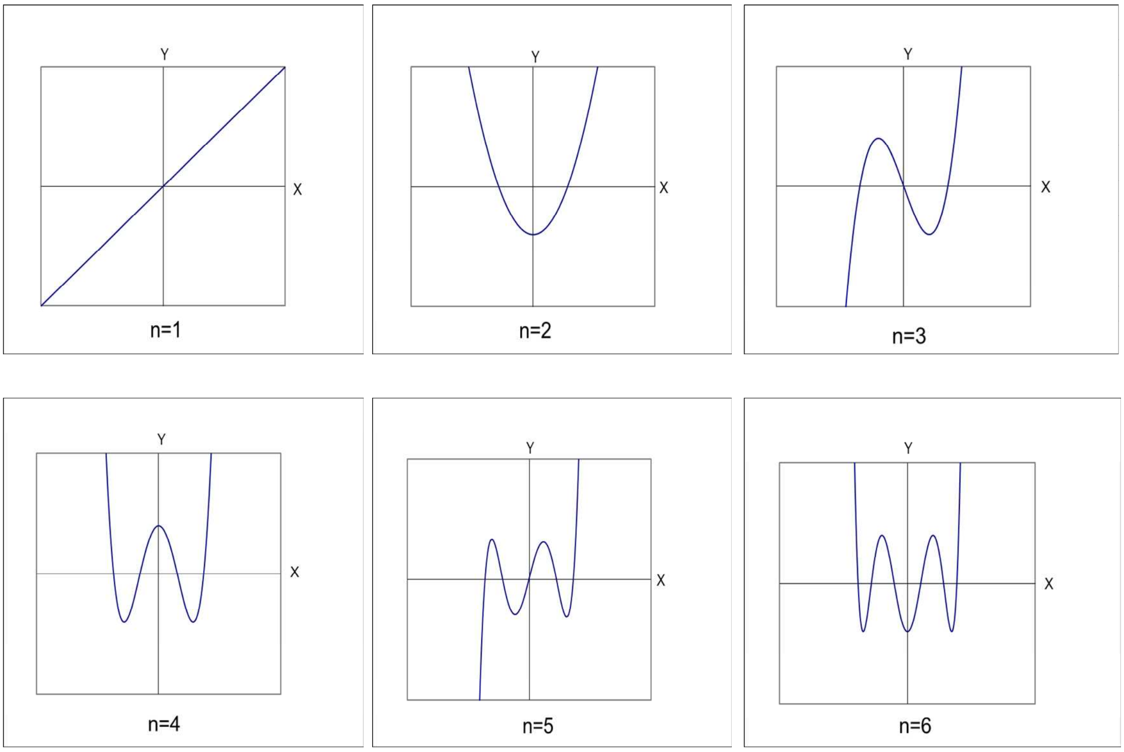
n 次曲線について　　　　　　　　　　　　　　　　2009 年 5 月 5 日　[目次へ戻る]

2021.7.26　図を訂正

一般的に n 次曲線は次のようになります。



1、n 次曲線の形

n 次曲線が上のグラフの様になる訳を考えてみたいと思います。ある n 次の多項式、

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \bullet\bullet\bullet\bullet + a_n \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

が有ります。x を正および負で大きくすると、y はどんな曲線を描くでしょうか。

①式において a_0 から a_n は極端に大きくも小さくも無い、1 桁 2 桁程度の値とします。

a_0 が正の場合、x^{n-1} の項およびその下の項の係数 a_1、a_2 等が負だったとしても、x が正の大きな値の時、a_0x^n の項は他の項に比べ遥かに大きな正の値になりますから、y の曲線は右上方にあると考えられます。

x の負の値での y の値は、n が偶数か奇数かで分けて考える必要があります。

n が偶数で a_0 が正の場合、x^{n-1} の項およびその下の項の係数が負だったとしても、x が負の大きな値の時、a_0x^n は他の項に比べて遥かに大きな正の値になりますから、y の曲線は左上方にあると考えられます。

n が奇数で a_0 が正の場合、x^{n-1} の項およびその下の項の係数が正だったとしても、x が負の大きな値の時、a_0x^n は他の項に比べ遥かに大きな負の値になりますから、y の曲線は左下方にあると考えられます。

x が小さな値の時、y の値は各項の係数により複雑な動きをします。①式は代数学の基本定理により、必ず次の様に因数分解されます。

$$y = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\bullet\bullet\bullet\bullet(x-\alpha_n)\ \cdot\cdot\cdot ②$$

x が α_1 から α_n のいずれかの値に一致した時、どれか 1 つの括弧内が 0 になり、y の値も 0 になります。もし α が全て実数だとしたら、y の曲線はそれぞれの場所で x 軸を横切るはずです。

以上のことから、n が奇数で α が全て実数の場合、左下から右上に抜け、奇数箇所で x 軸と交わるはずです。また、n が偶数で α が全て実数の場合、左上から右上に抜け、偶数箇所で x 軸と交わるはずです。一般的な n 次曲線は、最初に掲載した n＝1 から n＝6 のグラフの様になります。

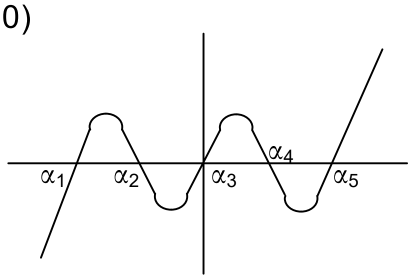
2、n 次曲線の式

次に n 次曲線の式について考えます。

(1)奇関数の式

例えば n＝5 の場合、左から α_1、α_2、α_3、α_4、α_5 の 5 つの α があります。もしこの関数が奇関数の場合、点対称の関数ですから、原点を中心にして 180 度回転させると、元のグラフと一致します。つまり、$\alpha_1=-\alpha_5$、$\alpha_2=-\alpha_4$、$\alpha_3=0$ であることが分ります。すると②式は、

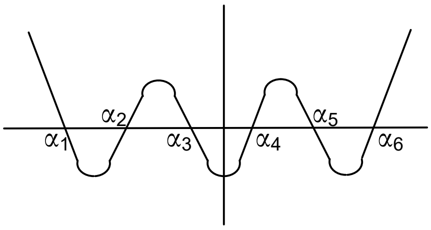
$$\begin{aligned} y &= a_0(x+\alpha_1)(x-\alpha_1)(x+\alpha_2)(x-\alpha_2)(x-0) \\ &= a_0x(x^2-\alpha_1{}^2)(x^2-\alpha_2{}^2) \\ &= a_0x\{x^4-(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2)x^2+\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\} \\ &= a_0\{x^5-(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2)x^3+\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2x\} \end{aligned}$$



となり、奇関数は x について奇数乗の項しかないことが分ります。これは n が奇数で、かつ奇関数の関数全てに当てはまります。

(2)偶関数の式

例えば n＝6 の場合、左から α_1、α_2、α_3、α_4、α_5、α_6 の 6 つの α があります。もしこの関数が偶関数の場合、線対称の関数ですから、y 軸を中心にして左右対称です。つまり、$\alpha_1=-\alpha_6$、$\alpha_2=-\alpha_5$、$\alpha_3=-\alpha_4$ であることが分ります。すると②式は、



$$y = a_0(x+\alpha_1)(x-\alpha_1)(x+\alpha_2)(x-\alpha_2)(x+\alpha_3)(x-\alpha_3)$$

$$= a_0(x^2-\alpha_1{}^2)(x^2-\alpha_2{}^2)(x^2-\alpha_3{}^2)$$

$$= a_0\{x^4-(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2)x^2+\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\}(x^2-\alpha_3{}^2)$$

$$= a_0\{x^6-(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2)x^4+(\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2+\alpha_2{}^2\alpha_3{}^2+\alpha_3{}^2\alpha_1{}^2)x^2-\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\alpha_3{}^2\}$$

となり、偶関数は偶数乗の項と定数項しかないことが分ります。これは n が偶数で、かつ偶関数の関数全てに当てはまります。

目次へ戻る