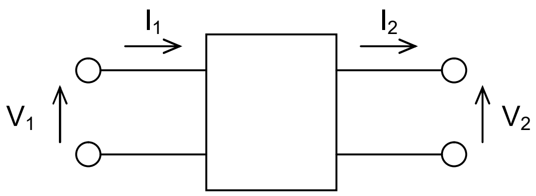
四端子回路について　　　　　　　　　　２０１３年４月２３日　　　　[目次へ戻る]

2021.1.14 2021.10.5 2021.10.11 2021.11.22 2021.12.17 2023.9.25 2024.4.15 2025.6.4 2025.9.16 2025.10.22　改訂

1、四端子回路とは



四端子回路において入力側の電圧電流を V_1、I_1、出力側の電圧電流を V_2、I_2 で表す時、これらの間の相互関係は次式で表されます。

$$V_1 = AV_2 + BI_2 \quad ・・・1－①$$
$$I_1 = CV_2 + DI_2 \quad ・・・1－②$$

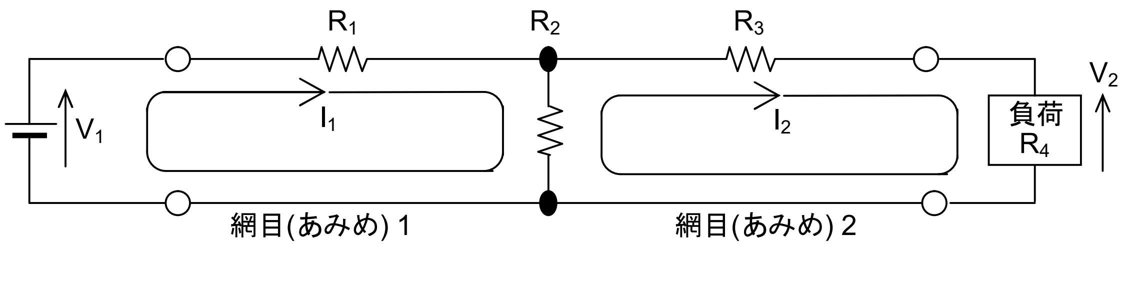
この ABCD を四端子定数と呼びます。行列で表しますと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad ・・・1－③$$

になります。

AD－BC＝1 と言う性質があります。AD－BC＝1 の証明については、この章の 7 をご覧下さい。1－①、1－②式の成立する訳は「四端子回路について　その 2」の章にあります。

抵抗を T 型に接続した四端子回路の四端子定数を、キルヒホッフの法則を用いて求めます。図の V_1 は電源電圧、V_2 は負荷 R_4 に I_2 が流れる事により生じる出力電圧です。網目 1 の電流を I_1、網目 2 の電流を I_2 と名付け、それぞれ矢印の方向に流れると決めます。



キルヒホッフの第 2 法則により、網目電流の向きを正の向きとし、網目内の全ての電源電圧と全ての電圧降下を加えると零になります。網目 1 では、電源電圧 V_1 は電圧の向きが電流の向きと同じですので正です。抵抗の電圧降下は電流の向きと逆に発生しますので、

負の電圧降下 $R_1 I_1$、負の電圧降下 $R_2 I_1$、正の電圧降下 $R_2 I_2$ が生じています。したがって、

$$V_1 - R_1 I_1 - R_2 I_1 + R_2 I_2 = 0$$
$$V_1 = R_1 I_1 + R_2 I_1 - R_2 I_2$$
$$V_1 = (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 \quad ・・・1ー④$$

という式が出来ます。網目 2 では、正の電圧降下 $R_2 I_1$、負の電圧降下 $R_2 I_2$、負の電圧降下 $R_3 I_2$、負の電圧降下 $R_4 I_2$ が生じています。したがって、

$$R_2 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_2 - R_4 I_2 = 0$$
$$0 = R_2 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_2 - R_4 I_2$$
$$0 = R_2 I_1 - (R_2 + R_3 + R_4) I_2 \quad ・・・1ー⑤$$

という式が出来ます。1ー⑤式より、

$$R_2 I_1 = (R_2 + R_3 + R_4) I_2$$
$$R_2 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_2 + R_4 I_2$$
$$I_1 = \frac{R_2 I_2 + R_3 I_2 + R_4 I_2}{R_2}$$
$$= \frac{R_4 I_2}{R_2} + \frac{R_2 I_2 + R_3 I_2}{R_2}$$
$$= \frac{1}{R_2} R_4 I_2 + \frac{R_2 + R_3}{R_2} I_2$$

です。$R_4 I_2$ は出力電圧 V_2 ですので、

$$= \frac{1}{R_2} V_2 + \frac{R_2 + R_3}{R_2} I_2 \quad ・・・1ー⑥$$

となります。I_1 を V_2 と I_2 で表す式が完成しました。これを 1ー④式に代入し、

$$V_1 = (R_1 + R_2) \left\{ \frac{V_2}{R_2} + \frac{(R_2 + R_3) I_2}{R_2} \right\} - R_2 I_2$$
$$= \frac{(R_1 + R_2) V_2}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) I_2}{R_2} - R_2 I_2$$
$$= \frac{(R_1 + R_2) V_2}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) I_2 - R_2^2 I_2}{R_2}$$
$$= \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_2 + \frac{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2}{R_2} I_2$$

$$= \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_2 + \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2} I_2 \quad ・・・1－⑦$$

となり、V_1 を V_2 と I_2 で表す式も完成しました。したがって、この回路の四端子定数は 1－⑦式と 1－①式とを比較して、

$$A = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

となります。また 1－⑥式と 1－②式とを比較して、

$$C = \frac{1}{R_2}$$

$$D = \frac{R_2 + R_3}{R_2}$$

となります。これがキルヒホッフの法則を使った四端子定数の求め方です。

2、四端子定数を簡単に求める方法

もっと簡単に四端子定数を求める方法があります。出力端子を開放した時と短絡した時を考えて算出します。

(1) A の求め方

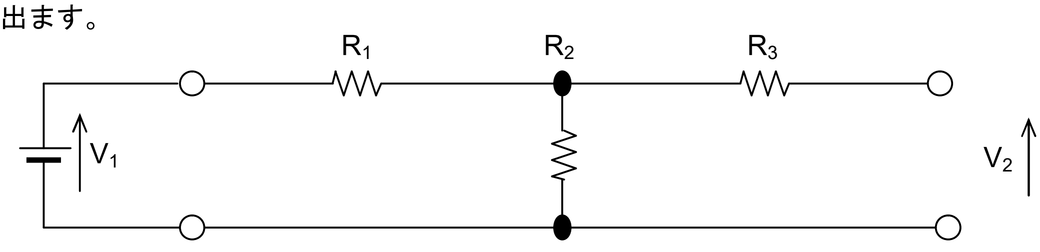
四端子回路において出力を開放した場合、出力電流が流れませんので I_2＝0 です。その状態で入力の電圧を V_1、出力に現れる電圧を V_2 とすれば、1－①式の $V_1 = AV_2 + BI_2$ は、

$$V_1 = AV_2$$

となります。したがって

$$A = \left[\frac{V_1}{V_2}\right]_{I_2 = 0}$$

が求まります。電圧を電圧で割っている為、A に単位はありません。先程の回路で負荷を取り外しますと、I_2 が無くなる為 R_3 での電圧降下も無く、出力端子には R_2 の電圧がそのまま出ます。



V_2 は V_1 を R_1 と R_2 で分圧して、

$$V_2 = V_1 \bullet \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

です。出力開放時の A の式に代入しますと、

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_1 \bullet \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

になり、キルヒホッフの法則で求めた A と一致します。

(2) B の求め方

四端子回路において出力を短絡した場合、出力電圧が出ませんので $V_2=0$ です。その状態で入力の電圧を V_1、出力に流れる電流を I_2 とすれば、1－①式の $V_1 = AV_2 + BI_2$ は、

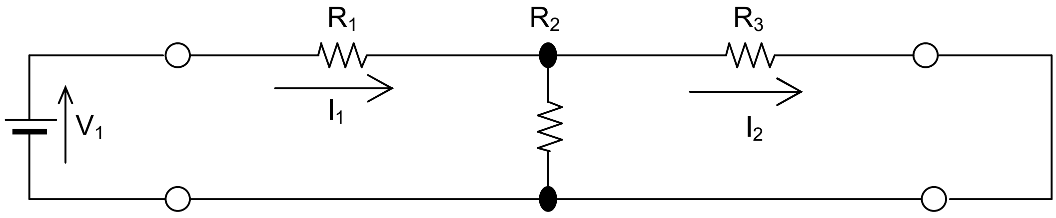
$$V_1 = BI_2$$

となります。したがって、

$$B = \left[\frac{V_1}{I_2}\right]_{V_2=0}$$

が求まります。電圧を電流で割っている為、単位は Ω です。

先程の回路で負荷を短絡します。



R_1、R_2、R_3 直並列回路の合成抵抗で V_1 を割り、R_1 を流れる I_1 を求め、更に I_1 を分流する R_2、R_3 分流回路の R_3 側電流を求めます。これが I_2 です。

$$I_2 = \frac{V_1}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}} \bullet \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{V_1}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}}} \bullet \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{V_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \bullet \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{V_1}{\dfrac{R_1(R_2+R_3)}{R_2+R_3}+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}} \bullet \frac{R_2}{R_2+R_3}$$

$$= \frac{V_1}{\dfrac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2+R_3}} \bullet \frac{R_2}{R_2+R_3}$$

$$= \frac{V_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \bullet \frac{R_2}{R_2+R_3}$$

$$= \frac{V_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

です。出力短絡時のBの式に代入しますと、

$$B = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\dfrac{V_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}} = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2}$$

になり、キルヒホッフの法則で求めたBと一致します。

(3)Cの求め方

四端子回路において出力を開放した場合、出力電流が流れませんので$I_2=0$です。その状態で入力に流れる電流をI_1、出力に現れる電圧をV_2とすれば、1−②式の$I_1=CV_2+DI_2$は、

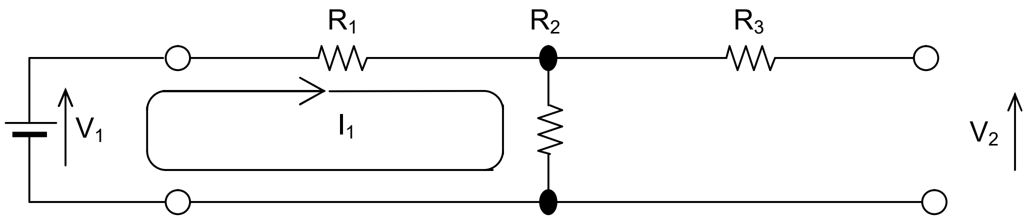
$$I_1 = CV_2$$

となります。したがって、

$$C = \left[\frac{I_1}{V_2}\right]_{I_2=0}$$

が求まります。電流を電圧で割っている為、単位はS（ジーメンス）です。

先程の回路で負荷を取り外しますと、I_2が無くなる為R_3での電圧降下も無く、出力端子にはR_2の電圧がそのまま出ます。



V_2はV_1をR_1とR_2で分圧して、

$$V_2 = V_1 \bullet \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

です。

　I_1 は V_1 を R_1 と R_2 の和で割り、

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2}$$

です。出力開放時の C の式に代入しますと、

$$C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{\dfrac{V_1}{R_1 + R_2}}{\dfrac{V_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{R_2}$$

になり、キルヒホッフの法則で求めた C と一致します。

(4)D の求め方

　四端子回路において出力を短絡した場合、出力電圧が出ませんので $V_2=0$ です。その状態で入力に流れる電流を I_1、出力に流れる電流を I_2 とすれば、1ー②式の $I_1 = CV_2 + DI_2$ は、

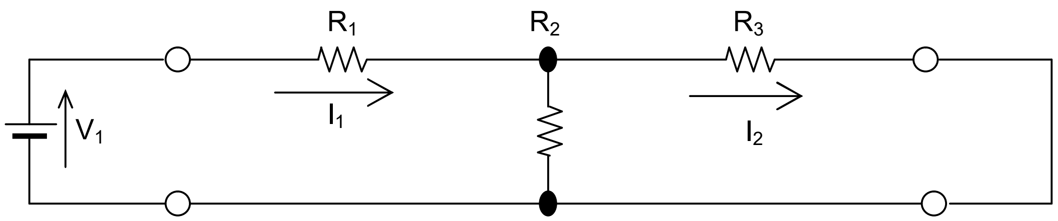
$$I_1 = DI_2$$

となります。したがって、

$$D = \left[\frac{I_1}{I_2}\right]_{V_2=0}$$

が求まります。電流を電流で割っている為、D に単位はありません。

　先程の回路で負荷を短絡します。



　R_1、R_2、R_3 直並列回路の合成抵抗で V_1 を割り、R_1 を流れる I_1 を求めます。次に I_1 を分流する、R_2、R_3 分流回路の R_3 側電流を求めます。これが I_2 です。

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}}$$

$$= \frac{V_1}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}}}$$

$$= \frac{V_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$= \frac{V_1}{\dfrac{R_1(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3} + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$= \frac{V_1}{\dfrac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$= \frac{V_1(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = I_1 \bullet \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{V_1(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \bullet \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

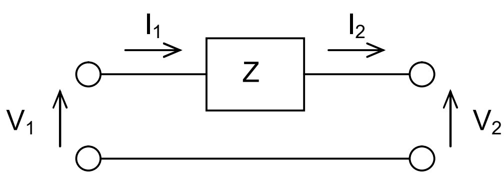
です。出力短絡時の D の式に代入しますと、

$$D = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\dfrac{V_1(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}{\dfrac{V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}} = \frac{R_2 + R_3}{R_2}$$

になり、キルヒホッフの法則で求めた D と一致します。

例題 1

下図回路の四端子定数を求めて下さい。



出力開放状態では電流 $I_2＝I_1＝0$ です。電流 0 ではインピーダンス Z での電圧降下がありません。入力に V_1 を加えた時、出力に現れる電圧も V_1 ですから、

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_1} = 1$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{0}{V_1} = 0$$

です。出力短絡状態では電圧 $V_2＝0$ です。$I_2 = I_1 = \frac{V_1}{Z}$ ですから

$$B = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\frac{V_1}{Z}} = V_1 \bullet \frac{Z}{V_1} = Z$$

$$D = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_2} = 1$$

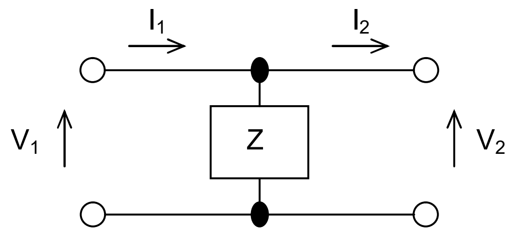
です。結果を行列で表しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

になります。

例題 2

下図回路の四端子定数を求めて下さい。



出力開放状態では電流 $I_2＝0$ です。入力に V_1 を加えた時、入力に流れる電流は、$I_1 = \frac{V_1}{Z}$ です。電圧は、$V_2＝V_1$ ですから、

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_1} = 1$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{\frac{V_1}{Z}}{V_2} = \frac{\frac{V_1}{Z}}{V_1} = \frac{V_1}{Z} \bullet \frac{1}{V_1} = \frac{1}{z}$$

です。出力短絡状態では電圧 $V_2＝0$ です。ショート状態となり、$I_2＝I_1＝\infty$ですから、

$$B = \frac{V_1}{I_2} = \lim_{I_2 \to \infty} \frac{V_1}{I_2} = 0$$

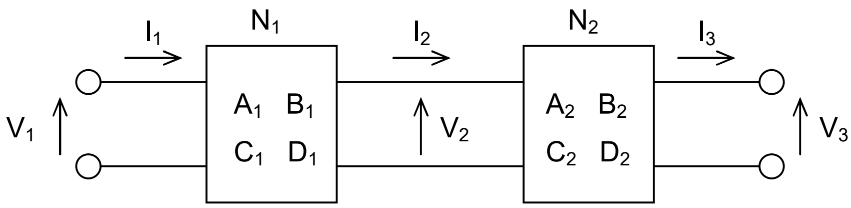
$$D = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_2} = 1$$

です。結果を行列で表しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$$

になります。

3、四端子回路の縦続接続



四端子回路 N_1 では次の式が成り立っています。

$$V_1 = A_1V_2 + B_1 I_2 \quad \cdot\cdot\cdot 3-①$$

$$I_1 = C_1V_2 + D_1 I_2 \quad \cdot\cdot\cdot 3-②$$

四端子回路 N_2 では次の式が成り立っています。

$$V_2 = A_2V_3 + B_2 I_3 \quad \cdot\cdot\cdot 3-③$$

$$I_2 = C_2V_3 + D_2 I_3 \quad \cdot\cdot\cdot 3-④$$

ここで、V_1、I_1 を V_3、I_3 で表す為、3－③④式を 3－①②式に代入し V_2、I_2 を消去しますと、

$$V_1 = A_1(A_2V_3 + B_2 I_3) + B_1(C_2V_3 + D_2 I_3)$$
$$= (A_1A_2 + B_1C_2)V_3 + (A_1B_2 + B_1D_2)I_3$$

$$I_1 = C_1(A_2V_3 + B_2 I_3) + D_1(C_2V_3 + D_2 I_3)$$
$$= (C_1A_2 + D_1C_2)V_3 + (C_1B_2 + D_1D_2)I_3$$

になります。したがって、総合的な四端子定数 A、B、C、D は、

$$A = A_1A_2 + B_1C_2 \qquad B = A_1B_2 + B_1D_2$$

$$C = C_1A_2 + D_1C_2 \qquad D = C_1B_2 + D_1D_2$$

となります。上式の結果は行列のかけ算を用いれば簡単に求めることが出来ます。つまり、

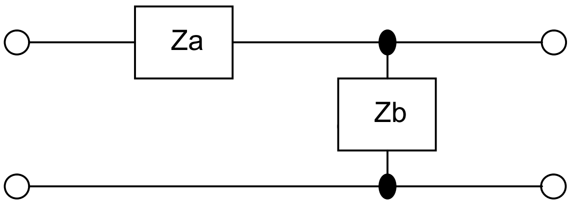
$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$

です。したがって、四端子回路縦続接続入出力間電圧電流相互関係は行列のかけ算で、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

となります。

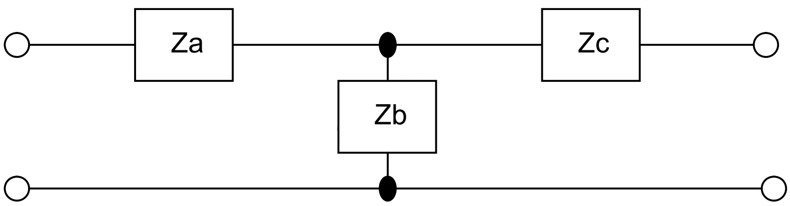
　以上の結果を使うととても便利なことがあります。例題 1 と例題 2 の回路を縦続接続した、逆 L 型四端子回路の四端子定数は、



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Za \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Zb} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Za}{Zb} & Za \\ \frac{1}{Zb} & 1 \end{bmatrix}$$

となります。

　さらに直列素子を増やした T 型四端子回路の四端子定数は、

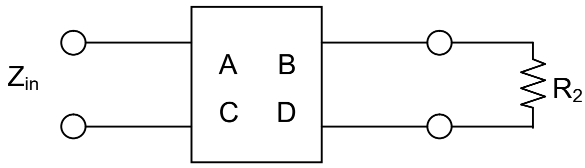


$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Za}{Zb} & Za \\ \frac{1}{Zb} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Zc \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Za}{Zb} & Zc + \frac{ZaZc}{Zb} + Za \\ \frac{1}{Zb} & \frac{Zc}{Zb} + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{Za}{Zb} & \frac{ZaZb + ZbZc + ZcZa}{Zb} \\ \frac{1}{Zb} & \frac{Zc}{Zb} + 1 \end{bmatrix}$$

となります。

4、入力インピーダンス



四端子回路出力に抵抗がつながった時の入力インピーダンス、Z_{in} を求めます。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

ですから、

$$V_1 = AV_2 + BI_2$$

$$I_1 = CV_2 + DI_2$$

です。出力に R_2 がつながったので $V_2 = R_2 I_2$ ですから、

$$V_1 = AR_2 I_2 + B I_2 = (AR_2 + B) I_2$$

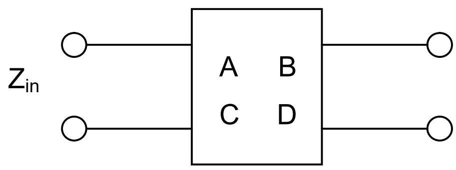
$$I_1 = CR_2 I_2 + D I_2 = (CR_2 + D) I_2$$

です。したがって入力インピーダンス、Z_{in} は、

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(AR_2 + B)I_2}{(CR_2 + D)I_2} = \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D}$$

となります。

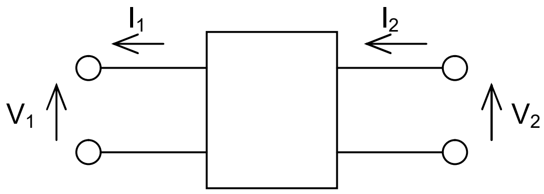
R_2 が∞、つまり出力が開放になった時の入力インピーダンスは、



$$Z_{in} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{A + \frac{B}{R_2}}{C + \frac{D}{R_2}} = \frac{A}{C}$$

となります。分子分母に $\frac{1}{R_2}$ を掛け、極限値を求めました。

5、出力インピーダンス-



電流の向きを逆に決めた場合、四端子方程式、

$$V_1 = AV_2 + BI_2$$
$$I_1 = CV_2 + DI_2$$

の I_1 と I_2 にマイナスを付け、

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$
$$-I_1 = CV_2 - DI_2$$

となります。この連立方程式から V_2 または I_2 を消去した式を作ります。

V_2 を消去するために $V_1 = AV_2 - BI_2$ を C 倍、$-I_1 = CV_2 - DI_2$ を A 倍して引き算しますと、

$$\begin{array}{rl} CV_1 &= ACV_2 - BCI_2 \\ \underline{-)\ -AI_1} & \underline{= ACV_2 - ADI_2} \\ CV_1 + AI_1 &= -BCI_2 + ADI_2 \\ CV_1 + AI_1 &= (AD - BC)I_2 \\ CV_1 + AI_1 &= I_2 \end{array}$$

になります。本章 1、の AD－BC＝1 を使っています。I_2 を V_1、I_1 で表す式が現れました。

I_2 を消去するために $V_1 = AV_2 - BI_2$ を D 倍、$-I_1 = CV_2 - DI_2$ を B 倍して引き算しますと、

$$\begin{array}{rl} DV_1 &= ADV_2 - BDI_2 \\ \underline{-)\ -BI_1} & \underline{= BCV_2 - BDI_2} \\ DV_1 + BI_1 &= ADV_2 - BCV_2 \\ DV_1 + BI_1 &= (AD - BC)V_2 \\ DV_1 + BI_1 &= V_2 \end{array}$$

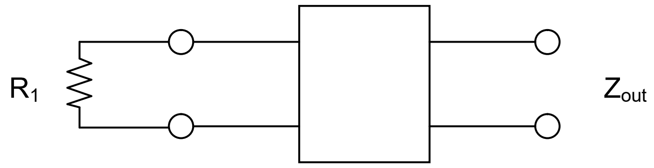
になり、V_2 を V_1、I_1 で表す式が現れました。

V_2 と I_2 を V_1 と I_1 で表す式は、

$$V_2 = DV_1 + BI_1$$
$$I_2 = CV_1 + AI_1$$

です。ただし電流の向きは普通と逆です。

　このとき入力に抵抗 R_1 がつながった時の、出力から見たインピーダンス、Z_{out} を求めます。



$$V_2 = DV_1 + BI_1$$
$$I_2 = CV_1 + AI_1$$

です。入力に R_1 がつながったので、V_1＝ R_1I_1 です。上の式に代入しますと、

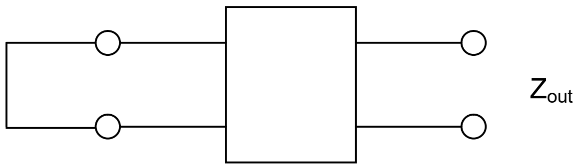
$$V_2 = DR_1 I_1 + BI_1 = (DR_1 + B) I_1$$
$$I_2 = CR_1 I_1 + AI_1 = (CR_1 + A) I_1$$

です。したがって Z_{out} は、

$$Z_{out} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{(DR_1 + B)I_1}{(CR_1 + A)I_1} = \frac{DR_1 + B}{CR_1 + A}$$

となります。

　R_1 が 0、つまり入力が短絡された時の出力インピーダンスは、



$$Z_{out} = \left[\frac{DR_1 + B}{CR_1 + A}\right]_{R_1 = 0} = \frac{B}{A}$$

となります。

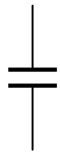
6、リアクタンス四端子回路

　抵抗の持つ電流の通りにくさをレジスタンスと呼びます。コイルの持つ電流の通りにくさを誘導リアクタンスと呼びます。コンデンサーの持つ電流の通りにくさを容量リアクタンスと呼びます。レジスタンスとリアクタンスが合わさったものをインピーダンスと呼びます。抵抗が無い、コイルとコンデンサーだけで作られた四端子回路をリアクタンス四端子回路と呼びます。

(1)ラプラスの世界での容量リアクタンス

　コンデンサーの電荷の量 Q クーロン、コンデンサーの静電容量 C ファラッド、コンデンサーの両端電圧 V ボルトを結ぶ式は、

$$Q = CV$$



です。したがって、コンデンサーの両端電圧は、

$$V = \frac{Q}{C}$$

です。電荷の量を静電容量で割ったものが両端電圧となります。コンデンサーに溜まる電荷の量は電流 i アンペアを時間で積分したものですから、

$$Q = \int_0^t idt$$

となります。したがってコンデンサーの両端電圧は、

$$V = \frac{1}{C}\int_0^t idt$$

と言う式になります。初期状態 t＝0 で i＝0、Q＝0 の場合、この式をラプラス変換しますと、

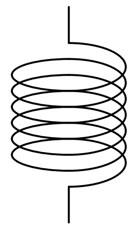
$$V(s) = \frac{1}{C} \bullet \frac{i(s)}{s} = \frac{1}{sC} \bullet i(s)$$

になります。ラプラスの世界では電流 i(s)に $\frac{1}{sC}$ を掛けたものが、電圧 V(s)です。$\frac{1}{sC}$ が容量リアクタンスを表します。

(2)ラプラスの世界での誘導リアクタンス

　コイルの自己インダクタンス L ヘンリー、コイルに流れる電流 i アンペア、コイルの両端電圧 V ボルトを結ぶ式は、

$$V = L\frac{di}{dt}$$



です。電流の微分値に自己インダクタンスを掛けたものが、コイルの両端電圧となります。

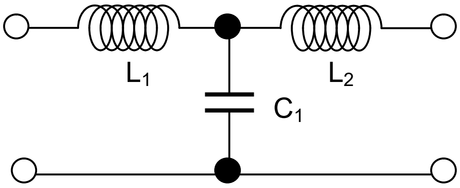
　初期状態 t＝0 で i＝0 の場合、この式をラプラス変換しますと、

$$V(s) = Lsi(s) = sL \bullet i(s)$$

になります。ラプラスの世界では電流 i(s)に sL を掛けたものが、電圧 V(s)です。sL が誘導リアクタンスを表します。

(3)ラプラスの世界でのリアクタンス四端子回路の四端子定数

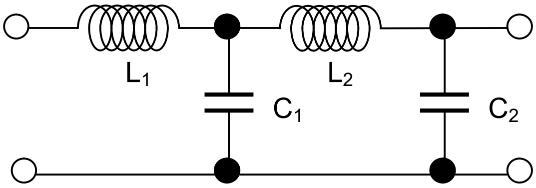
下図の回路の、ラプラスの世界での四端子定数を求めます。本章 3、の T 型四端子回路の Za、Zb 、Zc をラプラスの世界でのリアクタンスに直して、



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sL_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & sL_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+s^2L_1C_1 & sL_1 \\ sC_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & sL_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+s^2L_1C_1 & sL_2+s^3L_1L_2C_1+sL_1 \\ sC_1 & s^2L_2C_1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2L_1C_1+1 & s^3L_1L_2C_1+s(L_1+L_2) \\ sC_1 & s^2L_2C_1+1 \end{bmatrix}$$

となります。さらに下図のように C_2 を追加しますと、



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2L_1C_1+1 & s^3L_1L_2C_1+s(L_1+L_2) \\ sC_1 & s^2L_2C_1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^2L_1C_1+1+s^4L_1L_2C_1C_2+s^2(L_1+L_2)C_2 & s^3L_1L_2C_1+s(L_1+L_2) \\ sC_1+s^3L_2C_1C_2+sC_2 & s^2L_2C_1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^4L_1L_2C_1C_2+s^2(L_1C_1+L_1C_2+L_2C_2)+1 & s^3L_1L_2C_1+s(L_1+L_2) \\ s^3L_2C_1C_2+s(C_1+C_2) & s^2L_2C_1+1 \end{bmatrix}$$

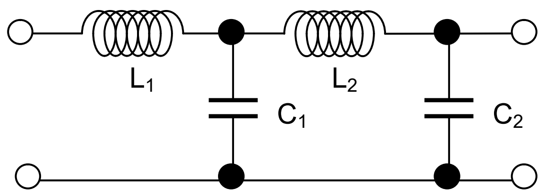
になります。ここで分ることは、ラプラスの世界でのリアクタンス四端子回路の四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\text{の偶関数} & s\text{の奇関数} \\ s\text{の奇関数} & s\text{の偶関数} \end{bmatrix}$$

となることです。

(4) 入力リアクタンス

リアクタンス四端子回路の、ラプラスの世界での入力リアクタンスを求めます。



出力側から求めて行きます。C_2のリアクタンスは$\dfrac{1}{sC_2}$です。L_2のリアクタンスはsL_2です。直列につながりますから、合成リアクタンスは、$sL_2+\dfrac{1}{sC_2}$です。このリアクタンスが、C_1のリアクタンスと並列になります。並列回路の合成リアクタンスは、並列抵抗や並列インピーダンスの値を求める場合と同じです。例えばR_1とR_2の並列抵抗は、$\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$ですから、同様に、

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{sC_1}}+\dfrac{1}{sL_2+\dfrac{1}{sC_2}}}=\frac{1}{sC_1+\dfrac{1}{sL_2+\dfrac{1}{sC_2}}}$$

となります。このリアクタンスが、L_1のリアクタンスsL_1と直列につながりますから、

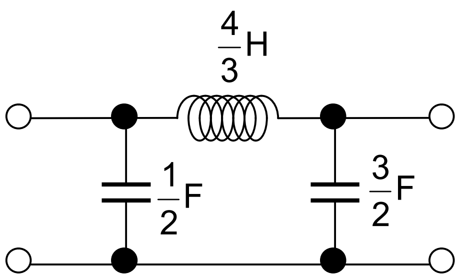
$$sL_1+\frac{1}{sC_1+\dfrac{1}{sL_2+\dfrac{1}{sC_2}}}$$

です。上の様な連分数になりました。

連分数を逆にリアクタンス四端子回路に直すことも可能です。例えば次の様な入力リアクタンスの連分数、

$$\frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{\frac{3}{2}s}}}=\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}s}}+\frac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{\frac{3}{2}s}}}$$

が与えられた時、回路は、



となります。

7、AD－BC＝1 の証明

　四端子回路において入力側の電圧電流を V_1、I_1、出力側の電圧電流を V_2、I_2 で表す時、これらの間の相互関係を、他の行列で表す方法もあります。例えば、

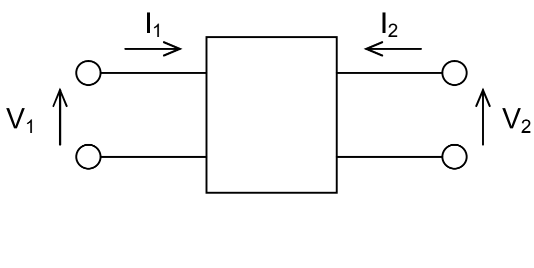
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

です。展開して、

$$I_1=Y_{11}V_1+Y_{12}V_2 \quad ・・・7－①$$
$$I_2=Y_{21}V_1+Y_{22}V_2 \quad ・・・7－②$$

となります。

　この行列をアドミッタンス行列と呼び、各 Y を Y パラメータと呼びます。ただし、電流の方向は、入力、出力ともに回路に流れ込む方向を正とします。



　出力を短絡した場合、出力電圧が出ませんので V_2＝0 です。その状態で入力に電圧 V_1 を加え、入力に流れる電流を I_1 とすれば 7－①式は、

$$I_1=Y_{11}V_1$$

となります。したがって

$$Y_{11} = \left[\frac{I_1}{V_1}\right]_{V_2=0}$$

が求まります。電流を電圧で割っているのでアドミッタンスです。単位は、S（ジーメンス）です。Y_{11} を入力から見た短絡駆動点アドミッタンスと呼びます。

入力を短絡した場合、入力電圧 V_1＝0 です。その状態で出力に電圧 V_2 を加え、短絡した入力に流れる電流を I_1 とすれば 7－①式は、

$$I_1 = Y_{12}V_2$$

となります。したがって、

$$Y_{12} = \left[\frac{I_1}{V_2}\right]_{V_1=0}$$

が求まります。単位は S（ジーメンス）です。Y_{12} を出力から見た短絡伝達アドミッタンスと呼びます。

出力を短絡した場合、出力電圧が出ませんので V_2＝0 です。その状態で入力に電圧 V_1 を加え、短絡した出力に流れる電流を I_2 とすれば 7－②式は、

$$I_2 = Y_{21}V_1$$

となります。したがって、

$$Y_{21} = \left[\frac{I_2}{V_1}\right]_{V_2=0}$$

が求まります。単位は S（ジーメンス）です。Y_{21} を入力から見た短絡伝達アドミッタンスと呼びます。

入力を短絡した場合、入力電圧が出ませんので V_1＝0 です。その状態で出力に電圧 V_2 を加え、出力に流れる電流を I_2 とすれば 7－②式は、

$$I_2 = Y_{22}V_2$$

となります。したがって、

$$Y_{22} = \left[\frac{I_2}{V_2}\right]_{V_1=0}$$

が求まります。単位は S（ジーメンス）です。Y_{22} を出力から見た短絡駆動点アドミッタンスと呼びます。

さて、AD－BC＝1 の証明には、この Y パラメーターを使用して四端子定数 ABCD を表します。四端子定数 ABCD の出力電流 I_2 の向きは、アドミッタンス行列で表す四端子回路とは逆ですので、

$V_1 = AV_2 - BI_2$・・・7－③

$I_1 = CV_2 - DI_2$・・・7－④

と直して置きます。7－①式、7－②式を再掲しますと、

$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$ ・・・7－①

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad ・・・7ー②$$

です。7ー②式より、

$$-Y_{21}V_1 = Y_{22}V_2 - I_2$$

$$V_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}V_2 + \frac{1}{Y_{21}}I_2 \quad ・・・7ー⑤$$

となります。この V_1 を 7ー①式に代入して、

$$I_1 = Y_{11}\left(-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}V_2 + \frac{1}{Y_{21}}I_2\right) + Y_{12}V_2$$

$$= -\frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}V_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}I_2 + Y_{12}V_2$$

$$= \left(Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}\right)V_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}I_2$$

$$= \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}V_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}I_2 \quad ・・・7ー⑥$$

となります。7ー③式と 7ー⑤式、7ー④式と 7ー⑥式を比較することにより、ABCD は次の様に表されます。

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$$

$$B = -\frac{1}{Y_{21}}$$

$$C = \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$$

$$D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

このＹパラメーターに変換された ABCD で、ADーBC を計算しますと、

$$AD - BC = \left(-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\right)\bullet\left(-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}\right) - \left(-\frac{1}{Y_{21}}\right)\bullet\frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}$$

$$= \frac{Y_{11}Y_{22}}{{Y_{21}}^2} - \frac{-Y_{12}Y_{21} + Y_{11}Y_{22}}{{Y_{21}}^2}$$

$$= \frac{Y_{11}Y_{22} + Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{{Y_{21}}^2}$$

$$= \frac{Y_{12}Y_{21}}{{Y_{21}}^2}$$

$$= \frac{Y_{12}}{Y_{21}}$$

となります。

入力を短絡し、その状態で出力に電圧 V_2 を加えた時、短絡した入力に流れる電流を I_1 と
として求めるのが、

$$Y_{12} = \left[\frac{I_1}{V_2}\right]_{V_1=0}$$

でした。

出力を短絡し、その状態で入力に電圧 V_1 を加えた時、短絡した出力に流れる電流を I_2 として求めるのが、

$$Y_{21} = \left[\frac{I_2}{V_1}\right]_{V_2=0}$$

でした。

V_1 と V_2 の電圧が同じ時、I_1 と I_2 が同じであれば、Y_{12} と Y_{21} は等しいです。一般的にコイル、コンデンサー、抵抗などの受動素子だけで作る回路では、Y_{12} と Y_{21} が等しくなります。

このことを「相反（そうはん）の定理」と呼びます。$\frac{Y_{12}}{Y_{21}} = 1$ となり、AD−BC ＝1 になります。

相反の定理については「相反の定理について」の章をご覧下さい。

目次へ戻る