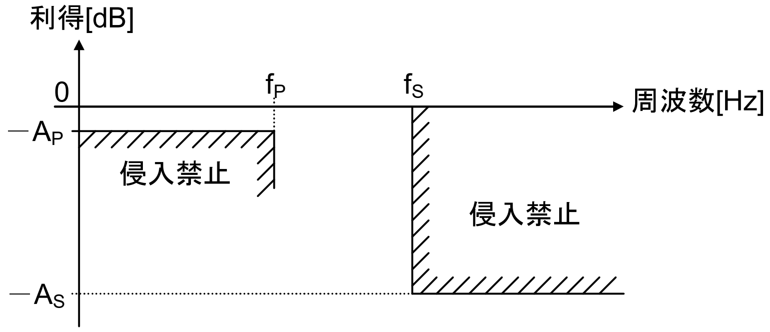
連立チェビシェフフィルター設計ソフトの製作　　　　2013 年 11 月 28 日　目次へ戻る

　連立チェビシェフフィルター設計ソフトを作る場合の、ユーザーとのインターフェースを考えます。「楕円関数の数値計算」の章もご参照下さい。



　ユーザーの希望するフィルターの仕様は、上図の様なものです。

　0[Hz]から f_P [Hz]までの、通過域における減衰の許容最大値は、$-A_P$ [dB]と指示されます。

　阻止域である f_S [Hz]以上での減衰の許容最小値は、$-A_S$ [dB]と指示されます。

1、コンピューターへの入力依頼

　ユーザーに、

　　　通過域端周波数 f_P [Hz]
　　　阻止域先端周波数 f_S [Hz]
　　　通過域許容最大減衰量 $-A_P$ [dB]
　　　阻止域許容最小減衰量 $-A_S$ [dB]

を入力して頂きます。コンピューター内部では、周波数を 2π 倍した角周波数 $2\pi f$ [rad/sec]で計算することにします。連立チェビシェフフィルターの設計でも、各周波数は生（なま）のものを用いないで、スケーリングを行い、正規化角周波数で実行します。（スケーリングの章を参照下さい。）

　他のフィルターでは、$\dfrac{1\,[\mathrm{rad/sec}]}{\text{通過域端角周波数}\ [\mathrm{rad/sec}]}$ を縮尺として使用しますが、連立チェビシェフフィルターでは、これを縮尺にしません。

　連立チェビシェフフィルターでは通過域端角周波数の逆数が、阻止域先端角周波数になるからです。この縮尺を使用して正規化しますと、通過域端角周波数は 1[rad/sec]になります。すると阻止域の先端角周波数も 1[rad/sec]になってしまい、過渡域が無くなり困るので

す。

既に 3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、

$$\frac{1[\mathrm{rad/sec}]}{2\pi\sqrt{\text{通過域端生角周波数}\bullet\text{阻止域先端生角周波数}}[\mathrm{rad/sec}]}$$

を縮尺として使用します。したがって、

正規化角周波数＝生角周波数×縮尺

です。例えば、通過域端周波数 f_P [Hz]の正規化角周波数 ω_P [rad/sec]は、

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \bullet f_S}} = \frac{\sqrt{f_P}\bullet\sqrt{f_P}}{\sqrt{f_P}\bullet\sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_P}{f_S}}[\mathrm{rad/sec}]$$

です。阻止域先端周波数 f_S [Hz]の正規化角周波数 ω_S [rad/sec]は、

$$\omega_S = 2\pi f_S \bullet \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \bullet f_S}} = \frac{\sqrt{f_S}\bullet\sqrt{f_S}}{\sqrt{f_P}\bullet\sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_S}{f_P}}[\mathrm{rad/sec}]$$

になります。

2、Ω_S の提示

ユーザーが指定した阻止域先端生周波数 f_S [Hz]を、通過域端生周波数 f_P [Hz]で割った、

$\dfrac{\text{阻止域先端周波数 } f_S[\mathrm{Hz}]}{\text{通過域端周波数 } f_P[\mathrm{Hz}]}$ を Ω_S（ラージオメガエス）と呼びます。

この値を、参考値として表示します。フィルターの鋭さの指標です。小さいほど鋭いフィルターです。鋭いとは、通過域端から阻止域先端までが短いと言うことです。

3、次数の計算と提示

次数 n を求め、ユーザーに提示しなければなりません。次数 n の求め方は以下の通りです。まず原理を復習した後、実際の決定作業の詳細を述べます。

(1)原理

q を通じて計算を行いますと、仕様に合った連立チェビシェフフィルターの次数を、簡単に求めることが出来ます。q は、

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

です。K（ラージケー）は、k（スモールケー）を母数とする、第一種完全楕円積分値です。
　k は、過渡帯域の幅 b から決定されます。K’（ラージケーダッシュ）は、k の副母数 k’（スモールケーダッシュ）を母数とする、第一種完全楕円積分値です。

　q_1 は通過域のうねりである、m から決定されます。$m = \sqrt{k_1}$ の k_1 から q_1 を求めれば、

$$q_1 = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$$

です。K_1 は、k_1 を母数とする、第一種完全楕円積分値です。K_1’は、k_1 の副母数 k_1’を母数とする、第一種完全楕円積分値です。
　連立チェビシェフフィルターの、過渡域（通過域端から阻止域先端まで）の幅と許容うねりの関係式、

$$n\frac{K'}{K} = \frac{K_1'}{K_1}$$

から、

$$e^{-\pi n \frac{K'}{K}} = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$$

が成り立ち、q と q_1 の定義から、

$$q^n = q_1$$

になります。両辺を 10 を底とする対数にしますと、

$$\mathrm{Log}_{10} q^n = \mathrm{Log}_{10} q_1$$

$$n\mathrm{Log}_{10} q = \mathrm{Log}_{10} q_1$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}_{10} q_1}{\mathrm{Log}_{10} q}$$

となり、n が分ります。これが、ユーザーが決めた仕様からフィルターの次数を求める式です。n は小数で出て来ますが、これを切り上げ、整数にすればフィルターの次数となります。
　q と q_1 の求め方は、「楕円関数の数値計算」の章、3 をご覧下さい。

(2)実際の決定作業の詳細
　ユーザーの要求仕様は次の 3 つにまとめられます。
　　①、通過域での許容最大減衰値、$-A_P$ の仕様
　　②、阻止域での許容最小減衰値、$-A_S$ の仕様
　　③、通過域端周波数 f_P [Hz]と阻止域先端周波数 f_S [Hz] から得られる、過渡域の幅

まずユーザーの要求仕様から、$m^2 = \sqrt{\dfrac{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}$ で、仮の $m^2 = k_1$ を求めます。この式について説明致します。

ユーザーの要求仕様、「通過域での許容最大減衰値」（通過域うねりの許容値）を負の数$-A_P$[dB]とします。通過域うねり最大減衰地点での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_P = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[\mathrm{dB}]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN} = \frac{-A_P}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_P}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT} = \frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_P}{20}}$$

となります。周波数伝達関数の絶対値は、$\dfrac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ です。両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)} = \frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_P}{20}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

になります。通過域最大減衰地点で、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき、ユーザー仕様からの要求値です。

次に、ユーザーの要求仕様、「阻止域での許容最小減衰値」を負の数$-A_S$[dB]としますと、阻止域うねり最小減衰地点での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_S = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[dB]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN} = \frac{-A_S}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_S}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT} = \frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_S}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_S}{20}}$$

となります。周波数伝達関数の絶対値は$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$です。両者を等しいと置きますと

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)} = \frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_S}{20}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1$$

になります。阻止域最小減衰地点で、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき、ユーザー仕様からの要求値です。

通過域最大減衰地点および阻止域最小減衰地点で、元関数 f(ω)の 2 乗値、$f^2(\omega_1)$および $f^2(\frac{1}{\omega_1})$が取ることの出来る値は、m^2 および$\frac{1}{m^2}$です。したがって、H を含めた元関数 f(ω)の 2 乗値が取るべき値の、連立方程式が次の様に成り立ちます。

$$H^2m^2 = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1 \cdot\cdot\cdot ①$$

$$H^2\frac{1}{m^2} = 10^{\frac{A_S}{10}} - 1 \cdot\cdot\cdot ②$$

②を変形して、

$$m^2 = \frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}$$

となります。この式を①に代入しますと、

$$H^2 \frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

$$H^4 = \left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)$$

$$H^2 = \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}$$

になります。この H^2 を①に代入しますと、

$$m^2 = \frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

になります。また、②に代入しても、

$$m^2 = \frac{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

が成り立ちます。これは、通過域での最大減衰値と阻止域での最小減衰値の両方が、ユーザーの仕様通りのフィルターを作る場合の、H の値と、H を含めない元関数 f(ω)の取るべき通過域でのうねりの大きさ m です。

上で求めた H^2 と m^2 をかけますと、通過域最大減衰値と阻止域最小減衰値の両方が、ユーザー仕様通りになることが分ります。以下の通りです。

$$H^2 m^2 = \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)} \bullet \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

$$= \sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}\sqrt{10^{\frac{A_S}{10}}-1}\frac{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}{\sqrt{10^{\frac{A_S}{10}}-1}}$$

$$= 10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$H^2\frac{1}{m^2} = \sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}\sqrt{10^{\frac{A_S}{10}}-1}\frac{\sqrt{10^{\frac{A_S}{10}}-1}}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$= 10^{\frac{A_S}{10}}-1$$

こうして、仮の $m^2=k_1$ と仮の H が、

$$m^2 = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{10^{\frac{A_S}{10}}-1}}$$

$$H^2 = \sqrt{(10^{\frac{A_P}{10}}-1)(10^{\frac{A_S}{10}}-1)}$$

となりました。仮の $m^2=k_1$ から仮の q_1 を計算します。仮の q_1 の計算方法は、

$$k_1' = \sqrt{1-k_1^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k_1'}}{1+\sqrt{k_1'}}$$

$$q_1 = \lambda_1 + 2\lambda_1^5 + 15\lambda_1^9 + 150\lambda_1^{13} + 1707\lambda_1^{17} + 20910\lambda_1^{21} + 268616\lambda_1^{25}$$

です。次に、ユーザーの要求仕様から q を計算します。

3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、通過域の最大許容減衰値を離れる場所を、正規化角周波数で b と指定しました。

b とは、本章の始めに出てきました ω_P と同じです。b^2 は k でした。したがって、ω_P^2 が k となります。

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \bullet f_S}} = \frac{\sqrt{f_P}\bullet\sqrt{f_P}}{\sqrt{f_P}\bullet\sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_P}{f_S}}$$

でしたので、

$${\omega_P}^2 = \frac{f_P}{f_S} = k$$

となります。したがって k は、ユーザーに提示した Ω_S（ラージオメガエス）の逆数になります。k から q を計算します。q の計算方法は、

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 20910\lambda^{21} + 268616\lambda^{25}$$

です。仮の q_1 の値と q の値を、先程の n の式、

$$n = \mathrm{Log}_q q_1 = \frac{\mathrm{Log}_{10} q_1}{\mathrm{Log}_{10} q}$$

に代入し、n を計算します。n は小数で出ますが、小数点以下を切り上げ、整数の次数に直します。回路を作る場合、整数の次数しか作れないからです。

4、ユーザー仕様と設計値のすり合わせ

整数の次数が決定しました。整数の次数でのフィルターは、ユーザーの要求する仕様とは違う物になります。もともと連立チェビシェフフィルターには、$q^n = q_1$ という制約があるため、k と k_1 は互いに独立には決められません。要求仕様をまとめた 3 つのパラメーターは、任意の 2 つを指定すると、他の 1 つは向こうから定まってしまいます。さりとて 3 つのパラメーターが無ければ、最低線が決まらず次数の計算も出来なかったのです。

2 つの指定と、それにより決まってしまう 1 つの組み合わせは、以下の通りです。

(イ)、$-A_P$ と k を指定した場合

k を指定すれば、k と同時に m が決まってしまいます。m が決まれば、それを指定された $-A_P$ にあわせるための、H が決まってしまいます。すると $-A_S$ は任意に指定できず、$\frac{1}{m}$ と H で決まる値に定まってしまいます。

(ロ)、$-A_P$ と $-A_S$ を指定した場合

m と H が先に決定し、k が自動的に決まってしまいます。

(ハ)、$-A_S$ と k を指定した場合

k を指定すれば、k と同時に m が決まってしまいます。m が決まれば $\frac{1}{m}$ も決まり、それを指定された $-A_S$ にあわせるための、H が決まってしまいます。すると、$-A_P$ は任意に指定できず、m と H で決まる値に定まってしまいます。

現在、整数の n が決定されたところです。整数の次数 n を提示した後、ユーザーに次の 3 つを提示します。ユーザーとのすり合わせです。

①、$-A_P$ と Ω_S を、ユーザーの仕様通りにした場合の、$-A_S$ を提示します。n の少数以下を切り上げた為、ユーザーの仕様より必ずその絶対値が大きくなる $-A_S$ を、「$-A_P$ と Ω_S が仕様と同じなら、$-A_S$ がこの大きさになります。」と提示します。

②、$-A_P$ と $-A_S$ を、ユーザーの仕様通りにした場合の、Ω_S を提示します。n の少数以下を切り上げた為、ユーザーの仕様より必ず小さくなる Ω_S を、「$-A_P$ と $-A_S$ が仕様と同じなら、Ω_S をここまで下げられます。」と提示します。

③、$-A_S$ と Ω_S を、ユーザーの仕様通りにした場合の、$-A_P$ を提示します。n の少数以下を切り上げた為、ユーザーの仕様より必ずその絶対値が小さくなる $-A_P$ を、「$-A_S$ と Ω_S が仕様と同じなら、$-A_P$ をここまで下げられます。」と提示します。

①～③の、それぞれの計算方法を説明致します。

①、$-A_P$ と Ω_S が指定された場合、整数の n での $-A_S$ を求める方法。

ユーザー要求仕様の k から q を計算します。

3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、通過域の最大許容減衰値を離れる場所を、正規化角周波数で b と指定しました。b とは、本章の始めに出てきました ω_P と同じです。b^2 は k でした。したがって、$\omega_P{}^2$ が k となります。

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \bullet f_S}} = \frac{\sqrt{f_P} \bullet \sqrt{f_P}}{\sqrt{f_P} \bullet \sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_P}{f_S}}$$

でしたので、

$$\omega_P{}^2 = \frac{f_P}{f_S} = k$$

となります。したがって k は、ユーザーに提示した Ω_S（ラージオメガエス）の逆数になります。k から q を計算します。q の計算方法は、

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$
$$q=\lambda+2\lambda^5+15\lambda^9+150\lambda^{13}+1707\lambda^{17}+20910\lambda^{21}+268616\lambda^{25}$$

です。q^n＝q_1ですから、q^nの n に整数の次数を代入すれば、整数の次数に対する q_1 が求まります。この q_1 から k_1＝m^2 を求めます。q_1 から k_1＝m^2 の求め方は、k_1 から q_1 を求めた時と反対の計算を行います。まず λ_1 を q_1 から求めます。「楕円関数の数値計算」の章、3 で書きました通り、

$$\lambda_1=q_1-2q_1^{\ 5}+5q_1^{\ 9}-10q_1^{\ 13}+18q_1^{\ 17}-32q_1^{\ 21}+55q_1^{\ 25}-\bullet\bullet\bullet$$

です。次に、λ_1 から k_1'を求めます。λ_1 の式を変形しますと、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k_1'}}{1+\sqrt{k_1'}}=\lambda_1$$

$$1-\sqrt{k_1'}=2\lambda_1+2\lambda_1\sqrt{k_1'}$$

$$1-2\lambda_1=\sqrt{k_1'}(1+2\lambda_1)$$

$$\sqrt{k_1'}=\frac{1-2\lambda_1}{1+2\lambda_1}$$

$$k_1'=\left(\frac{1-2\lambda_1}{1+2\lambda_1}\right)^2$$

になります。最後に k_1'から k_1 を求めますと、

$$k_1=\sqrt{1-k_1'^2}$$

になります。この k_1 が m^2 となります。

次に H を求めます。ユーザーの要求仕様、「通過域での許容最大減衰値」（通過域うねりの許容値）を負の数－A_P[dB]としますと、うねり最大部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_P=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[dB]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}=\frac{-A_P}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN}=10^{\frac{-A_P}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT}=\frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}}=\left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1}=10^{\frac{A_P}{20}}$$

でした。フィルターの周波数伝達関数の絶対値は、$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ですので、両者を等しいと置き、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}=\frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f(\omega)^2}=\frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(10^{\frac{A_P}{20}}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

となります。通過域内での元関数 f(ω)のうねりの最大値の 2 乗は、$f^2(\omega_1)=m^2$ ですので、

$$H^2m^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$H^2=\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2}$$

となります。H はユーザー仕様側の通過域うねりの最大値を、元関数側の通過域うねりの最大値で割ったものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの阻止域における最小減衰量ーA_S[dB]は次のようになります。

その場所の元関数 f(ω)における値が、$f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)=\frac{1}{m^2}$ ですので、

$$-A_S=20Log_{10}\frac{OUT}{IN}=20Log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)}}=20Log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2\bullet\frac{1}{m^2}}}$$

$$=20Log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2}\bullet\frac{1}{m^2}}}=20Log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^4}}}$$

となり、これでユーザーに提示する、阻止域最小減衰量が求まりました。

②、$-A_P$ と $-A_S$ が指定された場合、整数の n での Ω_S を求める方法。

$-A_P$ および $-A_S$ を、ユーザー要求仕様の $-A_P$ および $-A_S$ と同じにしたい場合、先程求めた仮の $m^2=k_1$、

$$m^2=\sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{10^{\frac{A_S}{10}}-1}}$$

と仮の H、

$$H^2=\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}}-1\right)\left(10^{\frac{A_S}{10}}-1\right)}$$

を、そのまま使います。したがって、q_1 は仮の q_1 の値で正式決定します。次に、$q^n=q_1$ の両辺を $\frac{1}{n}$ 乗し、

$$q^{\frac{n}{n}}=q_1^{\frac{1}{n}} \qquad q=q_1^{\frac{1}{n}}$$

で正しい q を求めます。この q から k を求めます。q から k の求め方は、k から q を求めた時と反対の計算を行います。まず λ を q から求めます。「楕円関数の数値計算」の章、3 で書きました通り、

$$\lambda=q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-32q^{21}+55q^{25}-\bullet\bullet\bullet$$

です。次に、λ から k'を求めます。λ の式を変形しますと、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\lambda$$

$$1-\sqrt{k'}=2\lambda+2\lambda\sqrt{k'}$$

$$1-2\lambda=\sqrt{k'}(1+2\lambda)$$

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}$$

$$k'=\left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\right)^2$$

になります。最後に k'から k を求めますと、

$$k=\sqrt{1-k'^2}$$

になります。この正しい k が過渡域の幅を決定します。この k から Ωs を計算します。k から Ωs への変換は次の通りです。

阻止域先端周波数 f_s [Hz]を通過域端周波数 f_p [Hz]で割ったもの、$\dfrac{\text{阻止域先端周波数}\ f_S[\text{Hz}]}{\text{通過域端周波数}\ f_P[\text{Hz}]}$ が Ω_S（ラージオメガエス）です。

今回は、$\sqrt{k}$ が通過域端周波数、$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ が阻止域先端周波数になりますから、

$$\Omega_S = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \bullet \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k}$$

となります。角周波数で表されていても分子分母の 2π が約分されるので同じです。Ω_S は新しい k の逆数となりました。これでユーザーに提示する Ω_S が求まりました。

③、$-A_S$ と Ω_S が指定された場合、整数の n での $-A_P$ を求める方法。

$-A_S$ と k を、ユーザー要求仕様の $-A_S$ および k と同じにしたい場合、ユーザー要求仕様の k から q を計算します。

3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、通過域の最大許容減衰値を離れる場所を、正規化角周波数で b と指定しました。b とは本章の始めに出てきました ω_P と同じです。b^2 は k でした。したがって、$\omega_P{}^2$ が k となります。

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \bullet f_S}} = \frac{\sqrt{f_P} \bullet \sqrt{f_P}}{\sqrt{f_P} \bullet \sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_P}{f_S}}$$

でしたので、

$$\omega_P{}^2 = \frac{f_P}{f_S} = k$$

となります。したがって k は、ユーザーに提示した Ω_S（ラージオメガエス）の逆数になります。k から q を計算します。q の計算方法は、

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \bullet \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 20910\lambda^{21} + 268616\lambda^{25}$$

です。$q^n = q_1$ ですから、q^n の n に整数の次数を代入すれば、整数の次数に対する q_1 が求まります。

この q_1 から $k_1=m^2$ を求めます。q_1 から $k_1=m^2$ の求め方は、「楕円関数の数値計算」の章、3 で書きました通り、

$$\lambda_1 = q_1 - 2q_1^5 + 5q_1^9 - 10q_1^{13} + 18q_1^{17} - 32q_1^{21} + 55q_1^{25} - \bullet\bullet\bullet$$

です。次に、λ_1 から k_1'を求めます。λ_1 の式を変形しますと、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1-\sqrt{k_1'}}{1+\sqrt{k_1'}} = \lambda_1$$

$$1-\sqrt{k_1'} = 2\lambda_1 + 2\lambda_1\sqrt{k_1'}$$

$$1-2\lambda_1 = \sqrt{k_1'}(1+2\lambda_1)$$

$$\sqrt{k_1'} = \frac{1-2\lambda_1}{1+2\lambda_1}$$

$$k_1' = \left(\frac{1-2\lambda_1}{1+2\lambda_1}\right)^2$$

になります。最後に k_1'から k_1 を求めますと、

$$k_1 = \sqrt{1-k_1'^2}$$

になります。この k_1 が m^2 となります。

次に H を求めます。フィルターの要求仕様で決まる「阻止域許容最小減衰値」を負の数 $-A_S$[dB]としますと、阻止域減衰最小部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_S = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[dB]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN} = \frac{-A_S}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_S}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT} = \frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_S}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_S}{20}}$$

となります。一方フィルターの周波数伝達関数の絶対値は、$\dfrac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ ですので、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}=\frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)}=\frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(\frac{IN}{OUT}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=\left(10^{\frac{A_S}{20}}\right)^2-1$$

$$H^2f^2(\omega)=10^{\frac{A_S}{10}}-1$$

となります。阻止域内での元関数 f(ω)の減衰の極小値の 2 乗は、$f^2(\frac{1}{\omega_1})=\frac{1}{m^2}$ ですので、

$$H^2\frac{1}{m^2}=10^{\frac{A_S}{10}}-1$$

$$H^2=\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{\frac{1}{m^2}}=\left(10^{\frac{A_S}{10}}-1\right)m^2$$

となります。H は仕様側の阻止域うねりの最小値を、元関数側の阻止域うねりの最小値で割ったもの、あるいは仕様側の阻止域うねりの最小値に、元関数側の通過域うねりの最大値をかけたものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの通過域における最大減衰量ーA_P[dB]は次のように計算されます。

その場所の元関数 f(ω)における値が$f^2(\omega_1)=m^2$ですので、

$$-A_P=20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega_1)}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+H^2m^2}}$$

$$=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{\frac{1}{m^2}}\bullet m^2}}=20\mathrm{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\left(10^{\frac{A_S}{10}}-1\right)m^4}}$$

となります。これでユーザーに提示する、通過域最大減衰値が求まりました。

全てが気に入らない場合、最初の入力値をもう少し厳しい値にして、次数を増やすと言う方法があります。

目次へ戻る