出来ない訳

下図は行列式 Δ を表にしたものです。太線の内側が Δ_{11} になります。添え字がゾロ目の自己リアクタンスには、網目内の全てのリアクタンスが現れます。左上隅の X_{11} から右下隅の X_{nn} まで、自己リアクタンスどうしを掛けた時に、 s は最大次数になります。行列式をどの行、どの列で展開しても、必ずこの左上隅から右下隅までの自己リアクタンスの掛け算が生じます。ただし展開時、 i 行目 j 列目の余因数において、 $i+j$ が偶数の場合は余因数の頭に $+$ 、 $i+j$ が奇数の場合は余因数の頭に $-$ が付きます。

X_{11}	X_{12}	X_{13}	·	·	X_{1n}
X_{21}	X_{22}	X_{23}	·	·	X_{2n}
X_{31}	X_{32}	X_{33}	·	·	X_{3n}
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	$X_{n-1\ n-1}$	·
X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}	·	·	X_{nn}

網目を後ろからたどって行きますと、この重要な自己リアクタンスのことが分ります。

最後の網目内にLが無くCだけの時は、自己リアクタンス X_{nn} は $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ になります。

共通リアクタンスになるCがある場合は、一つ前の網目にも共通リアクタンスとなりますから、表中の X_{nn} の左の共通リアクタンスと、 X_{nn} の上の共通リアクタンスも $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ になります。 X_{nn} の左ななめ上、 X_{nn} の一つ前の自己リアクタンス $X_{n-1\ n-1}$ も網目内の全リアクタンスを表しますから、そこにもこの共通リアクタンス $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ が現れます。

最後の網目内にLが有る時は、2つの場合があります。共通リアクタンスになるか、ならないかです。共通リアクタンスにならないLがある時は、 X_{nn} は $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ になります。先程も書きましたが、リアクタンスは全部まとめて一文字で表しています。

一方共通リアクタンスになるLがある時は、このLが一つ前の網目にも共通リアクタンスとなりますから、 X_{nn} の左の共通リアクタンスと、 X_{nn} の上の共通リアクタンスが、 $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ になります。自己リアクタンス $X_{n-1\ n-1}$ も、網目内の全リアクタンスを表しますから、そこにもこの共通リアクタンス $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ が現れます。

こうやって Δ の行列式と Δ_{11} の行列式が、全く同じに出来て行きます。 Δ の行列式と Δ_{11} の行列式で、 $\frac{1}{s}(s^2L)$ 、 $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ または $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ が、全く同じに増えて行きます。

X_{22} 付近がどうなっているかが問題です。ここが一番重要です。

表の X_{22} の左、共通リアクタンス X_{21} が、 $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ だった時は、共通リアクタンス X_{12} も、 $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ になります。そうすると、網目内の全リア

クタンスである自己リアクタンス X_{11} も、 $\frac{1}{s}(s^2L)$ または $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ になります。

もし X_{22} の左、共通リアクタンス X_{21} が C だけで、 $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ だった時は X_{22} の上、共通リアクタンス X_{12} も $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ です。その時 X_{11} の網目内に、共通リアクタンスにならない単独の L が有るか無いか重要です。

単独の L が無く、 C だけの時は自己リアクタンス X_{11} は、 $\frac{1}{s}(\frac{1}{C})$ になります。単独の L が有る場合は、自己リアクタンス X_{11} は $\frac{1}{s}(s^2L + \frac{1}{C})$ です。

結果的に行列式 Δ には二種類あります。 X_{11} に s^2L が有るか無いかです。

回路網の入力端子 1-1' から、回路内部を見た駆動点リアクタンス X は、 $\frac{\Delta}{\Delta_{11}}$ です。 X_{11}

に s^2L が有る場合の式は、

$$X = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\frac{1}{s^n}(a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0)}{\frac{1}{s^{n-1}}(b_{m-1} s^{2m-2} + b_{m-2} s^{2m-4} \dots + b_1 s^2 + b_0)}$$

になります。 m は左上隅の X_{11} から右下隅の X_{nn} まで、自己リアクタンスどうしの積に含まれている s^2L の最大個数です。 Δ の行列式の X_{11} に s^2L が有る為、 Δ の括弧内が、 Δ_{11} の括弧内より、 s の次数が 2 つ大きくなっています。分子分母に s^n を掛けますと、

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{s^n}{s^n}(a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0)}{\frac{s^n}{s^{n-1}}(b_{m-1} s^{2m-2} + b_{m-2} s^{2m-4} \dots + b_1 s^2 + b_0)} \\ &= \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0}{s(b_{m-1} s^{2m-2} + b_{m-2} s^{2m-4} \dots + b_1 s^2 + b_0)} \\ &= \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0}{b_{m-1} s^{2m-2+1} + b_{m-2} s^{2m-4+1} \dots + b_1 s^{2+1} + b_0 s} \\ &= \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0}{b_{m-1} s^{2m-1} + b_{m-2} s^{2m-3} \dots + b_1 s^3 + b_0 s} \end{aligned}$$

になります。

分母は奇関数になります。駆動点リアクタンス X は、 $\frac{\text{偶関数}}{\text{奇関数}}$ となりますので、奇関数

になります。分子の次数が分母の次数より 1 大きいです。

この式をひっくり返せば、駆動点サセプタンスになります。分母の次数が分子より 1 大きい $\frac{\text{奇関数}}{\text{偶関数}}$ で、奇関数になります。

X_{11} に $s^2 L$ が入らない場合は、

$$X = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\frac{1}{s^n} (a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0)}{\frac{1}{s^{n-1}} (b_m s^{2m} + b_{m-1} s^{2m-2} \dots + b_1 s^2 + b_0)}$$

になります。 X_{11} に $s^2 L$ が入らない為、 Δ の括弧内の s の次数と Δ_{11} の括弧内の s の次数が同じになります。分子分母に s^n を掛けると、

$$\begin{aligned} &= \frac{s^n (a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0)}{s^{n-1} (b_m s^{2m} + b_{m-1} s^{2m-2} \dots + b_1 s^2 + b_0)} \\ &= \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0}{s (b_m s^{2m} + b_{m-1} s^{2m-2} \dots + b_1 s^2 + b_0)} \\ &= \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0}{b_m s^{2m+1} + b_{m-1} s^{2m-2+1} \dots + b_1 s^{2+1} + b_0 s} \\ &= \frac{a_m s^{2m} + a_{m-1} s^{2m-2} \dots + a_1 s^2 + a_0}{b_m s^{2m+1} + b_{m-1} s^{2m-1} \dots + b_1 s^3 + b_0 s} \end{aligned}$$

になります。

分母は奇関数になります。駆動点リアクタンス X は、 $\frac{\text{偶関数}}{\text{奇関数}}$ となりますので、奇関数

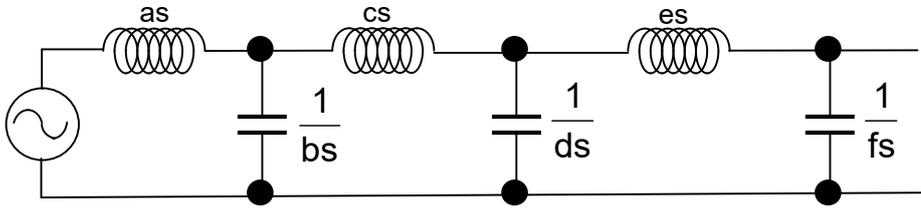
になります。先程とは反対に、分母の次数が分子の次数より 1 大きいです。駆動点の網目に L が無い時です。その時、分母の次数が大きくなります。

この式をひっくり返せば、駆動点サセプタンスになります。分子の次数が分母より 1 大きい $\frac{\text{奇関数}}{\text{偶関数}}$ で、奇関数になります。

リアクタンスだけの回路は、 s の奇関数の回路しか出来ないことが分りました。

4、具体例

①、 X_{11} がコイルとコンデンサーの、 $as + \frac{1}{bs}$ の場合、



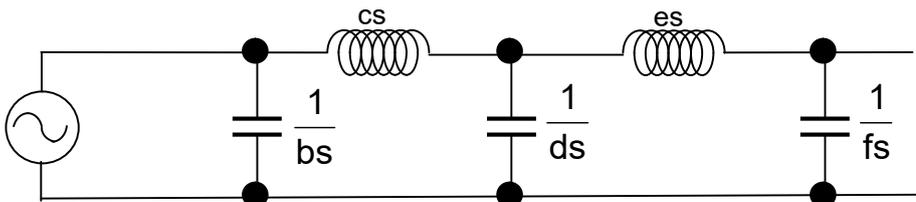
$$X = \frac{\begin{vmatrix} as + \frac{1}{bs} & -\frac{1}{bs} & 0 \\ -\frac{1}{bs} & \frac{1}{bs} + cs + \frac{1}{ds} & -\frac{1}{ds} \\ 0 & -\frac{1}{ds} & \frac{1}{ds} + es + \frac{1}{fs} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{bs} + cs + \frac{1}{ds} & -\frac{1}{ds} \\ -\frac{1}{ds} & \frac{1}{ds} + es + \frac{1}{fs} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s}(as^2 + \frac{1}{b}) & \frac{1}{s}(-\frac{1}{b}) & 0 \\ \frac{1}{s}(-\frac{1}{b}) & \frac{1}{s}(\frac{1}{b} + cs^2 + \frac{1}{d}) & \frac{1}{s}(-\frac{1}{d}) \\ 0 & \frac{1}{s}(-\frac{1}{d}) & \frac{1}{s}(\frac{1}{d} + es^2 + \frac{1}{f}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{s}(\frac{1}{b} + cs^2 + \frac{1}{d}) & \frac{1}{s}(-\frac{1}{d}) \\ \frac{1}{s}(-\frac{1}{d}) & \frac{1}{s}(\frac{1}{d} + es^2 + \frac{1}{f}) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{aces^6 + (\frac{ae}{b} + \frac{ce}{b} + \frac{ac}{d} + \frac{ae}{d} + \frac{ac}{f})s^4 + (\frac{a}{bd} + \frac{c}{bd} + \frac{e}{bd} + \frac{c}{bf} + \frac{a}{bf} + \frac{a}{df})s^2 + \frac{1}{bdf}}{ces^5 + (\frac{e}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{d} + \frac{c}{f})s^3 + (\frac{1}{bd} + \frac{1}{bf} + \frac{1}{df})s}$$

となり、分子の次数が大きいです。

②、 X_{11} がコンデンサーのみの、 $\frac{1}{bs}$ だけの場合、



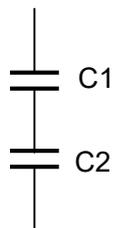
$$\begin{aligned}
X &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{bs} & -\frac{1}{bs} & 0 \\ \frac{1}{bs} & \frac{1}{bs} + cs + \frac{1}{ds} & -\frac{1}{ds} \\ 0 & -\frac{1}{ds} & \frac{1}{ds} + es + \frac{1}{fs} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{bs} + cs + \frac{1}{ds} & -\frac{1}{ds} \\ -\frac{1}{ds} & \frac{1}{ds} + es + \frac{1}{fs} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{b} & \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{b}\right) & 0 \\ \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{b}\right) & \frac{1}{s} \left(\frac{1}{b} + cs^2 + \frac{1}{d}\right) & \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{d}\right) \\ 0 & \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{d}\right) & \frac{1}{s} \left(\frac{1}{d} + es^2 + \frac{1}{f}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{b} + bc^2 + \frac{1}{d}\right) & \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{d}\right) \\ \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{d}\right) & \frac{1}{s} \left(\frac{1}{d} + es^2 + \frac{1}{f}\right) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\frac{bd}{b} s^4 + \left(\frac{c}{bd} + \frac{c}{bf} + \frac{e}{bd}\right) s^2 + \frac{1}{bdf}}{ces^5 + \left(\frac{c}{d} + \frac{c}{f} + \frac{e}{b} + \frac{e}{d}\right) s^3 + \left(\frac{1}{bd} + \frac{1}{bf} + \frac{1}{df}\right) s}
\end{aligned}$$

となり、分母の次数が大きいです。

5、直列コンデンサーのリアクタンス

(1)合成容量からリアクタンスを求める

合成容量 C :

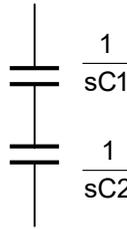


$$C = \frac{1}{\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}} = \frac{1}{\frac{C2 + C1}{C1C2}} = \frac{C1C2}{C1 + C2}$$

合成容量 C のラプラスの世界でのリアクタンス :

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{s \left(\frac{C1C2}{C1 + C2} \right)} = \frac{1}{\frac{sC1C2}{C1 + C2}} = \frac{C1 + C2}{sC1C2}$$

(2)コンデンサーのラプラスの世界でのリアクタンスの和



$$\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} = \frac{sC_2 + sC_1}{s^2C_1C_2} = \frac{s(C_2 + C_1)}{s^2C_1C_2} = \frac{C_1 + C_2}{sC_1C_2}$$

(2)の結果は(1)の最後と同じになりました。

既にリアクタンスになっている容量は、直列でも足し算で良いことが分りました。

[目次へ戻る](#)