周波数変換の例　　　　　　　　　　　　　　　　2009 年 10 月 14 日　　目次へ戻る

2025.2.24　訂正

1、低域通過伝達関数の要素

低域通過のバタワースフィルター、チェビシェフフィルター、逆チェビシェフフィルター、そして連立チェビシェフフィルターに使われている伝達関数を要素にばらしますと、

定数、

$$H$$

と、1 次の低域通過伝達関数、

$$\frac{a_0}{s+a_0}$$

と、2 次の低域通過伝達関数、

$$\frac{b_0}{s^2+b_1s+b_0}$$

と、零点を持つ場合のノッチ(notch)要素、

$$\frac{s^2+c_0}{c_0}$$

になります。分子の a_0 、b_0 、分母の c_0 は共に s=jω=0 または s=－jω=0、つまり直流入力時に伝達関数の利得を 1 にする為のものです。

各低域通過フィルターに使われている伝達関数は、上記各要素の直列（cascade）接続で実現出来ます。それぞれについて、簡単な説明を行います。

(1) 1 次の低域通過伝達関数

1 次の低域通過伝達関数の式は、

$$\frac{a_0}{s+a_0}=\frac{a_0}{a_0(1+\frac{s}{a_0})}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}$$

と変形出来ます。

このように変形しますと、a_0 と同じ角周波数を持ち、その大きさを 1 とする正弦波が入力された場合のことが良く分ります。ja_0 および $-ja_0$ が、伝達関数の s に代入され、

$$\left[\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}\right]_{s=ja_0}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}ja_0}=\frac{1}{1+j}$$

$$\left[\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}\right]_{s=-ja_0}=\frac{1}{1-\frac{1}{a_0}ja_0}=\frac{1}{1-j}$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されます。

$$\sqrt{\frac{1}{1+j}\bullet\frac{1}{1-j}}=\sqrt{\frac{1}{1-j+j-(-1)}}=\sqrt{\frac{1}{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ・・・1－①$$

です。この式になる訳は、「s＝jω とは何か」の章を御参照下さい。

次に、a_0 に d という係数が付いた場合を考えます。つまり a_0 を変化させます。

$$\frac{1}{1+\frac{1}{da_0}s}$$

1－①式と同じ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の出力が出るのは、a_0 に付いた d という係数を打ち消す、da_0 という角周波数を持った正弦波の入力時です。

1 次の低域通過伝達関数の式は a_0 をいじることにより、周波数伝達関数のグラフで、折れ曲がりの形を変えずに、それが起こる角周波数のみを変化させることが可能です。

(2) 2 次の低域通過伝達関数

2 次の低域通過伝達関数を、次のように変形します。

$$\frac{b_0}{s^2+b_1s+b_0}=\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}$$

ここで ${\omega_0}^2$＝b_0 ですから、$\omega_0=\sqrt{b_0}$ 、$Q=\frac{\omega_0}{b_1}=\frac{\sqrt{b_0}}{b_1}$ です。

このように変形しますと、ω_0 と同じ角周波数を持ち、その大きさを 1 とする正弦波が入力された時のことが良く分ります。$j\omega_0$ および$-j\omega_0$ が、伝達関数の s に代入され、

$$\left[\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}\right]_{s=j\omega_0}=\frac{{\omega_0}^2}{-{\omega_0}^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega_0+{\omega_0}^2}=\frac{{\omega_0}^2}{\frac{j{\omega_0}^2}{Q}}=\frac{Q}{j}=-jQ$$

$$\left[\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}\right]_{s=-j\omega_0}=\frac{{\omega_0}^2}{-{\omega_0}^2-\frac{\omega_0}{Q}j\omega_0+{\omega_0}^2}=\frac{{\omega_0}^2}{\frac{-j{\omega_0}^2}{Q}}=\frac{Q}{-j}=jQ$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されます。

$$\sqrt{-jQ\bullet jQ}=\sqrt{Q^2}=Q$$

です。ω_0 と無関係に、Q だけで出力が決定される様子が分ります。

この伝達関数は ω_0 をいじることにより、折れ曲がりの形を変えずに、それが起こる角周波数のみを変化させることが可能です。

(3)ノッチ要素

この式は、次のように変形出来ます。

$$\frac{s^2+c_0}{c_0}=\frac{c_0\left(1+\frac{1}{c_0}s^2\right)}{c_0}=1+\frac{1}{c_0}s^2=1+\frac{1}{{\omega_z}^2}s^2$$

ここで、${\omega_z}^2=c_0$　ですから、$\omega_z=\sqrt{c_0}$ です。

このように変形しますと、ω_z と同じ角周波数を持ち、その大きさを 1 とする正弦波が入力された時のことが良く分ります。$j\omega_z$ および $-j\omega_z$ が、伝達関数の s に代入され、

$$\left[1+\frac{1}{{\omega_z}^2}s^2\right]_{s=j\omega_z}=1-\frac{1}{{\omega_z}^2}{\omega_z}^2=0$$

$$\left[1+\frac{1}{{\omega_z}^2}s^2\right]_{s=-j\omega_z}=1-\frac{1}{{\omega_z}^2}{\omega_z}^2=0$$

両者がかけ合わされ、その平方根が出力されます。

$$\sqrt{0\bullet 0}=0 \quad ・・・1－②$$

です。これが零点です。ここで、ω_z に e という係数が付いた場合を考えます。つまり、ω_z を動かします。

$$\frac{1}{1+\frac{1}{(e\omega_z)^2}s^2}$$

です。1ー②式と同じ0の出力が出るのは、ω_zに付いたeという係数を打ち消す$e\omega_z$と言う角周波数の入力時です。

この伝達関数はω_zをいじることにより、折れ曲がりの形を変えずに、それが起こる角周波数のみ変化させることが可能です。

目次へ戻る