通過域平坦阻止域波状近似　　　　　　　　2007 年 8 月 7 日　[目次へ戻る]

2023.10.4　訂正

インバースチェビシェフフィルター、逆チェビシェフフィルターとも呼ばれます。以下インチェビと略します。ω＝0 から通過域端 $\omega=\omega_p$ の範囲を出来るだけ平らにし、阻止域である ω＝1 以上の範囲を振動的に減衰する方法です。

通過域波状阻止域無極近似つまりチェビシェフフィルター（以下チェビと略します）を次のように変形して作るフィルターです。その為、正規化角周波数 ω＝1 が通過域の端では無く、阻止域の先端になります。注意が必要です。

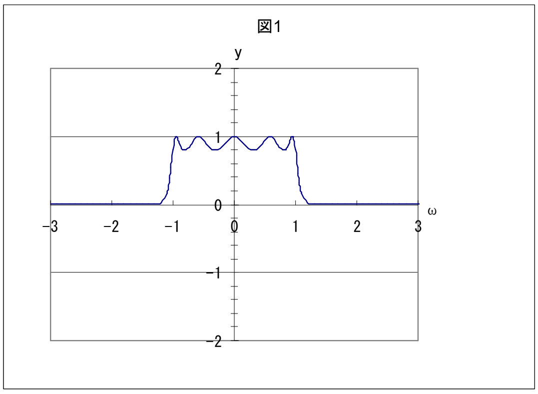
1、製作法および特色

チェビの周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特は、

$$-1\leqq\omega\leqq+1 \text{ の時、} y=\frac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1}$$

$$-1\geqq\omega\geqq+1 \text{ の時、} y=\frac{1}{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1}$$

でした。グラフは図 1 です。チェビの 2 乗です。ω 特については、「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章の 1、「f 特と ω 特」をご覧下さい。チェビの ω 特、2 乗 ω 特については「チェビシェフフィルター」の章の 12、13、14 ページ付近をご覧下さい。



チェビをインチェビに直すには、初めに 1 からこの関数を引きます。

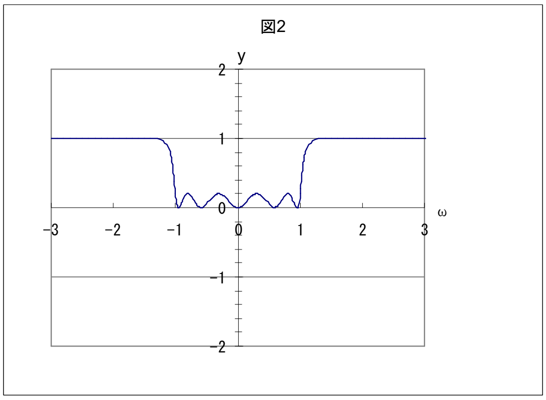
−1≦ω≦＋1 の時、

$$y=1-\frac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1}=\frac{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1-1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1}=\frac{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1}$$

です。−1≧ω≧＋1 の時、

$$y = 1 - \frac{1}{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1} = \frac{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1-1}{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1} = \frac{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2}{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1}$$

です。グラフは図 2 になります。上下反転になります。



次に ω を $\frac{1}{\omega}$ にします。正の正規化角周波数では ω=1 を中心にして、負の正規化角周波数では ω=−1 を中心にして、周波数が左右ひっくり返ります。ω の絶対値 1 以上の範囲は ω の絶対値 1 以下の範囲に移動し、ω の絶対値 1 以下の範囲は ω の絶対値 1 以上の範囲に移動します。つまり cos で表される領域と、cosh で表される領域が逆転します。

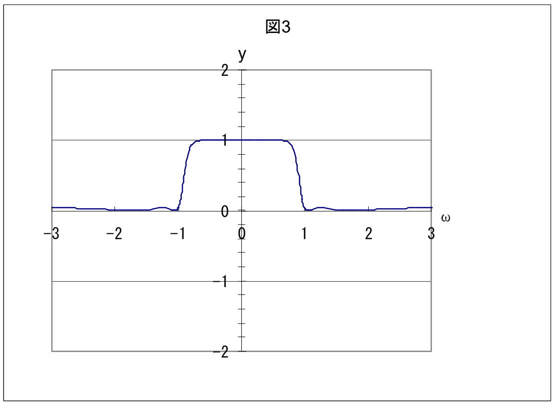
−1≦ω≦＋1 の時、

$$y = \frac{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1} \quad \cdots 1-①$$

です。−1≧ω≧＋1 の時、

$$y = \frac{b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2}{b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1} \quad \cdots 1-②$$

です。グラフは図 3 です。



これがインチェビの２乗 ω 特になります。インチェビの出力はこの平方根になります。

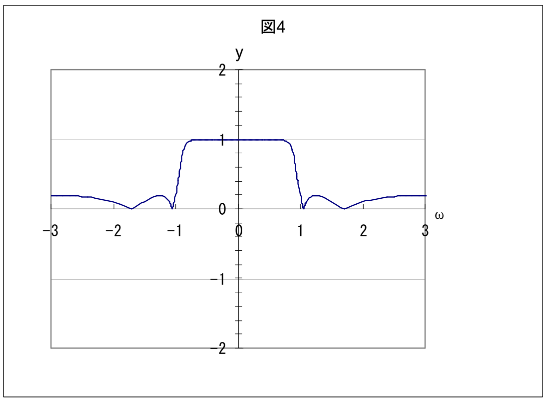
ー1≦ω≦＋1 の時、

$$y=\sqrt{\frac{b^{2}\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^{2}}{b^{2}\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^{2}+1}}$$

です。ー1≧ω≧＋1 の時、

$$y=\sqrt{\frac{b^{2}\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^{2}}{b^{2}\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^{2}+1}}$$

です。グラフは図４になります。



インチェビの利点は、バタおよびチェビに比較して、ω_p 付近での減衰が強力になることです。これは、チェビの強力な減衰域（過渡域）～阻止域部分を通過域～減衰域（過渡域）

部分として使っているからです。

上のグラフを右端、または左端から、たどって行きますと、ひっくり返ったチェビシェフフィルターが見えて来ます。

2、2 乗 ω 特から伝達関数への変換

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特を s の伝達関数に直さなければなりません。s の伝達関数にしなければ回路が実現出来ない為です。

さらに伝達関数は 2 次以下の s の積の形にしなければなりません。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章で説明した通りです。

インチェビの 2 乗 ω 特に出てくる、$b\cdot\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)$ または、$b\cdot\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)$ をチェビの時と同様に、多項式でも表すことが出来ます。チェビ多項式についてはチェビの章 8 ページをご参照下さい。

インチェビの n が 3 の時、式は $b\cdot\cosh\left(3\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)$ または、$b\cdot\cos\left(3\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)$ です。n が 3 のチェビ多項式は、$b(4x^3-3x)$ でした。インチェビの 2 乗 ω 特では、チェビ多項式の変数が $\frac{1}{\omega}$ に変わり、

$$\frac{b^2\left\{4\left(\frac{1}{\omega}\right)^3-3\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2}{b^2\left\{4\left(\frac{1}{\omega}\right)^3-3\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1}=\frac{b^2\left(\frac{4}{\omega^3}-\frac{3}{\omega}\right)^2}{b^2\left(\frac{4}{\omega^3}-\frac{3}{\omega}\right)^2+1}=\frac{b^2\left(\frac{16}{\omega^6}-\frac{24}{\omega^4}+\frac{9}{\omega^2}\right)}{b^2\left(\frac{16}{\omega^6}-\frac{24}{\omega^4}+\frac{9}{\omega^2}\right)+1}$$

$$=\frac{\omega^6 b^2\left(\frac{16}{\omega^6}-\frac{24}{\omega^4}+\frac{9}{\omega^2}\right)}{\omega^6\left\{b^2\left(\frac{16}{\omega^6}-\frac{24}{\omega^4}+\frac{9}{\omega^2}\right)+1\right\}}=\frac{b^2(16-24\omega^2+9\omega^4)}{b^2(16-24\omega^2+9\omega^4)+\omega^6}=\frac{b^2(3\omega^2-4)^2}{b^2(3\omega^2-4)^2+\omega^6}$$

となります。

インチェビの n が 4 の時、式は $b\cdot\cosh\left(4\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)$ または、$b\cdot\cos\left(4\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)$ です。n が 4 のチェビ多項式は、$b(8x^4-8x^2+1)$ でした。インチェビの 2 乗 ω 特では、チェビ多項式の変数が $\frac{1}{\omega}$ に変わり、

$$\frac{b^2\left\{8\left(\frac{1}{\omega}\right)^4-8\left(\frac{1}{\omega}\right)^2+1\right\}^2}{b^2\left\{8\left(\frac{1}{\omega}\right)^4-8\left(\frac{1}{\omega}\right)^2+1\right\}^2+1}=\frac{b^2\left(\frac{8}{\omega^4}-\frac{8}{\omega^2}+1\right)^2}{b^2\left(\frac{8}{\omega^4}-\frac{8}{\omega^2}+1\right)^2+1}=\frac{b^2\left(\frac{8}{\omega^4}-\frac{8}{\omega^2}+1\right)\left(\frac{8}{\omega^4}-\frac{8}{\omega^2}+1\right)}{b^2\left(\frac{8}{\omega^4}-\frac{8}{\omega^2}+1\right)\left(\frac{8}{\omega^4}-\frac{8}{\omega^2}+1\right)+1}$$

$$=\frac{b^2\left(\frac{64}{\omega^8}-\frac{128}{\omega^6}+\frac{80}{\omega^4}-\frac{16}{\omega^2}+1\right)}{b^2\left(\frac{64}{\omega^8}-\frac{128}{\omega^6}+\frac{80}{\omega^4}-\frac{16}{\omega^2}+1\right)+1}=\frac{\omega^8 b^2\left(\frac{64}{\omega^8}-\frac{128}{\omega^6}+\frac{80}{\omega^4}-\frac{16}{\omega^2}+1\right)}{\omega^8\left\{b^2\left(\frac{64}{\omega^8}-\frac{128}{\omega^6}+\frac{80}{\omega^4}-\frac{16}{\omega^2}+1\right)+1\right\}}$$

$$=\frac{b^2(64-128\omega^2+80\omega^4-16\omega^6+\omega^8)}{b^2(64-128\omega^2+80\omega^4-16\omega^6+\omega^8)+\omega^8}=\frac{b^2(\omega^4-8\omega^2+8)^2}{\omega^8+b^2(\omega^4-8\omega^2+8)^2}$$

となります。これらの関数は、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗ですから、利得を表しています。利得が、入力正弦波の正規化角周波数 ω の、$\frac{\text{分子多項式}}{\text{分母多項式}}$ で決まる関数です。

入力正弦波の正規化角周波数 ω に従い、多項式倍される分子分母はどうしたら得られますか。

「s とは何か」の章で記述しましたが、ω に比例した利得は、正弦波を微分して得られるのでした。伝達関数に s があれば、入力された正弦波は微分され、ω 倍されて出て来ます。同様に s^n があれば、入力された正弦波は n 回微分され、ω^n 倍されて出て来ます。ω の多項式を s の多項式に直せば良いのです。

伝達関数にするには 2 乗 ω 特を因数分解し、得られた ω の根（＝解）を 90 度反時計式に回転し s の根（＝解）にします。その際、分母に関しては複素平面左半面の根（＝解）のみを採用します。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

因数分解する前に、分子分母の根（以下、根を使います）の数を求めておきます。根の数を求めるのには、cos や cosh を使わず、多項式に展開された関数で考えると便利です。先ほどのインチェビの 2 乗 ω 特多項式の計算結果を再掲します。n が 3 の時、インチェビの 2 乗 ω 特は、

$$\frac{b^2\left\{4\left(\frac{1}{\omega}\right)^3-3\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2}{b^2\left\{4\left(\frac{1}{\omega}\right)^3-3\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1}=\frac{b^2(3\omega^2-4)^2}{b^2(3\omega^2-4)^2+\omega^6}$$

でした。分子の ω の次数は 4、分母の ω の次数は 6 です。n が 4 の時、インチェビの 2 乗 ω

特は、

$$\frac{b^2\left\{8\left(\frac{1}{\omega}\right)^4-8\left(\frac{1}{\omega}\right)^2+1\right\}^2}{b^2\left\{8\left(\frac{1}{\omega}\right)^4-8\left(\frac{1}{\omega}\right)^2+1\right\}^2+1}=\frac{b^2(\omega^4-8\omega^2+8)^2}{\omega^8+b^2(\omega^4-8\omega^2+8)^2}$$

でした。分子の ω の次数は 8、分母の ω の次数も 8 になります。

n が奇数でも偶数でも、分母多項式の次数は 2n になっています。

n が奇数の時、分子の ω の次数は、分母の ω の次数より 2 下がります。

n が偶数の時、分子の ω の次数は、分母の ω の次数と同じになります。

n が奇数でも偶数でも、分子は多項式の 2 乗の形になっています。つまり分子多項式を＝0 と置いた場合、ω の根が 2 重根と言うことです。2 重根になるので、根の数は次数の半分です。分母の方は 2 重根になっておらず＝0 と置いた場合、次数と根の数は同じになります。2 乗 ω 特の ω の根の数は次のようになります。

・n が奇数の場合・・・分子は $\frac{1}{2}(2n-2)=(n-1)$ 個、分母は 2n 個

・n が偶数の場合・・・分子は $\frac{1}{2}\bullet 2n=n$ 個、分母は 2n 個

分子の根数は、2 重根のため分子多項式の次数の半分です。しかし、この根数で伝達関数に直せば、正弦波応答で s に jω と－jω が代入され、かけ合わされる為、2 乗 ω 特の分子の次数は実現されます。

分母の根数は 2n 個ですが、回路安定化の為、伝達関数の s の根にする時、半分になります。しかし分子と同様に正弦波応答で s に jω と－jω が代入され、かけ合わされる為、2 乗 ω 特の分母の ω の次数は実現されます。

「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章で説明した通りです。

3、分子の因数分解

5 次以上の多項式の方程式には、根を求める代数的解法がありませんので、双曲線関数と逆双曲線関数、または三角関数と逆三角関数で表される周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特を用いて因数分解を行います。

2 乗 ω 特分子を＝0 と置いて、この方程式を成り立たせる ω の値（根＝解）を求めます。分子はその根を使用して因数分解されます。結論だけ知りたい方は、13 ページの(5)結論に

飛んで下さい。

(1) 根を求める

周波数伝達関数の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特である 1−①式の分子を＝0 と置きますと、

$$b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2=0$$

$$\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2=\frac{0}{b^2}=0$$

$$\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)=\pm\sqrt{0}=0$$

になります。cosh の値は、変数が実数の範囲では 0 になりません。cosh の変数は複素数の可能性があるので、括弧内の $n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}$ を仮に x＋jy と置いて見ますと、

$$\cosh(x+jy)=\cosh x\cos y+j\sinh x\sin y=0$$

になります。実数部の coshxcosy と虚数部の sinhxsiny を、共に 0 にしなくてはなりません。

変数が実数の時、cosh の値は 0 になることが無いので、cos y＝0 になります。

cos y の値を 0 にする変数 y は、sin y を 0 にしませんので、sinh x＝0 でなければなりません。したがって、

$$\cos y=0$$

$$y=\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2}\bullet\bullet\bullet$$

$$\sinh x=0$$

$$x=\sinh^{-1}0=0$$

です。忘れてならないのは、括弧内の $n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}$ を、仮に x＋jy と置いたことです。

ω の値を求めますと、

$$n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}=0+\left(j\frac{\pi}{2},j\frac{3\pi}{2},j\frac{5\pi}{2},j\frac{7\pi}{2},j\frac{9\pi}{2},j\frac{11\pi}{2}\bullet\bullet\bullet\right)$$

$$\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}=j\frac{\pi}{2n},j\frac{3\pi}{2n},j\frac{5\pi}{2n},j\frac{7\pi}{2n},j\frac{9\pi}{2n},j\frac{11\pi}{2n}\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{1}{\omega} = \cosh\left(j\frac{\pi}{2n}, j\frac{3\pi}{2n}, j\frac{5\pi}{2n}, j\frac{7\pi}{2n}, j\frac{9\pi}{2n}, j\frac{11\pi}{2n} \bullet\bullet\bullet \right)$$

$$\frac{1}{\omega} = \cosh j\frac{2k-1}{2n}\pi \quad k = 1,2,3 \bullet\bullet\bullet$$

です。複素数変数の cosh の加法定理では、

$$\begin{aligned} \cosh(0 + jy) &= \cosh 0 \cos y + j \sinh 0 \sin y \\ &= 1 \bullet \cos y + j(0 \bullet \sin y) \\ &= \cos y \end{aligned}$$

となります。つまり、$\cosh jy = \cos y$ なので、

$$\frac{1}{\omega} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\omega = \frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi} \qquad k = 1,2,3 \bullet\bullet\bullet$$

となりました。これが分子を 0 にする ω の値です。

2 乗 ω 特が、三角関数と逆三角関数で表される 1ー②式分子の場合も計算して見ます。1ー②式の分子を＝0 と置きますと、

$$b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2 = 0$$

$$\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2 = \frac{0}{b^2} = 0$$

$$\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right) = \pm\sqrt{0} = 0$$

$$n\cos^{-1}\frac{1}{\omega} = \cos^{-1}0$$

になります。$\cos^{-1}0$ が成り立つ変数を列挙しますと、

$$n\cos^{-1}\frac{1}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \bullet\bullet\bullet$$

になります。したがって、

$$\cos^{-1}\frac{1}{\omega}=\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n},\frac{5\pi}{2n},\frac{7\pi}{2n},\frac{9\pi}{2n},\frac{11\pi}{2n}\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{1}{\omega}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\omega=\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\qquad k=1,2,3\bullet\bullet\bullet$$

となります。双曲線関数、逆双曲線関数で表した 1ー①式分子の因数分解と全く同じ結果となりました。

(2) k 値の決定

現在、分子の根は無限個生じていますので、k 値の決定を行います。

k が 1 の時、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=\cos\frac{\pi}{2n}$$

となります。k に 2n＋1 を代入して見ますと、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n+1}=\cos\frac{4n+2-1}{2n}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\frac{\pi}{2n}$$

になります。

k が 2n＋1 の時、cos の値は k が 1 の時の cos 値と一致し、このあとの k では 1 周目と同じ値をとって行きます。

変数が偶数分の奇数の分数なので、1 周回っては同じ根をなぞって行きます。

したがって、k は 1 から 2n まで採用すれば良いことが分ります。

さらに次のことを考えます。1 周目の最初の cos 値と、1 周目の最後の cos 値を比較します。1 周目最初の cos 値は k＝1 ですから、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=\cos\frac{\pi}{2n}$$

となります。1 周目最後の cos 値は k＝2n ですから、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n}=\cos\frac{4n-1}{2n}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\frac{-\pi}{2n}$$

となります。変数の絶対値は同じで極性はマイナスです。cos は偶関数なので、変数がマイナスになっても、関数の値は等しくなります。つまり、1 周目最後の変数に対する cos 値の計算は、しなくて良いことが分ります。

同様のことが 1 周目 2 番目の cos 値と、1 周目後ろから 2 番目の cos 値にも当てはまります。どこまでの k で cos 値を計算すれば良いのでしょうか。

cos の変数値が半周する直前までです。次の不等式の範囲までです。

$$\frac{2k-1}{2n}\pi<\pi$$

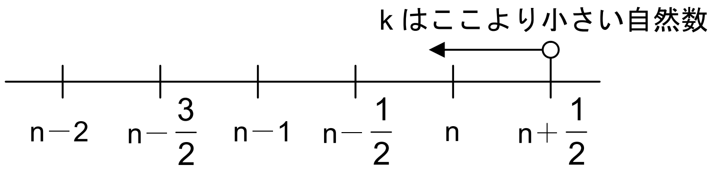
$$\frac{2k-1}{2n}<1$$

$$2k-1<2n$$

$$2k<2n+1$$

$$k<n+\frac{1}{2}$$

です。図で表しますと、



になります。k は自然数ですから、$n+\frac{1}{2}$ より小さい k は n までです。ω は、

$$\omega=\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\qquad k=1,2,3\bullet\bullet\bullet n$$

までで良いことになります。次に n が偶数と奇数の場合に分けて考えます。

(3) n が偶数の場合

n が偶数の場合、k の最大値は n なので偶数です。したがって k の個数は偶数個になります。k の個数は n と同じ値になります。k の一番前と一番後ろ、二番目と後ろから二番目、

三番目と後ろから三番目と言う風にペアを組んでいくと、$\dfrac{n}{2}$個のペアが出来て仲間はずれは出来ません。ここで、k の一番前の値 1 と一番後ろの値 n について、cos 値の計算を行って見ますと、

k＝1 では、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1} = \cos\frac{\pi}{2n}$$

k＝n では、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=n} = \cos\frac{2n-1}{2n}\pi = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= \cos\pi\cos\frac{\pi}{2n} + \sin\pi\sin\frac{\pi}{2n} = -\cos\frac{\pi}{2n}$$

となり、一番前と一番後ろで、符号だけが逆になることが分ります。

計算してみれば分りますが、一番前と一番後ろのペアについてだけでなく、他のペアでも成り立ちます。したがって、すべての k について cos 値の計算をする必要は無く、各ペアの前側の k＝1 から $k=\dfrac{n}{2}$ までの cos 値を計算すれば良いです。各ペアの後ろ側の cos 値は、前側 cos 値の符号だけ変えれば良いです。

こうして n が偶数の場合の、1－①式分子の根が分りました。つまり、

$$\omega = \frac{1}{\pm\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi} \qquad k = 1,2,3 \bullet\bullet\bullet \frac{n}{2}$$

になります。s の根は、この ω の根に j を掛けたものですから、

$$j\omega = \pm\frac{j}{\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi} \qquad k = 1,2,3 \bullet\bullet\bullet \frac{n}{2}$$

となります。n が偶数の場合の伝達関数分子は、

$$\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left\{\left(s-\frac{j}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)\left(s+\frac{j}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)\right\}=\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}$$

です。n が偶数の場合、分子の根は n 個でしたが、上式の n に各偶数を入れてみると、足りていることが分ります。

(4) n が奇数の場合

n が奇数の場合、k の最大値は n なので奇数です。k の個数は奇数になります。k の一番前と一番後ろ、二番目と後ろから二番目、三番目と後ろから三番目、というふうにペアを組んでいくと、真ん中に 1 個の仲間はずれが出来ます。n から仲間はずれの 1 を引き、2 で割った、$\frac{n-1}{2}$ 個のペアが出来ます。

真ん中の仲間はずれの k 値は、ペアの数が 1 つならば 2、ペアの数が 2 つなら 3、というようにペアの数プラス 1、つまり $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ が指し示します。

仲間はずれの $k=\frac{n+1}{2}$ について、先ほどの計算を行って見ますと、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=\frac{n+1}{2}}=\cos\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}{2n}\pi=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

となります。ω を求めようとして、

$$\omega=\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$$

を計算しようとしても 0 で割ることは出来ません。この cos 値は捨てることになります。

ペアの部分は、n が偶数の場合と全く同じになります。k の一番前の値 1 と、一番後ろの値 n について、cos 値の計算を行って見ますと、

k＝1 では、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=\cos\frac{\pi}{2n}$$

k＝n では、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=n}=\cos\frac{2n-1}{2n}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=\cos\pi\cos\frac{\pi}{2n}+\sin\pi\sin\frac{\pi}{2n}=-\cos\frac{\pi}{2n}$$

となり、一番前と一番後ろで、符号だけが逆になることが分ります。これは他のペアでも成り立ちます。

すべての k について cos 値の計算をする必要は無く、各ペアの一番前の k＝1 から $k=\frac{n-1}{2}$ までの cos 値を計算すれば良いです。各ペアの後側の cos 値は前側の符号だけ変えれば良いです。

こうして n が奇数の場合の、1ー①式分子の根が分りました。つまり、

$$\omega=\frac{1}{\pm\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\qquad k=1,2,3\bullet\bullet\bullet\frac{n-1}{2}$$

となります。s の根はこの ω の根に j をかけたものですから、

$$j\omega=\pm\frac{j}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\qquad k=1,2,3\bullet\bullet\bullet\frac{n-1}{2}$$

となり、n が奇数の場合の伝達関数分子は、

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\left(s-\frac{j}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)\left(s+\frac{j}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)\right\}=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}$$

です。cos 値を一つ捨てているので、根の数が足りているのか疑問が残ります。n が奇数の場合の分子の根数は n−1 個でした。上式の n に各奇数を入れてみると、足りていることが分ります。実根が 1 つ有ることが関係しています。

(5)結論

n が偶数の場合の伝達関数分子は、

$$\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}$$

です。n が奇数の場合の伝達関数分子は、

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}$$

です。

4、分母の因数分解

分子の因数分解と同じく、5 次以上の多項式の方程式には、根を求める代数的解法がないので、双曲線関数と逆双曲線関数、または三角関数と逆三角関数で表される周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特で因数分解を行います。

2 乗 ω 特分母を＝0 と置いて、この方程式を成り立たせる ω の値（根＝解）を求めます。

結論だけ知りたい方は 29 ページ 5、伝達関数の作成に飛んで下さい。

(1) 根を求める

周波数伝達関数の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特である 1ー①式の分母を＝0 と置きますと、

$$b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1=0$$

$$b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2=-1$$

$$\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2=\frac{-1}{b^2}$$

$$\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)=\pm\sqrt{\frac{-1}{b^2}}$$

になります。b＞0 ですから、右辺分母の根号をはずし、

$$\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}\right)=\pm\frac{j}{b}=0\pm j\frac{1}{b}$$

となります。cosh の値が複素数になる場合、次の例のように変数も複素数になりますので、

$$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$ z＝x＋jy ならば、

$$\cosh(x+jy)=\frac{e^{x+jy}+e^{-(x+jy)}}{2}=\frac{e^{x}e^{jy}+e^{-x}e^{-jy}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\cos y+j\sin y)e^{x}+(\cos y-j\sin y)e^{-x}\}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{x}\cos y+e^{x}j\sin y+e^{-x}\cos y-e^{-x}j\sin y)$$

$$=\frac{1}{2}\{(e^{x}+e^{-x})\cos y+(e^{x}-e^{-x})j\sin y\}$$

$$=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cos y+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}j\sin y$$

$$=\cosh x\cos y+j\sinh x\sin y$$

括弧内の$n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}$の値を、仮に複素数 x＋jy と置いて見ますと、

$$\cosh(x+jy)=\cosh nx\cos ny+j\sinh nx\sin ny$$

$$=0\pm j\frac{1}{b}$$

になります。つまり、

$$\cosh x\cos y=0$$

$$\sinh x\sin y=\pm\frac{1}{b}$$

が成り立たなければなりません。まず第一に、cosh x cos y＝0 を考えますと、cosh x は 0 になることの無い関数なので、cos y＝0 でなければなりません。したがって、

$$y = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \bullet\bullet\bullet$$

$$y = \frac{2k-1}{2}\pi \quad k = 1,2,3 \bullet\bullet\bullet$$

となります。これらの y の値の時、sin y＝±1 ですから、

$$\sinh x \sin y = \pm\frac{1}{b}$$

$$\sinh x \bullet \pm 1 = \pm\frac{1}{b}$$

$$\sinh x = \frac{1}{\pm 1} \pm \frac{1}{b} = \pm 1 \bullet \pm \frac{1}{b} = \pm\frac{1}{b}$$

$$x = \sinh^{-1} \pm \frac{1}{b}$$

です。sinh は奇関数なので $\sinh^{-1}\left(-\frac{1}{b}\right)$ は $-\sinh^{-1}\frac{1}{b}$ ですから、

$$x = \pm\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

です。これで、x と y の値を求めることが出来ました。忘れてならないのは、x＋jy は括弧内の $n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega}$ の値を仮に置いたものだったことです。ω の値を求めますと、

$$n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega} = \pm\sinh^{-1}\frac{1}{b} + j\frac{2k-1}{2}\pi$$

$$\cosh^{-1}\frac{1}{\omega} = \pm\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b} + j\frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\frac{1}{\omega} = \cosh\left(\pm\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b} + j\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

$$\frac{1}{\omega} = \cosh\left(\pm\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + j\sinh\left(\pm\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \pm j\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)}$$

±の変化：cosh は偶関数、sinh は奇関数の為　　　$k = 1,2,3 \bullet\bullet\bullet$

になります。これが、1ー①式分母を成り立たせる根です。s の根はこの ω の根に j を掛けたものですから、

$$j\omega=\frac{j}{\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\pm j\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}$$

$$=\frac{j}{j\left\{\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)-j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)-j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}$$

$$k=1,2,3\bullet\bullet\bullet$$

となります。2 乗 ω 特が三角関数と逆三角関数で表される、1ー②式分母の場合も計算して見ます。2 乗 ω 特分母を 0 と置いて、この方程式を成り立たせる ω の値を求めますと、

$$b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1=0$$

$$b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2=-1$$

$$\{\cos n(\cos^{-1}\frac{1}{\omega})\}^2=\frac{-1}{b^2}$$

$$\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)=\pm\sqrt{\frac{-1}{b^2}}$$

になります。b＞0 ですから分母の根号をはずし、

$$\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)=\pm\frac{\sqrt{-1}}{b}=\pm\frac{j}{b}=0\pm\frac{j}{b}$$

となります。cos の値が複素数になる場合、次のように変数も複素数である筈なので、

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$　　z＝x＋jy ならば、

$$\cos(x + jy) = \frac{e^{j(x+jy)} + e^{-j(x+jy)}}{2} = \frac{e^{(jx-y)} + e^{(-jx+y)}}{2} = \frac{e^{jx}e^{-y} + e^{-jx}e^{y}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\cos x + j\sin x)e^{-y} + (\cos x - j\sin x)e^{y}\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-y}\cos x + e^{-y}j\sin x + e^{y}\cos x - e^{y}j\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos x(e^{y} + e^{-y}) + j\sin x(e^{-y} - e^{y})\}$$

$$= \frac{1}{2}[\cos x(e^{y} + e^{-y}) + j\sin x\{-(e^{y} - e^{-y})\}]$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos x(e^{y} + e^{-y}) - j\sin x(e^{y} - e^{-y})\}$$

$$= \cos x\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - j\sin x\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$= \cos x\cosh y - j\sin x\sinh y$$

括弧内の$n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}$の値を、仮に複素数 x＋jy と置いて見ますと、

$$\cos(x + jy) = \cos x\cosh y - j\sin x\sinh y$$

$$= 0 \pm j\frac{1}{b}$$

になります。つまり、

$$\cos x\cosh y = 0$$

$$\sin x\sinh y = \mp\frac{1}{b}$$

でなければなりません。

　まず、cos x cosh y＝0 を考えますと、cosh y は 0 になることの無い関数ですので、cos x が 0 でなければなりません。つまり cos を 0 にする x は、

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \bullet\bullet\bullet$$

であり、

$$x=\frac{2k-1}{2}\pi \quad k=1,2,3\bullet\bullet\bullet$$

となります。これらの x の値の時、

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\frac{\pi}{2},\sin\frac{3\pi}{2},\sin\frac{5\pi}{2},\sin\frac{7\pi}{2},\sin\frac{9\pi}{2},\sin\frac{11\pi}{2}\bullet\bullet\bullet\\&=\pm1\end{aligned}$$

ですから、

$$\sin x\sinh y=\mp\frac{1}{b}$$

は、

$$\pm1\bullet\sinh y=\mp\frac{1}{b}$$

$$\sinh y=\frac{1}{\pm1}\bullet\mp\frac{1}{b}=\pm1\bullet\mp\frac{1}{b}=\mp\frac{1}{b}$$

$$y=\sinh^{-1}\left(\mp\frac{1}{b}\right)$$

となります。sinh は奇関数ですので $\sinh^{-1}\left(-\frac{1}{b}\right)$ は $-\sinh^{-1}\frac{1}{b}$ となり、

$$y=\mp\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

です。これで、x と y の値を求めることが出来ました。

忘れてならないのは、括弧内 $n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}$ を仮に x+jy と置いたことです。ω の値を求めますと、

$$n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}=\frac{2k-1}{2}\pi\mp j\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

$$\cos^{-1}\frac{1}{\omega}=\frac{2k-1}{2n}\pi\mp j\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{\omega}=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\mp j\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{1}{\omega}=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\pm j\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) \pm j\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}$$

$$k = 1,2,3\bullet\bullet\bullet$$

となります。これが、1ー②式分母を成り立たせる根です。s の根はこの ω の根に j を掛けたものですから、

$$j\omega = \frac{j}{\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) \pm j\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}$$

$$= \frac{j}{j\left\{\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) - j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) - j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}$$

$$k = 1,2,3\bullet\bullet\bullet$$

となります。

双曲線関数で計算しても、三角関数で計算しても、全く同じ結果になりました。

(2) 複素数の逆数について

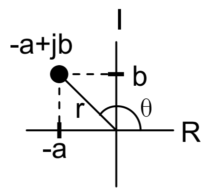
ここで複素数の逆数について考察します。

右図の複素数 －a＋jb を極形式で表しますと、

$$-a + jb = re^{j\theta}$$

となります。絶対値 r は、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$



です。正の実軸から反時計式に測った偏角 θ は、

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{-a}$$

となります。$\tan^{-1}$ の主値は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ です。電卓などでは、$\tan^{-1}$ の変数が正の場合は第 1 象限、負の場合は第 4 象限にあるものとして答えが出されます。

正の実軸から反時計式に測った場合の θ を求める場合は、電卓の答えを見直し複素数の存在する象限を考えて、正しい答えを求める必要があります。この例の場合は実数部が正、虚数部が負なので第 2 象限にあります。$\tan^{-1}$ の答は π 以上になります。

次にこの複素数－a＋jb の逆数を求め、有理化しますと、

$$\frac{1}{-a+jb}=\frac{1}{-a+jb}\bullet\frac{-a-jb}{-a-jb}=\frac{-a-jb}{a^2+b^2}=\frac{-a}{a^2+b^2}-j\frac{b}{a^2+b^2}$$

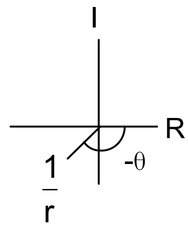
になります。右辺に現れました複素数は、実数部虚数部共に負です。第 3 象限にあります。

この複素数の絶対値は、

$$\left|\frac{-a}{a^2+b^2}-j\frac{b}{a^2+b^2}\right|=\sqrt{\left(\frac{-a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{r}$$

となります。この複素数の偏角を φ としますと、



$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\frac{-b}{a^2+b^2}}{\frac{-a}{a^2+b^2}}=\tan^{-1}\frac{-b}{-a}=\tan^{-1}-\frac{b}{-a}=-\tan^{-1}\frac{b}{-a}=-\theta$$

です。この偏角の求め方は、第 3 象限にあることを強く意識したからです。つまり、複素数の逆数を極形式で表した場合、絶対値は元の絶対値の逆数、偏角は元の偏角の逆回転になります。上右図の通りです。

絶対値は逆数ですが、偏角は逆回転で同じ角度ですから、第 2 象限の複素数根は第 3 象限に移動し、第 3 象限の複素数根は第 2 象限に移動します。また負の実根は同じく負の実根になります。つまり、元の根が複素平面左半面の根であれば、逆数根も複素平面左半面の根です。

したがって、考えるべきは分数で出たインチェビ分母の根のそのまた分母の根、

$$\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)-j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

$$k=1,2,3\bullet\bullet\bullet$$

となります。この式からは無限個の根が生じますが、これらの根から根の実数部が負である複素平面左半面の根のみを、1 回だけ取り出せば良いです。最後に逆数に変換してインチ

ェビの伝達関数の分母の根にすれば良いです。

上式の中で $\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$ と $\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$ は正の定数ですので、考える必要は無く、$\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ と $-\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ を考えて行きます。

(3) k 値の決定

初めに $\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ のことを考えます。k＝1 で sin は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1} = \sin\frac{\pi}{2n}$$

となります。k に 2n＋1 を代入して見ますと、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n+1} = \sin\frac{4n+2-1}{2n}\pi = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2n}\right) = \sin\frac{\pi}{2n}$$

になります。k が 2n＋1 の時、sin の値は k が 1 の時の sin 値と一致し、このあとの k では 1 周目と同じ値をとって行きます。変数が偶数分の奇数の分数なので、1 周回っては同じ根をなぞって行きます。つまり、k は 1 から 2n まで採用すれば良いことが分ります。

sin の頭に±が付いています。＋sin と－sin の違いについて考えます。sin は奇関数なので、

$$-\sin\frac{2k-1}{2n}\pi = \sin\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

となります。k が 1 の時の－sin 値は、

$$\left[-\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1} = \sin\left(-\frac{2-1}{2n}\pi\right) = \sin\frac{-\pi}{2n}$$

です。k が 2n の時の＋sin 値は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n} = \sin\frac{4n-1}{2n}\pi = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2n}\right) = \sin\frac{-\pi}{2n}$$

です。－sin の最初の値は、＋sin の最後の値と一致します。
　k が 2 の時の－sin 値は、

$$\left[-\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2}=\sin\left(-\frac{4-1}{2n}\pi\right)=\sin\frac{-3\pi}{2n}$$

です。k が 2n－1 の時の＋sin は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n-1}=\sin\frac{2(2n-1)-1}{2n}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{3\pi}{2n}\right)=\sin\frac{-3\pi}{2n}$$

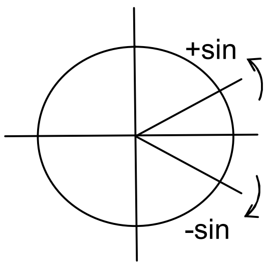
となり、－sin の 2 番目の値は、＋sin の最後から 2 番目の値と一致します。
　これを続けますと、k が 2n の時の－sin 値は、

$$\left[-\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n}=\sin\left(-\frac{4n-1}{2n}\pi\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{2n}\right)=\sin\frac{\pi}{2n}$$

となり、k が 1 の時の＋sin は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=\sin\frac{\pi}{2n}$$

ですので、－sin の最後の値は、＋sin の最初の値と一致します。
　sin は奇関数です。反時計回りで、ある角度ごとの sin 値を採用して行くのが＋sin であり、時計回りで、同じ角度ごとの sin 値を採用して行くのが－sin です。



　どちらも採用される sin 値は、順番が逆になるだけで全く同じです。両方の計算をする必要はありません。ここからは＋sin だけ考えます。

一方、$-\cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$は、k が 1 の時、

$$\left[-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=-\cos\frac{\pi}{2n}$$

となります。k に 2n＋1 を代入して見ますと、

$$\left[-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n+1}=-\cos\frac{4n+2-1}{2n}\pi=-\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2n}\right)=-\cos\frac{\pi}{2n}$$

となります。k が 2n＋1 の時、ーcos の値は k が 1 の時のーcos 値と一致し、このあとの k では 1 周目と同じ値をとって行きます。ーcos についても、k は 1 から 2n まで採用すれば良いことが分ります。

＋sin もーcos も同じ変数、$\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ で k を増やしつつ根を製作して行きます。複素平面左半面の根のみを、1 回だけ取り出せば良いです。

つまり、根の実数部、$\sin\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\dfrac{1}{n}\sinh^{-1}\dfrac{1}{b}\right)$が負であれば良いです。根の実数部のうち、$\sinh\left(\dfrac{1}{n}\sinh^{-1}\dfrac{1}{b}\right)$は b と n が正であり、全体として正なので、$\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ の値が負であれば複素平面左半面の根です。

sin の値は π を超え 2π 未満で負になりますので、$\pi<\dfrac{2k-1}{2n}\pi<2\pi$ の sin 値を取り出せば良いです。

まず不等式 $\pi<\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ を解きますと、

$$\pi<\frac{2k-1}{2n}\pi$$

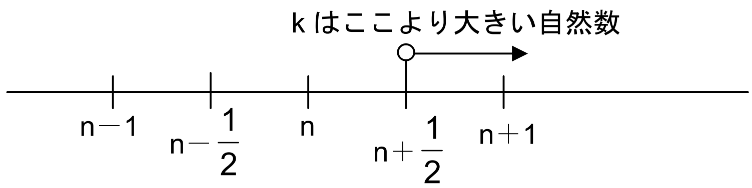
$$1<\frac{2k-1}{2n}$$

$$2n<2k-1$$ 　　2n＞0 だから不等号そのまま

$$2n+1<2k$$

$$n+\frac{1}{2}<k$$

になります。$n+\frac{1}{2}$ 以上の k とは、k が自然数の場合、下図に示す様に k が n＋1 以上なら良いということです。



次に不等式 $\frac{2k-1}{2n}\pi<2\pi$ を解きますと、

$$\frac{2k-1}{2n}\pi<2\pi$$

$$\frac{2k-1}{2n}<2$$

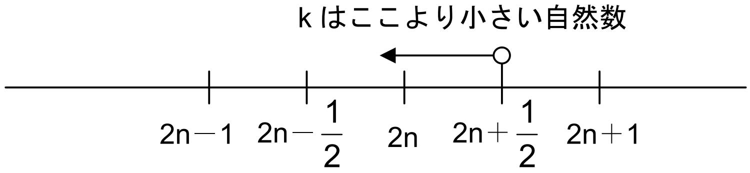
$$2k-1<4n$$

$$2k<4n+1$$

$$k<\frac{4n+1}{2}$$

$$k<2n+\frac{1}{2}$$

になります。$2n+\frac{1}{2}$ 以下の k とは、k が自然数の場合、下図に示す様に k が 2n 以下なら良いということです。



つまり、k の値は、n＋1≦k≦2n です。この値で sin 値は負になり、伝達関数 s の根の実数部は負になります。ここまでのことをまとめますと、インチェビ分母の根のそのまた分母の根は、

$$+\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)-j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

n＋1≦k≦2n

となります。

(4) 更なる簡単化

更に計算の簡単化を考えます。$\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$ が負になる k は、n＋1≦k≦2n ですから、k＝n＋m、m＝1,2,3・・・,n と置きますと、

$$\frac{2k-1}{2n}\pi=\frac{2(n+m)-1}{2n}\pi=\frac{2n+2m-1}{2n}\pi=\pi+\frac{2m-1}{2n}\pi$$

です。三角関数の加法定理により、

$$\sin\frac{2k-1}{2n}\pi=\sin\left(\pi+\frac{2m-1}{2n}\pi\right)=\sin\pi\cos\frac{2m-1}{2n}\pi+\cos\pi\sin\frac{2m-1}{2n}\pi$$
$$=-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad m=1,2,3\cdots,n$$

$$-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi=-\cos\left(\pi+\frac{2m-1}{2n}\pi\right)=-\left(\cos\pi\cos\frac{2m-1}{2n}\pi-\sin\pi\sin\frac{2m-1}{2n}\right)$$
$$=\cos\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad m=1,2,3\cdots,n$$

が分母の根のそのまた分母の根のための sin 値、cos 値となります。さらに n が偶数と奇数の場合に分けて考えます。

(5) n が偶数の場合の m

n が偶数の場合、m の最大値は n なので偶数です。したがって、m の個数は n と同じ値の偶数個になります。m の一番前と一番後ろ、二番目と後ろから二番目、三番目と後ろから三番目と言う風にペアを組んでいくと、$\frac{n}{2}$ 個のペアが出来て仲間はずれは出来ません。ここで、m の一番前の値 1 と一番後ろの値 n について、sin 値、cos 値の計算を行って見ますと、

m＝1 では、

$$\left[-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=1}=-\sin\frac{1}{2n}\pi$$

$$\left[\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=1}=\cos\frac{1}{2n}\pi$$

m＝n では、

$$\left[-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=n}=-\sin\frac{2n-1}{2n}\pi=-\sin\left(\pi-\frac{1}{2n}\pi\right)$$
$$=-\left(\sin\pi\cos\frac{1}{2n}\pi-\cos\pi\sin\frac{1}{2n}\pi\right)=-\sin\frac{1}{2n}\pi$$

$$\left[\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=n}=\cos\frac{2n-1}{2n}\pi=\cos\left(\pi-\frac{1}{2n}\pi\right)$$
$$=\cos\pi\cos\frac{1}{2n}\pi+\sin\pi\sin\frac{1}{2n}\pi=-\cos\frac{1}{2n}\pi$$

となり、sin については一番前と一番後ろで同じ値、cos については一番前と一番後ろで符号だけ逆になることが分かります。これは m＝2 と m＝n−1 のペアについても、また他のペアでも成り立ちます。したがって、すべての m について sin 値、cos 値の計算をする必要は無く、各ペアの前側の m＝1 から m＝$\frac{n}{2}$ までの sin 値、cos 値を計算すれば良いです。各ペア後側の sin 値は前側と同値、後側の cos 値は前側の cos 値の符号だけ変えれば良いです。これは虚数部の符号が逆になるので、共役根を表しています。

こうして出来た全ペアの sin 値、cos 値から伝達関数 s の根を作ります。n が偶数の場合の分母の根のそのまた分母の根は、sin の符号を－、cos の符号を＋として、

$$-\sin\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)+j\cos\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$
$$m=1\bullet\bullet\bullet\bullet\frac{n}{2}$$

となります。

(6) n が奇数の場合の m

n が奇数の場合、m の最大値は n なので奇数です。したがって、m の個数は n と同じ値の奇数個になります。m の一番前と一番後ろ、二番目と後ろから二番目、三番目と後ろから三番目と言う風にペアを組んでいくと、真ん中に 1 個の仲間はずれが出来ます。n から仲間

はずれの 1 個を引き 2 で割った $\frac{n-1}{2}$ 個のペアが出来ます。

真ん中の仲間はずれの m 値は、ペアの数が 1 ならば m＝2、ペアの数が 2 つなら m＝3、という様に、(ペアの数＋1)＝ $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ で示されます。

仲間はずれの $m=\frac{n+1}{2}$ の根について、sin 値、cos 値の計算を行って見ますと、

$$\left[-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=\frac{n+1}{2}}=-\sin\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}{2n}\pi=-\sin\frac{n}{2n}\pi=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

$$\left[\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=\frac{n+1}{2}}=\cos\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}{2n}\pi=\cos\frac{n}{2n}\pi=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

となり、虚数部が無くなります。n が奇数の場合の、仲間はずれの分母の根のそのまた分母の根は、

$$-\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

となります。これは実根になります。

ペアの部分の考え方は、偶数の場合と全く同じになります。sin については一番前と一番後ろで同じ値、cos については一番前と一番後ろで符号だけが逆になります。これは他のペアでも成り立つので、全ての m について sin 値、cos 値の計算をする必要は無く、各ペアの前側の m＝1 から m＝ $\frac{n-1}{2}$ までの sin 値、cos 値を計算すれば良いです。各ペアの後側の sin 値は前側と同値、後側の cos 値は前側の cos 値の符号だけ変えれば良いです。これは虚数部の符号が逆になるので、共役根を表しています。n が奇数の場合の分母の根のそのまた分母の根は、sin の符号を－、cos の符号を＋として、

$$-\sin\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)+j\cos\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

$$m=1\bullet\bullet\bullet\bullet\frac{n-1}{2}$$

となります。

5、伝達関数の作成

以上でインチェビの分子の根と、分母の根のそのまた分母の根が求まりました。分母の根のそのまた分母の根を逆数にする必要があります。

複素数 $\alpha+j\beta$ の逆数を求め、有理化しますと、

$$\frac{1}{\alpha+j\beta}=\frac{1}{\alpha+j\beta}\bullet\frac{\alpha-j\beta}{\alpha-j\beta}$$

$$=\frac{\alpha-j\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

になります。$\alpha^2+\beta^2=\gamma$（ガンマ）と置きますと、

$$=\frac{\alpha}{\gamma}-j\frac{\beta}{\gamma}$$

になります。

共役複素数 $\alpha-j\beta$ の逆数を求め、有理化しますと、

$$\frac{1}{\alpha-j\beta}=\frac{1}{\alpha-j\beta}\bullet\frac{\alpha+j\beta}{\alpha+j\beta}$$

$$=\frac{\alpha+j\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

になります。$\alpha^2+\beta^2=\gamma$（ガンマ）と置きますと、

$$=\frac{\alpha}{\gamma}+j\frac{\beta}{\gamma}$$

になります。

分母の根のそのまた分母の根の実数部を α_m（アルファ m）、虚数部を β_m（ベータ m）とし、$\alpha_m+j\beta_m$ の絶対値の２乗を γ_m（ガンマ m）とすれば、

$$\alpha_m=-\sin\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

n が偶数で $m=1\bullet\bullet\bullet\frac{n}{2}$　　n が奇数で $m=1\bullet\bullet\bullet\frac{n-1}{2}$

$$\beta_m=\cos\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

n が偶数で $m=1\bullet\bullet\bullet\frac{n}{2}$　　n が奇数で $m=1\bullet\bullet\bullet\frac{n-1}{2}$

$$\gamma_m = \alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2$$

となります。したがって、

(1) n が偶数の場合

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi} \right)^2 \right\}}{\prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \left\{ s - \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m} + j\frac{\beta_m}{\gamma_m} \right) \right\} \left\{ s - \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m} - j\frac{\beta_m}{\gamma_m} \right) \right\}}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi} \right)^2 \right\}}{\prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \left\{ s^2 - 2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}s + \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\gamma_m} \right)^2 \right\}}$$

となります。この伝達関数は角周波数 0 で利得 1、つまり 0[dB]になりません。s＝jω＝0 を式に代入すると分りますが、分子分母に s と無関係な定数項がある為、角周波数 0 での利得が 1 にならないのです。

利得調整のために次のような対策を行います。

① 角周波数 0 で利得を 1 にする為、分母の定数項と同じものを、分子に付けます。

② 分子の定数項と同じものを、分母に付けます。

対策済の伝達関数は次の式です。

$$G(s) = \prod_{\substack{k=1\\m=1}}^{\frac{n}{2}} \frac{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\gamma_m} \right)^2 \right\} \left\{ s^2 + \left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi} \right)^2 \right\}}{\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi} \right)^2 \left\{ s^2 - 2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}s + \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\gamma_m} \right)^2 \right\}}$$

分子分母に$\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2}$を掛け、定数項を分子だけにしても良いです。

(2) n が奇数の場合

$$G(s)=\frac{1}{s+\dfrac{1}{\sinh\left(\dfrac{1}{n}\sinh^{-1}\dfrac{1}{b}\right)}}\bullet\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}}{\displaystyle\prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{s-\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}+j\frac{\beta_m}{\gamma_m}\right)\right\}\left\{s-\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}-j\frac{\beta_m}{\gamma_m}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{s+\dfrac{1}{\sinh\left(\dfrac{1}{n}\sinh^{-1}\dfrac{1}{b}\right)}}\bullet\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}}{\displaystyle\prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{s^2-2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}+\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2+\left(\frac{\beta_m}{\gamma_m}\right)^2\right\}}$$

となります。n が偶数の時と同じく、この伝達関数は周波数ゼロで利得 1、つまり 0[dB]にならりません。n が偶数の場合と全く同じに考えて、対策済の伝達関数は次の式です。

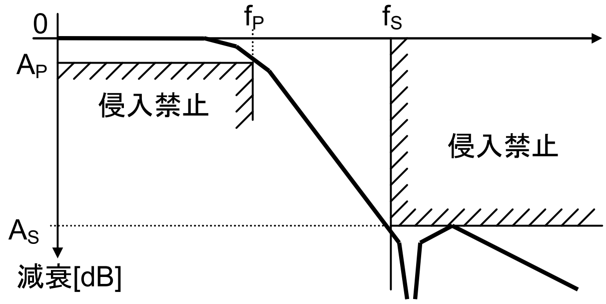
$$G(s)=\frac{\dfrac{1}{\sinh\left(\dfrac{1}{n}\sinh^{-1}\dfrac{1}{b}\right)}}{s+\dfrac{1}{\sinh\left(\dfrac{1}{n}\sinh^{-1}\dfrac{1}{b}\right)}}\bullet\frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\m=1}}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2+\left(\frac{\beta_m}{\gamma_m}\right)^2\right\}\left\{s^2+\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}}{\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\m=1}}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\right\}\left\{s^2-2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}+\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2+\left(\frac{\beta_m}{\gamma_m}\right)^2\right\}}$$

分子分母に$\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2}$を掛け、定数項を分子だけにしても良いです。以上で伝達関数が完成しました。

6、インチェビ設計ソフトの製作

インチェビ設計ソフトを作る場合の、ユーザーとのインターフェースを考えます。

ユーザーの希望するフィルターの仕様は、下図の様なものです。



「0[Hz]から f_P [Hz]までの通過域における減衰の許容最大は A_P [dB]以下、阻止域である f_S [Hz]以上での減衰の許容最小は A_S [dB]以上。」

(1) コンピューターへの入力依頼

ユーザーに、

通過域端周波数 f_P [Hz]

阻止域先端周波数 f_S [Hz]

通過域許容最大減衰量 A_P [dB]

阻止域許容最小減衰量 A_S [dB]

を入力して頂きます。コンピューター内部では、角周波数 $\omega=2\pi f$ [rad/sec]で計算することにします。インチェビの設計でも、各周波数は生（なま）のものを用いないで、スケーリングを行い、正規化角周波数で表します。（スケーリングの章を参照下さい。）

他のフィルターでは $\dfrac{1[\mathrm{rad/sec}]}{\text{通過域端角周波数}\ \omega_P[\mathrm{rad/sec}]}$ を縮尺として使用しますが、インチェビではこれを縮尺にしません。正規化角周波数 1 [rad/sec]の場所で、阻止域に突入するとして設計する為、阻止域先端角周波数が 1 [rad/sec]になる縮尺を選びます。阻止域先端角周波数を ω_S とすれば、

$$\text{縮尺}=\frac{1[\mathrm{rad/sec}]}{\text{阻止域先端角周波数}\ \omega_S[\mathrm{rad/sec}]}$$

となり、

正規化角周波数＝生角周波数×縮尺

です。例えば、通過域端周波数 f_P[Hz]の正規化角周波数 ω_P は、

$$\omega_P = 2\pi f_P \bullet \frac{1}{2\pi f_S} = \frac{f_P}{f_S}[\mathrm{rad/sec}] \quad ・・・6ー①$$

です。

(2) Ωs の提示

ユーザーが指定した阻止域先端周波数 f_S [Hz]を通過域端周波数 f_P [Hz]で割ったもの、

$$\frac{阻止域先端周波数\ f_S[\mathrm{Hz}]}{通過域端周波数\ f_P[\mathrm{Hz}]}$$

を Ω_S（ラージオメガエス）と呼びます。

この値を、参考値として表示して置きます。フィルターの鋭さの指標です。小さいほど鋭いフィルターです。

(3) 次数の計算と提示

次数 n を求め、ユーザーに提示しなければなりません。係数 b と n の求め方は以下の通りです。

インチェビは、正規化角周波数 1 の場所で、阻止域に突入するとして設計します。正規化角周波数 1 の場所での減衰量は､周波数伝達関数の絶対値の 2 乗､略して 2 乗 ω 特の式、

$$\frac{b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2}{b^2\left\{\cos\left(n\cos^{-1}\frac{1}{\omega}\right)\right\}^2+1}$$

の ω に 1 を代入して、

$$\frac{b^2\{\cos(n\cos^{-1}1)\}^2}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}1)\}^2+1} = \frac{b^2\{\cos(n\bullet 0)\}^2}{b^2\{\cos(n\bullet 0)\}^2+1} = \frac{b^2(\cos 0)^2}{b^2(\cos 0)^2+1} = \frac{b^2}{b^2+1} \quad ・・・6ー②$$

となります。周波数伝達関数の絶対値（2 乗しない ω 特）は、

$$\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$$

となります。b は必ず正の数なので、上式の展開が許されます。したがって阻止域最小減衰値、つまり A_S [dB]を表す式は、

$$A_S = -20\log_{10}\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$$

$$= -20\{\log_{10} b - \log_{10}(b^2+1)^{0.5}\}$$

$$= -20\{\log_{10} b - 0.5\log_{10}(b^2+1)\}$$

$$= -20\log_{10} b + 10\log_{10}(b^2+1)$$

$$= 10\{\log_{10}(b^2+1) - 2\log_{10} b\}$$

$$= 10\{\log_{10}(b^2+1) - \log_{10} b^2\}$$

$$= 10\log_{10}\frac{b^2+1}{b^2}$$

$$= 10\log_{10}\left(1+\frac{1}{b^2}\right) \quad ・・・6－③$$

となります。これを b について解きますと、

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{A_S}{10}$$

$$1+\frac{1}{b^2} = 10^{\frac{As}{10}}$$

$$\frac{1}{b^2} = 10^{\frac{As}{10}} - 1$$

$$b^2\left(10^{\frac{As}{10}} - 1\right) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{10^{\frac{As}{10}} - 1}$$

となりますが、b は負の値にならないので、

$$b = \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{As}{10}} - 1}} \quad ・・・6－④$$

となります。

こうして b を求めることが出来ました。b は、阻止域先端正規化角周波数 1 [rad/sec]の位置での減衰を決定します。

次に n を求めます。通過域許容最大減衰量 A_P[dB]と、通過域端正規化角周波数 ω_P の関係は、

$$A_P = -20\log_{10}\sqrt{\frac{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}{b^2\left\{\left(\cosh(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1}}$$

$$= -20\log_{10}\frac{b\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}}{\sqrt{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1}}$$

$$= -20\left[\log_{10} b\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\} - \log_{10}\left\langle b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1\right\rangle^{0.5}\right]$$

$$= -20\left[\log_{10} b\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\} - 0.5\log_{10}\left\langle b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1\right\rangle\right]$$

$$= -20\log_{10} b\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\} + 10\log_{10}\left[b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1\right]$$

$$= 10\left[\log_{10}\left\langle b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1\right\rangle - 2\log_{10} b\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}\right]$$

$$= 10\left[\log_{10}\left\langle b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1\right\rangle - \log_{10}\left\langle b\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}\right\rangle^2\right]$$

$$= 10\log_{10}\frac{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2+1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}$$

$$= 10\log_{10}\left[1+\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}\right] \quad ・・・6－⑤$$

となります。この式を n について解きますと、

$$\log_{10}\left[1+\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}\right]=\frac{A_P}{10}$$

$$1+\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}=10^{\frac{A_P}{10}}$$

$$\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2\left(10^{\frac{A_P}{10}}-1\right)=1$$

$$b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2=\frac{1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

$$\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2=\frac{1}{b^2\left(10^{\frac{A_P}{10}}-1\right)}$$

になります。先ほど計算しました、$b^2=\frac{1}{10^{\frac{As}{10}}-1}$ を代入し、

$$\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2=\frac{1}{\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{10^{\frac{A_S}{10}}-1}}=\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

$$\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)=\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}=\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}\quad\cdot\cdot\cdot 6-⑥$$

$$n=\frac{\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}}{\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}}$$

となります。これが次数 n です。n は小数で出ますが、小数の次数は作れないので、切り上げて整数にします。

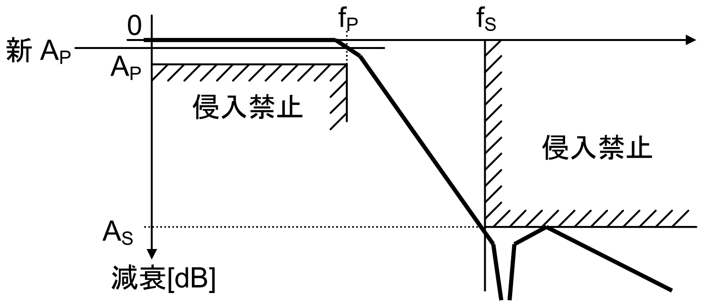
小数の n および、整数に切り上げた n の値を画面に提示します。n を切り上げることによりユーザーの要求仕様に影響を与えます。以下の様にして判断を仰ぎます。

(4) 新 A_P の提示

6ー②式から分る様に、ω_S＝1[rad/sec]での減衰量は n に無関係です。b のみで決まる量です。n が整数に切り上げられても変わりません。整数に切り上げられて変わるのは、ω_S までの減衰の角度です。

ω_S までの減衰角度が急になる為、ユーザー指定の通過域端 f_P [Hz]より高い周波数でユーザー指定の減衰量 A_P [dB]地点を通過します。f_P では、A_P よりも小さくなります。

切り上げられた n を使用した場合の、f_P での減衰量を、「入力と同じ f_S、A_S を使用すると、A_P は小さくなります。」として提示する必要があります。



その値は、6ー⑤式に 6ー④式の b の値と、整数の n を代入することにより求めます。6ー⑤式を再掲します。

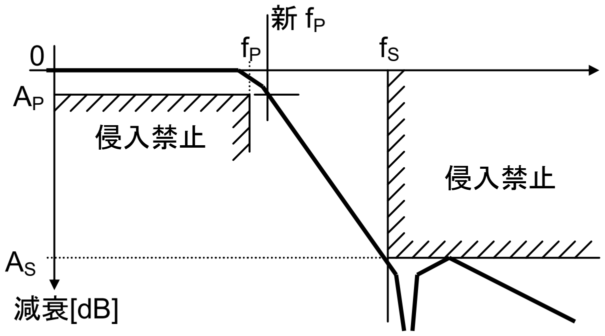
$$新A_P=10\log_{10}[1+\frac{1}{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P})\}^2}]$$

n：整数の n $\qquad \omega_P=2\pi f_P\bullet\frac{1}{2\pi f_S}=\frac{f_P}{f_S}[rad/sec]$

(5) 新 Ω_S の提示

(4)にも書きました通り、整数の n を採用すると ω_P は ω_S に接近します。

整数の n で、ユーザー仕様と同じ A_P、A_S を使用する場合、必ず小さくなる Ω_S の値を提示します。Ω_S とは、$\dfrac{\text{阻止域先端周波数 fs[Hz]}}{\text{通過域端周波数 fp[Hz]}}$ のことです。



通過域許容最大減衰値 A_P[dB]と、阻止域許容最小減衰量 A_S[dB]を、ユーザー仕様と同じにした場合、整数の n での正しい Ω_S の値を求めます。

その方法は、整数の n で、ユーザー仕様の A_P と同じになる ω_P を求めます。6－⑥式を変形します。

$$n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}=\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}=\frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}}{n}$$

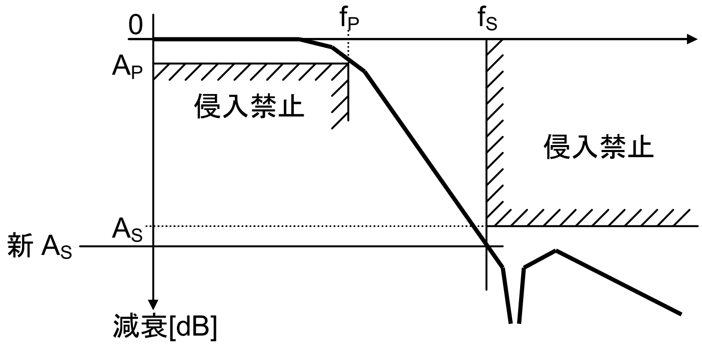
$$\frac{1}{\omega_P}=\cosh\frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}}{n}$$

6－①式で、$\omega_P=\dfrac{f_P}{f_S}$ であることが分っています。したがって、$\dfrac{1}{\omega_P}$ は Ω_S になります。この値を「A_P、A_S が仕様通りなら、Ω_S はここまで下げられます。」として提示します。あるいは具体的に新 f_P を表示するか、スケーリングの技術を用いて f_P を仕様通りにした場合の新 f_S を表示しても良いと思われます。

(6) 新 A_S の提示

整数の n を採用すると減衰角度がきつくなります。阻止域先端 ω_S での減衰量は小数の n の場合と同じですが、通過域端 ω_P における減衰量 A_P はユーザー仕様より小さくなります。

通過域端 ω_P における減衰量 A_P と Ω_S をユーザー仕様通りに抑えるためには、阻止域許容最小減衰量 A_S を大きくする必要があります。



新しい阻止域許容最小減衰値 A_S の値を求めるには以下のようにすれば良いです。6−⑤式を b^2 について解きますと、

$$10\log_{10}\left[1+\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}\right]=A_P$$

$$\log_{10}\left[1+\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}\right]=\frac{A_P}{10}$$

$$1+\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}=10^{\frac{A_P}{10}}$$

$$\frac{1}{b^2\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2}=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

$$b^2\left(\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right)^2=\frac{1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

$$b^2=\frac{1}{\left(10^{\frac{A_P}{10}}-1\right)\left(\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right)^2}$$

になります。この b^2 の値を 6－③式に代入して ω＝1 での減衰を求めますと

$$\begin{aligned}A_S&=10\log_{10}\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\\&=10\log_{10}\left[1+\left(10^{\frac{A_P}{10}}-1\right)\left\{\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{1}{\omega_P}\right)\right\}^2\right]\end{aligned}$$

になります。これが通過域端減衰量 A_P と Ω_S をユーザー仕様通りに抑えるための阻止域先端減衰量 A_S です。この値を「A_P、Ω_S が仕様通りなら、A_S はこうなります。」と提示して、ユーザーの判断を仰ぎます。

8、フィルターの設計その 2(具体設計)

ユーザーとのやり取りで仕様が固まりましたら、正しい n と b で因数分解を行い、正規化角周波数 ω_S＝1 [rad/sec]で 1 次や 2 次の伝達関数を作成します。

伝達関数を実現する回路を決め、角周波数 ω_S＝1 [rad/sec]での回路素子値を求めます。

実周波数への縮尺を求め、回路素子値の実周波数へのスケーリングを行います。

さらに回路素子値の実用値へのスケーリングを行います。

目次へ戻る