フルビッツ多項式とリアクタンス関数　　　　　２０１８年５月３日　　　　[目次へ戻る]

伝達関数分母はフルビッツ多項式です。

フルビッツ多項式とは、＝0 と置き方程式にした時、虚軸を含んだ複素平面右半面に根（解）を持たない式です。根はすべて虚軸を含まない複素平面左半面にあります。

フルビッツ多項式の偶関数部と奇関数部の比はリアクタンス関数になります。本章ではその理由を探ります。

1、周波数伝達関数の分母 ω の根

周波数伝達関数は伝達関数を作る際に使用し、正規化された入力角周波数と入出力間利得の関係を表したものです。伝達関数の一つ手前の式であり、この分母を＝0 と置いた時、分母の式には 2 個 1 組の純虚数根、4 個 1 組の複素共役根しか無いです。

周波数伝達関数分母は、元関数を 2 乗し 1 を加えた偶関数です。横軸（XY 座標の場合の X 軸）を切ることの無い、横軸から浮いて上に開いている偶関数を因数分解したため、実根はありません。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

2、伝達関数の分母 s の根

因数分解された周波数伝達関数の ω の根を、90 度反時計式に回転したものです。したがって実根と複素共役根しかありません。さらに複素平面の右側の根を除いたものです。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

3、伝達関数の分母

上記により伝達関数の分母 s の根は、虚軸を除いた複素平面の左半面に存在します。根の実数部は負です。これらの根から出来る因数は、根の実数部を a 虚数部を b として、

①、実根の場合、$s-(-a)=s+a$

②、共役複素根の場合、$\{s-(-a-jb)\}\{s-(-a+jb)\}=(s+a+jb)(s+a-jb)=s^2+2as+(a^2+b^2)$

の二種類になります。①の 1 次の因数が有る場合と無い場合がありますが、因数には負号の項がありません。これらの因数をいくつか掛け合わせて出来る、伝達関数の分母多項式は、

$$\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\alpha_{n-2}s^{n-2}+\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\alpha_1 s+\alpha_0$$

になります。α_n から α_0 までの全ての係数が正の実数であり、s^n から α_0 までに欠項はありません。全係数が正で欠項の無い多項式を、フルビッツ多項式と呼びます。

4、フルビッツ多項式の s に jω

フルビッツ多項式内の偶関数部と奇関数部の比は、リアクタンス関数になります。この理由を探る為に、フルビッツ多項式の性質を見ます。

フルビッツ多項式の例として、3 次バタワースフィルターの伝達関数分母 G(s)を使います。伝達関数分母の根は－1、$-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$、$-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$ の 3 つです。虚軸を含まない、複素平面左半面の根です。伝達関数分母 G(s)は、

$$G(s)=\{s-(-1)\}\left\{s-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{s-\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$=(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=(s+1)(s^2+s+1)$$
$$=s^3+2s^2+2s+1$$

になります。

伝達関数の分母が G(s)である回路に、最大値 V_m 角周波数 ω の正弦波、$V_m\sin\omega t$ を入力します。正弦波の振幅 V_m は、伝達関数分母 G(s)の s に＋jω または－jω を代入した複素数、G(＋jω) または G(－jω)の絶対値倍にされて出力されます。また正弦波の位相は、複素数 G(＋jω)の偏角と同じ角度回り出力されます。G(－jω)の偏角とは反対で同じ角度回り出力されます。「s＝jω とは何か」の章を御参照下さい。

上の式では括弧が無くなるまで式を展開しましたが、式を展開しないほうが、フルビッツ多項式の理解につながります。展開しない伝達関数分母 G(s)の s に、純虚数の値 jω を j0 から j∞（直流～角周波数無限）を代入し、複素数 G(＋jω)を求めて見ます。j0 を代入しますと、

$$G(j0)=\{j0-(-1)\}\left\{j0-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{j0-\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$=(1+j0)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

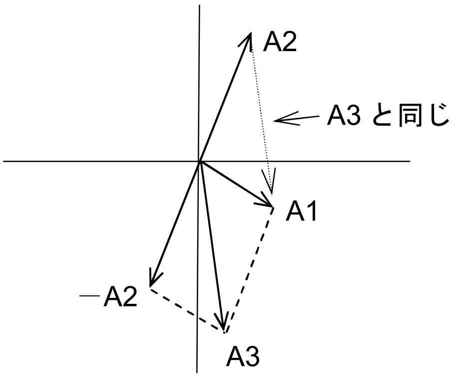
になります。上式 1 行目に引き算が在ります。引き算は、引く数にいくつ加えると引かれる数になるかが出ます。例えば複素数 A1 と複素数 A2 があり A1－A2 を求める場合、

A1－A2＝A1＋(－A2)＝A3

A1＝A2＋A3

になります。A2 に A3 を加えますと A1 になります。引き算の結果である A3 は、引く数

A2 から引かれる数 A1 までの距離です。下図の様になります。

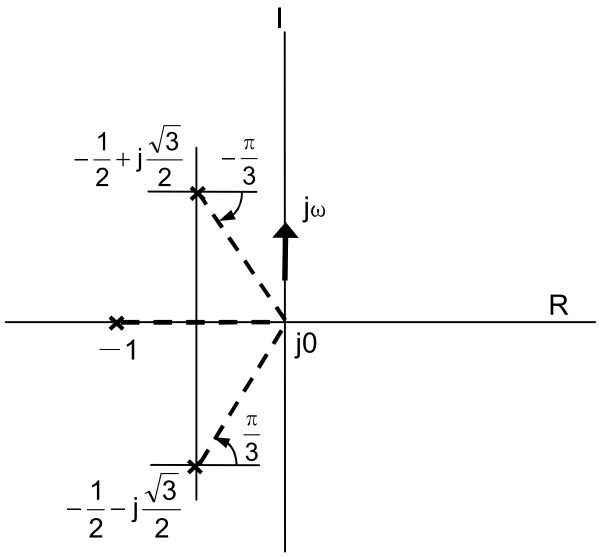


引き算の結果である 2 行目括弧内の距離を表す複素数を、それぞれ極形式に直しますと、

$$
\begin{aligned}
&=(1\angle 0)\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\angle -\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\angle \frac{\pi}{3}\right)\\
&=(1\angle 0)\left(1\angle -\frac{\pi}{3}\right)\left(1\angle \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

になります。角度はラジアンです。

それぞれの括弧内複素数は、右図の様に各根から j0 までの距離を表しています。



点線が、それぞれの距離の複素数です。極形式複素数の掛け算は、絶対値を掛け合わせ、偏角を足し合わせますので、

$$
=1\angle\left(0-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)
$$

$$= 1\angle 0$$
$$= 1 + j0$$

になります。G(j0)は、実数部 1 虚数部 0 になり、正の実軸上にあります。展開しないフルビッツ多項式の s に j0 を代入した値は、根から j0 までの距離の絶対値を全て掛け合わせ、根から j0 までの偏角を全て足し合わせたものになります。

jω が増え、例えば $j\frac{1}{2}$ の時は、

$$G\left(j\frac{1}{2}\right) = \left\{j\frac{1}{2} - (-1)\right\}\left\{j\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{j\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$= \left(1 + j\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

になります。引き算の結果である距離を表す括弧内の複素数を、それぞれ極形式に直しますと、

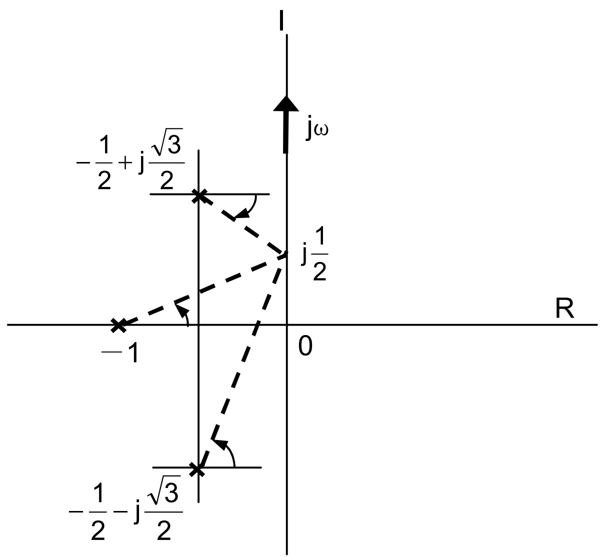
$$= \left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\angle 0.463648\right)\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}\angle -0.631914\right)$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}\angle 1.219917\right)$$

$$= (1.118034\angle 0.463548)(0.619657\angle -0.631914)(1.454656\angle 1.219917)$$

になります。角度はラジアンです。

それぞれの括弧内複素数は、右図の様に各根から $j\frac{1}{2}$ までの距離を表しています。



点線が、それぞれの距離の複素数です。極形式複素数の掛け算は、絶対値を掛け合わせ、偏角を足し合わせますので、

$$
\begin{aligned}
&= 1.007782 \angle 1.051551 \\
&= 0.500087 + j0.874950
\end{aligned}
$$

になります。$G\left(j\frac{1}{2}\right)$の値は実数部が正、虚数部も正ですから、第 1 象限にあります。

ここまでの結果から、G(s)に代入する虚数値 jω を j0 から j∞へ増大させて行く時、偏角について以下のことが分かります。

①、−1 の根からの偏角は増加のみです。

②、$-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$ の根からの偏角も増加のみです。

③、②の$-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$ の根からの偏角が増加しますと、$-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ の根からの偏角は負の値が減少し、2 つの偏角の和は増加です。

④、jω が $j\frac{\sqrt{3}}{2}$ を超えますと、$-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ の根からの偏角も増加に転じます。

⑤、jω を増大させますと、全体の偏角は増加するだけで減少することはありません。

⑥、jω が j∞になりますと全体の偏角は、$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ の手前までです。

G(j0)は実軸上の 1 からスタートします。この時、偏角の合計は 0[rad]です。G(j0)の虚数部は 0 です。

本章の 3 に書きました通り、フルビッツ多項式には欠項がありません。G(j0)は必ず s の 0 次の項、つまり実軸上の値からスタートします。

jω が増加しますと、偏角合計が増え G(jω)の虚数部が正になり、第 1 象限に入ります。

偏角の合計が$\frac{\pi}{2}$[rad]になりますと、G(jω)は正の虚軸上に来ます。その時 G(jω)の実数部は 0 です。

jω が増加しますと、偏角合計が増え G(jω)の実数部が負になり、第 2 象限に入ります。

偏角の合計が π [rad]になりますと、G(jω)は負の実軸上に来ます。その時 G(jω)の虚数部は 0 です。

jω が増加しますと、偏角合計が増え G(jω)の虚数部が負になり、第 3 象限に入ります。

偏角の合計は、$\frac{3\pi}{2}$[rad]には届きません。したがって負の虚軸は通過しません。

5、フルビッツ多項式 s にーjω

ここまでは代入する jω を j0 から j∞へ増大させて行きましたが、j0 からーj∞の方へ動かし、複素数 G(ーjω)を求めて見ます。G(j0)は先程行いました。

例えば s が $-j\frac{1}{2}$ の時は、

$$G\left(-j\frac{1}{2}\right)=\left\{-j\frac{1}{2}-(-1)\right\}\left\{-j\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{-j\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$=\left(1-j\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

になります。引き算の結果である 2 行目括弧内の距離を表す複素数を、それぞれ極形式に直しますと、

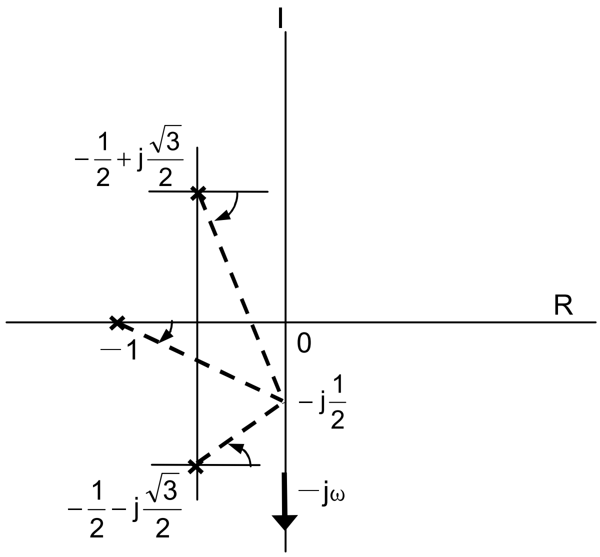
$$=\left(\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\angle-0.463648\right)\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}\angle-1.219917\right)$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}\angle0.631914\right)$$

$$=(1.118034\angle-0.463548)(0.619657\angle-1.219917)(1.454656\angle0.631914)$$

になります。角度はラジアンです。

それぞれの括弧内複素数は、右図の様に各根から $-j\frac{1}{2}$ までの距離を表しています。



点線が、それぞれの距離の複素数です。極形式複素数の掛け算は、絶対値を掛け合わせ、偏角を足し合わせますので、

$$
\begin{aligned}
&= 1.007782\angle -1.051551 \\
&= 0.500087 - j0.874950
\end{aligned}
$$

になります。$G\left(-j\frac{1}{2}\right)$の値は第 4 象限にあります。$G\left(j\frac{1}{2}\right)$の時と比べますと、大きさの絶対値は同じですが、偏角が負になっています。偏角の絶対値は同じです。

展開しないフルビッツ多項式にーjω を代入した値は、根からーjω までの距離の絶対値を全て掛け合わせ、根からーjω までの偏角を全て足し合わせたものになります。

ここまでの結果から、G(s)に代入する虚数値を j0 からーj∞へマイナス方向に増大させて行く時、偏角について以下のことが分かります。

①、ー1 の根からの偏角はマイナス方向への増加のみです。

②、$-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$の根からの偏角もマイナス方向への増加のみです。

③、②の$-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$の根からの偏角がマイナス方向へ増加すると、$-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$の根からの偏角はプラスの値が減少し、2 つの偏角の和はマイナス方向への増加です。

④、虚数値がー$j\frac{\sqrt{3}}{2}$を超えると、$-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$の根からの偏角もマイナス方向への増加に転じます。

⑤、－jω を増大させますと、全体の偏角はマイナス方向へ増加するだけで、プラス方向へ動くことはありません。

⑥、ーj∞になりますと、全体の偏角は$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2}$の手前までです。

G(j0)は実軸上の 1 からスタートします。この時、偏角の合計は 0[rad]です。G(j0)の虚数部は 0 です。

本章の 3 に書きました通り、フルビッツ多項式には欠項がありません。G(j0)は必ず s の 0 次の項、つまり実軸上の値からスタートします。

ーjω が増加しますと、偏角合計が増え G(ーjω)の虚数部が負になり、第 4 象限に入ります。

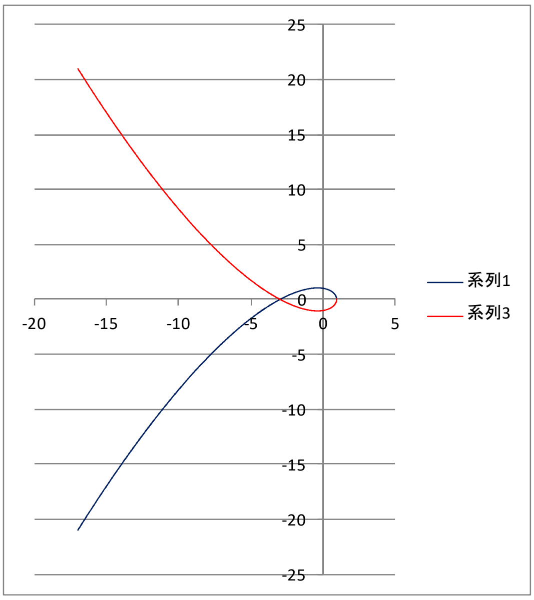
偏角の合計がー$\frac{\pi}{2}$[rad]になりますと、G(jω)は負の虚軸上に来ます。その時 G(ーjω)の実数部は 0 です。

$-j\omega$ が増加しますと、偏角合計が増え G(−jω)の実数部が負になり、第 3 象限に入ります。
偏角の合計が$-\pi$ [rad]になりますと、G(−jω)は負の実軸上に来ます。その時 G(−jω)の虚数部は 0 です。
$-j\omega$ が増加しますと、偏角合計が増え G(−jω)の虚数部が正になり、第 2 象限に入ります。
偏角の合計は、$-\dfrac{3\pi}{2}$ [rad]には届きません。したがって正の虚軸は通過しません。

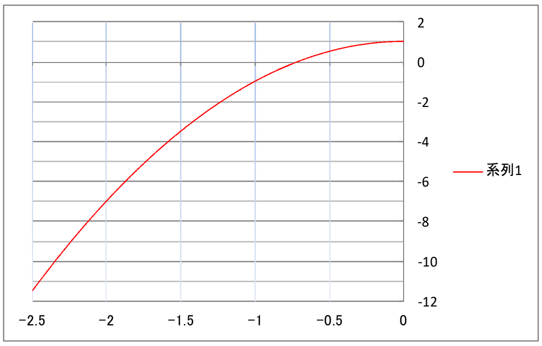
6、フルビッツ多項式の性質
以上の結果をまとめますと、

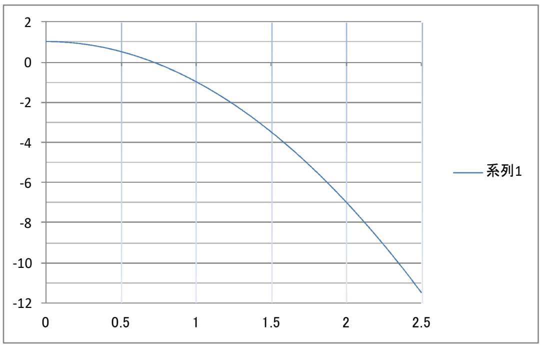
①、フルビッツ多項式の根は、虚軸を含まない複素平面左側の実根または複素共役根です。
②、フルビッツ多項式の虚軸上の値 G(jω)または G(−jω)の偏角の合計は、G(jω)の時はプラス方向への増加、G(−jω)の時はマイナス方向への増加しかありません。
③、jω および−jω が 0 で G(j0)が実軸に居る時、G(j0)の虚数部は 0 です。
④、jω および−jω の増加と共に、G(jω) および G(−jω)は回転を始めます。
⑤、正の虚軸を通過する時、G(jω)の実数部は 0 です。負の虚軸を通過する時、G(−jω)の実数部は 0 です。
⑥、負の実軸を通過する時、G(jω)の虚数部は 0 です。負の実軸を通過する時、G(−jω)の虚数部は 0 です。
⑦、jω または−jω の増加で回転が進み、G(jω)、G(−jω)実数部の 0 と G(jω)、G(−jω)虚数部の 0 は、交互に現れます。
⑧、回転は、jω の時$\dfrac{\pi}{2}\times$根の数、−jω の時$(-\dfrac{\pi}{2})\times$根の数までです。

下図は、ナイキスト線図や、ベクトル軌跡と呼ばれているグラフです。3 次バタワースフィルターの伝達関数分母を G(s)として使用しました。青が G(jω)です。jω を j0 から j3 まで変化させ、各 jω での G(jω)値を複素平面上に、点打ちして行った時の軌跡です。横軸は実数値、縦軸は虚数値です。スタート位置は G(j0)で、実軸上の 1 です。最後は G(j3)です。反時計回りの、ゆるいらせん状になっています。
赤は G(−jω)の場合です。−j3 まで変化させました。時計回りになります。虚軸や実軸を通過する時の jω と−jω の絶対値は同じです。

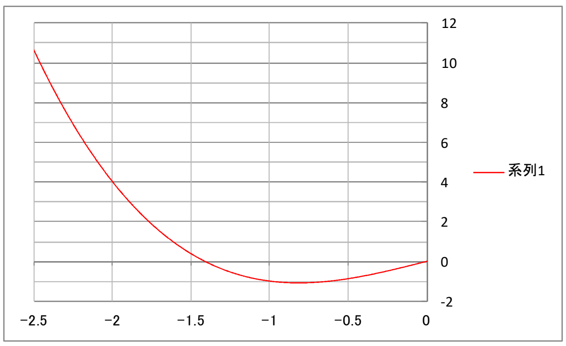


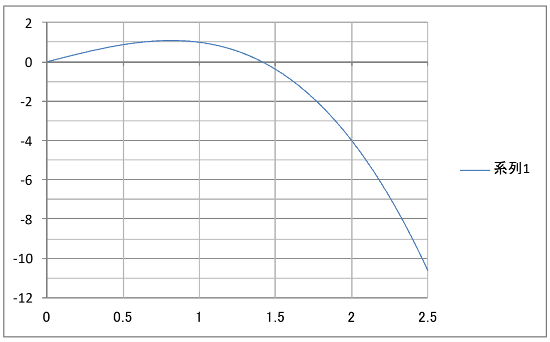
下左図は G(ーjω)の実数部です。下右図は G(jω)の実数部です。横軸が jω、縦軸が実数値です。G(ーjω)はーj0.7 付近で、G(jω)は j0.7 付近で 0 になっています。虚軸通過です。



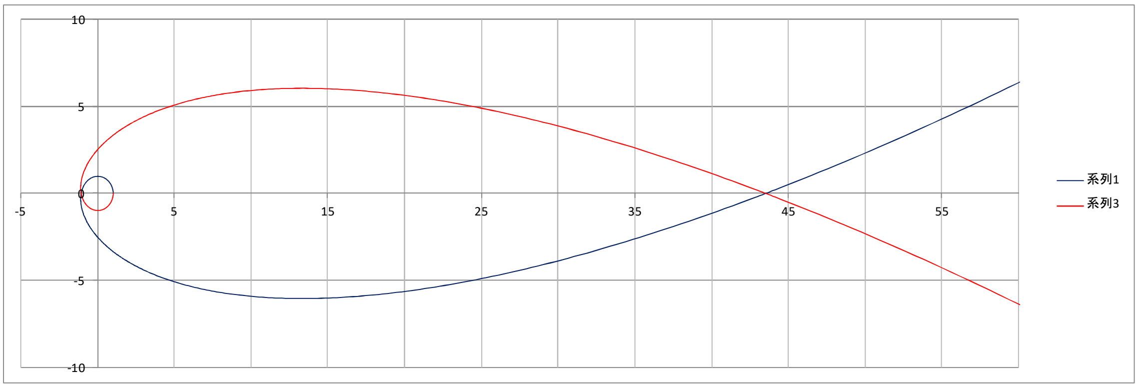


下左図は、G(ーjω)の虚数部です。下右図は G(jω)の虚数部の値です。横軸が jω、縦軸が虚数値です。G(ーjω)は j0 とーj1.4 付近で、G(jω)は j0 と j1.4 付近で 0 になっています。実軸通過です。





　フルビッツ多項式の例として 3 次バタワースフィルターの伝達関数分母を使用しましたが、複素共役根の増えた高次のフルビッツ多項式でも考え方はおなじです。
　高次のフルビッツ多項式の場合は、偏角の和が大きくなり、ナイキスト線図のらせんの回転が多くなります。その為、実数部の 0 になる回数および虚数部の 0 になる回数が増えます。
　下図は 5 次バタワースフィルター伝達関数分母のナイキスト線図です。偏角の合計は $\frac{5\pi}{2}$ ＝2.5π[rad]の手前です。一周と少しです。



7、伝達関数の展開
　ここまでは、フルビッツ多項式である 3 次バタワースフィルターの伝達関数分母を展開しないで使いましたが、式を展開しますと、2 ページで行いました様に、

$$G(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

となります。展開した G(s)の s に純虚数を代入し、虚軸上の値 G(jω)および G(−jω)を求めますと、

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1 \\ &= -j\omega^3 - 2\omega^2 + j2\omega + 1 \\ &= 1 - 2\omega^2 + j(2\omega - \omega^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(-j\omega) &= (-j\omega)^3 + 2(-j\omega)^2 + 2(-j\omega) + 1 \\ &= j\omega^3 - 2\omega^2 - j2\omega + 1 \\ &= 1 - 2\omega^2 - j(2\omega - \omega^3) \end{aligned}$$

になります。展開した G(s)に jω またはーjω を代入しますと、s の偶数乗の項では j が消え実数になります。また s の奇数乗の項では j が残り虚数になります。

j0～j∞または j0～ーj∞を代入した時、偶数乗の項が作り出す実数部と、奇数乗の項が作り出す虚数部を持つ、複素数が出来ます。

展開しない G(s)で、複素数の掛け算による虚軸への回転が作り出した実数部の 0 は、展開した G(s)では偶数乗の項つまり偶関数部が作ります。

G(jω) または G(ーjω)の実数部が 0 になるのは、G(s)の偶関数部が 0 になることと同じです。

展開しない G(s)で、複素数の掛け算による実軸への回転が作り出した虚数部の 0 は、展開した G(s)では奇関数部が作ります。

G(jω) または G(ーjω)の虚数部が 0 になるのは、G(s)の奇関数部が 0 になることと同じです。

3 次バタワースフィルターの伝達関数分母、

$$G(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

から s の偶数乗の項を取り出し、＝0 と置いて見ますと、

$$\begin{aligned}
&2s^2 + 1 = 0 \\
&2s^2 = -1 \\
&s^2 = -\frac{1}{2} \\
&s = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \\
&s = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{2}} \\
&s = \pm j\sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

になります。G(s)の実数部を 0 にする s は、虚軸上の値つまり純虚数の $\pm j\sqrt{\frac{1}{2}}$ になります。

この結果は、8 ページの実数部のグラフと一致しています。フルビッツ多項式の実数部が 0 になるのは、回転して虚軸上に乗るところでもあり、純虚数値を代入した時フルビッツ多項式の s の偶数乗の項が 0 になるところでもあります。

G(s)から s の奇数乗の項を取り出し、＝0 と置いて見ますと、

$$s^3+2s=0$$
$$s(s^2+2)=0$$
$$\therefore s=0 \text{ または } s^2+2=0$$
$$s^2+2=0$$
$$s^2=-2$$
$$s=\pm\sqrt{-2}$$
$$s=\pm\sqrt{-1}\sqrt{2}$$
$$s=\pm j\sqrt{2}$$

$$\therefore s=0 \text{ または } s=\pm j\sqrt{2}$$

になります。G(s)の虚数部を 0 にする s は、0 または虚軸上の値つまり純虚数の$\pm j\sqrt{2}$になります。この結果は、8 ページの虚数部のグラフと一致しています。フルビッツ多項式の虚数部が 0 になるのは、回転して実軸上に乗るところでもあり、0 を含む純虚数値を代入した時、フルビッツ多項式の s の奇数乗の項が 0 になるところでもあります。

8、リアクタンス関数

　リアクタンス関数の定義をいくつか書きますと、以下の通りです。

①、分子と分母の次数の違いは高々1 です。

②、虚軸上の極と零点は、交互に存在します。

③、極と零点は虚軸上にあり 1 次です。

④、有理関数の奇関数です。

　フルビッツ多項式を分解して、$\dfrac{\text{sの奇数乗の項}}{\text{sの偶数乗の項}}$ または $\dfrac{\text{sの偶数乗の項}}{\text{sの奇数乗の項}}$ の分数を作った場合、フルビッツ多項式には欠項がありませんから、分数の分子と分母の次数の違いは高々1 です。

　フルビッツ多項式で虚数部が 0 になるのと、実数部が 0 になるのとは、jω またはーjω が増加する時、らせん状に起きるのでした。上記分数の極（分母を＝0 と置いた時の根）と零点（分子を＝0 と置いた時の根）は、交互です。

　虚軸または実軸の通過の仕方は突き進んで行く形です。接して後戻りと言うことはありません。したがって分母の根も、分子の根も一次です。

　偶数乗の項は偶関数です。奇数乗の項は奇関数です。偶関数と奇関数で作る分数は奇関数です。有理関数の奇関数です。

　したがって、この分数はリアクタンス関数です。

目次へ戻る