周波数変換の例　　　　　　　　　　　　　　　　2009 年 10 月 14 日　　目次へ戻る

2、低域通過フィルターから高域通過フィルターへの変換

実際にＬＰＦからＨＰＦへの周波数変換を行ってみます。

(1) 1 次の低域通過伝達関数の変換

1 次の低域通過伝達関数は、

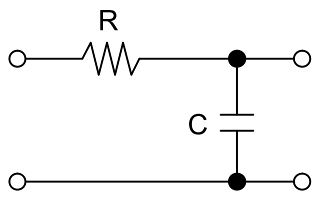
$$\frac{a_0}{s+a_0}$$

です。分子に付いている a_0 は、s=jω=0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にするための係数です。角周波数 0 での分母の値と同じものを分子に置けば、角周波数 0 で伝達関数の値は 1 になります。

変換前に式を、

$$\frac{a_0}{s+a_0}=\frac{a_0}{a_0\left(\frac{s}{a_0}+1\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s} \quad ・・・2-①$$

と変形しておきます。下記回路の伝達関数は、「s=jω とは何か」の章で検討しましたので、

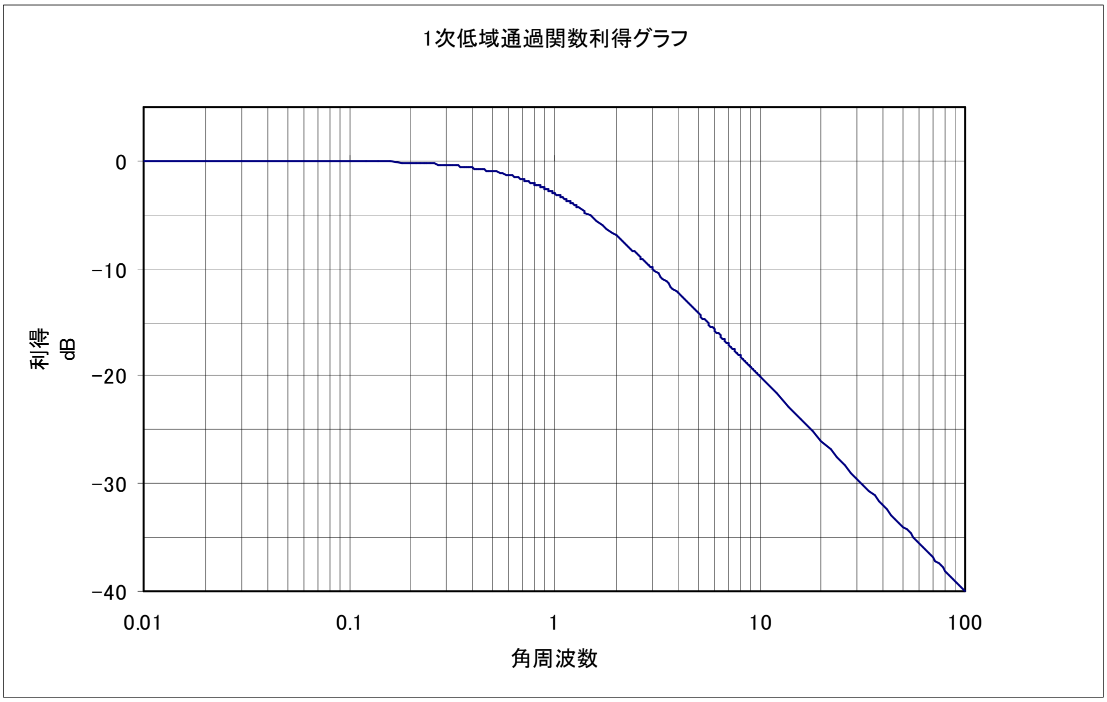


$$\frac{1}{1+sCR}$$

と分っております。この回路の C と R を、$CR=\frac{1}{a_0}$ とおけば 1 次の低域通過伝達関数、

$$\frac{a_0}{s+a_0}$$

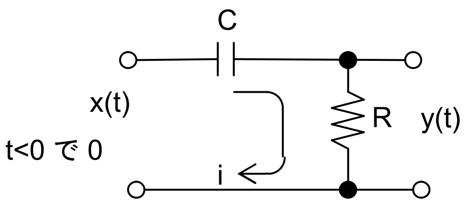
の回路となります。a_0 が 1 の場合の利得グラフを下に示します。s=jω と置き、各 ω での絶対値を求め、利得をデシベル計算したものです



2−①式を、高域通過伝達関数に変換するため、s を $\frac{1}{s}$ にしますと、

$$\left[\frac{1}{1+\frac{1}{a_0}s}\right]_{s=\frac{1}{s}} = \frac{1}{1+\frac{1}{a_0 s}} = \frac{s \bullet 1}{s\left(1+\frac{1}{a_0 s}\right)} = \frac{s}{s+\frac{1}{a_0}} \quad ・・・2−②$$

になります。この回路を実現するため、下の回路の伝達関数 G(s)を求めます。



回路に流れる電流を i とします。コンデンサーでの電圧降下 $\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t idt$ と、抵抗での電圧降下 Ri の和は、入力電圧 x(t)と等しく、

$$x(t) = \frac{1}{C}\int_0^t idt + Ri$$

が成り立ちます。また出力 y(t)は、抵抗での電圧降下と等しく、

$$y(t) = Ri$$

です。微分積分のある回路方程式はラプラス変換しますと、

$$X(s) = \frac{i(s)}{Cs} + Ri(s)$$

$$Y(s) = Ri(s)$$

になります。伝達関数は、$\frac{Y(s)}{X(s)}$ ですから、

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ri(s)}{\frac{i(s)}{Cs} + Ri(s)} = \frac{R}{\frac{1}{Cs} + R} = \frac{R}{R\left(1 + \frac{1}{sCR}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{sCR}} = \frac{s \bullet 1}{s(1 + \frac{1}{sCR})} = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}}$$

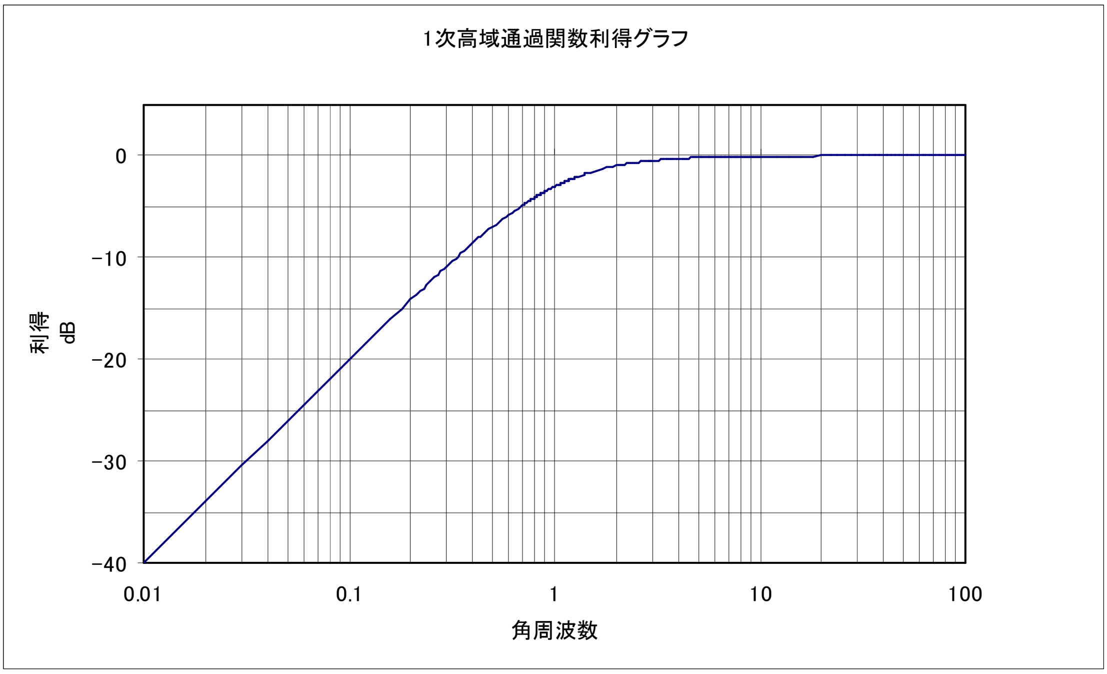
となります。1 次高域通過伝達関数である、2ー②式と同じ形をしています。2ー②式の $a_0 = CR$ であることが分ります。角周波数が大きな領域での出力の絶対値を求めるため、s に＋j∞を代入しますと、

$$\lim_{s \to j\infty} \frac{s}{s + \frac{1}{CR}} = \lim_{s \to j\infty} \frac{\frac{1}{s} \bullet s}{\frac{1}{s} \bullet \left(s + \frac{1}{CR}\right)} = \lim_{s \to j\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{sCR}} = 1$$

になります。答は実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求めるため、s にーj∞を代入するまでも無く、∞[rad/sec]での利得は 1 と分ります。

1 次の高域通過伝達関数は上図の回路で実現出来ます。

この関数の a_0 が 1 の場合の利得グラフを下に示します。s＝jω と置き、各 ω での絶対値を求め、利得をデシベル計算したものです



「周波数変換」の章で高域通過フィルター設計用の、正規化低域通過フィルターを設計しております。

1 次の低域通過伝達関数 a_0 の逆数の値を、1 次の高域通過伝達関数の a_0 の値とすれば良い事が分りました。

こうして出来た正規化高域通過フィルターから、任意の角周波数の高域通過フィルターへの変更は素子値のスケーリングを行えば良いです。

(2) 2 次の低域通過伝達関数の変換

2 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{\omega_0{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$$

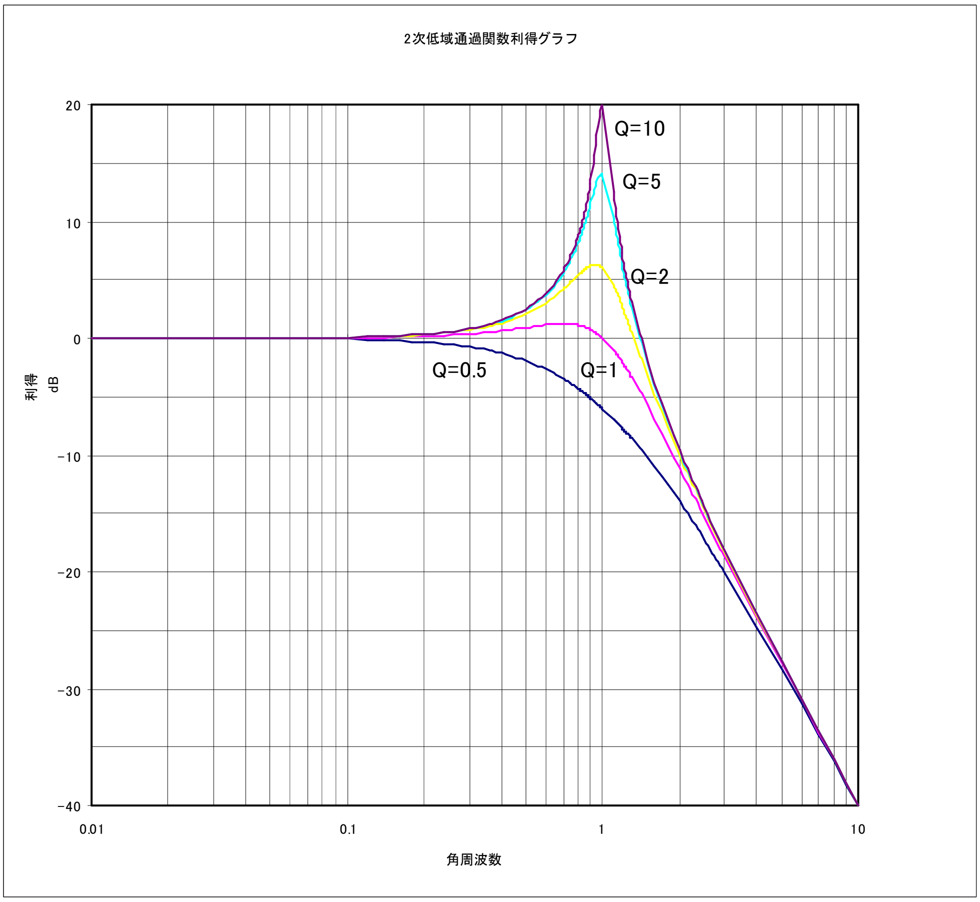
です。分子に付いている $\omega_0{}^2$ は、s＝jω＝0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にするための係数です。角周波数 0 での分母の値と同じものを分子に置けば、角周波数 0 で伝達関数の値は 1 になります。一般的には H と言う定数を分子に付け、

$$\frac{H\omega_0{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}\quad\cdot\cdot\cdot 2-③$$

となります。H を付けることにより、全ての角周波数での利得が変化します。

これは偶数次チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合の利得調整等に使います。

2ー③式の ω_0 と H が、共に 1 の場合の利得グラフを下に示します。s=jω と置き、各 ω での絶対値を求め、利得をデシベル計算したものです



高域通過伝達関数に変換するため、2ー③式の分母の s を $\frac{1}{s}$ にしますと、

$$\left[s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right]_{s=\frac{1}{s}}=\left(\frac{1}{s}\right)^2+\frac{\omega_0}{Q}\bullet\frac{1}{s}+\omega_0{}^2=\frac{1}{s^2}+\frac{\omega_0}{Qs}+\omega_0{}^2$$

$$=\frac{Q+\omega_0 s+Q\omega_0{}^2 s^2}{Qs^2}$$

になります。したがって 2ー③式は、

$$H\omega_0{}^2 \div \frac{Q+\omega_0 s+Q\omega_0{}^2 s^2}{Qs^2} = \frac{H\omega_0{}^2 Qs^2}{Q+\omega_0 s+Q\omega_0{}^2 s^2}$$

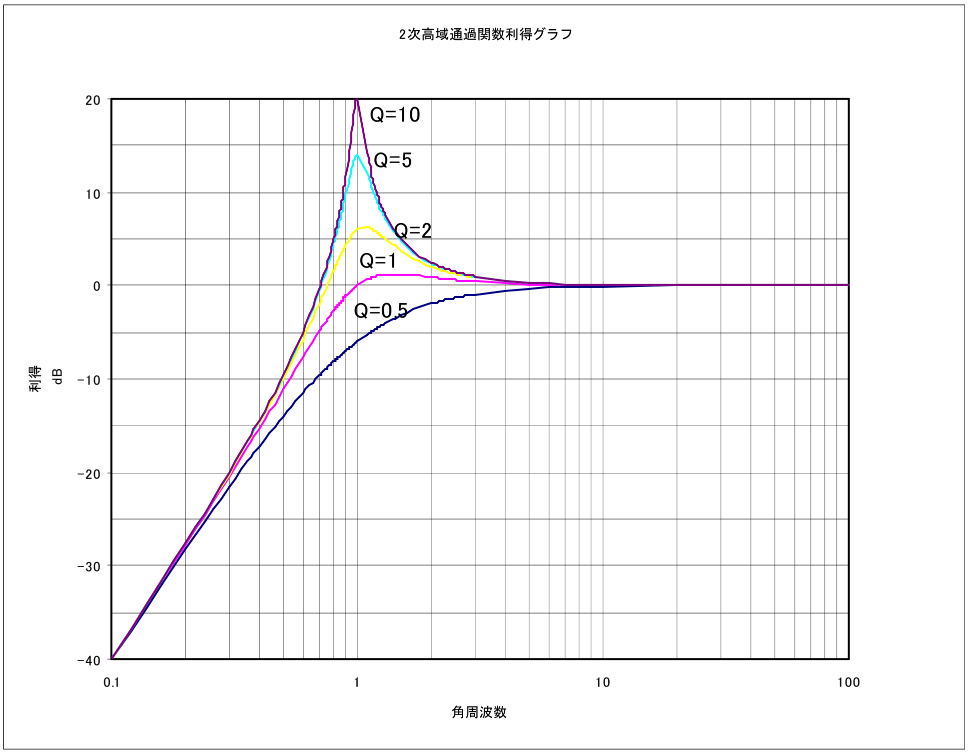
$$= \frac{H\omega_0{}^2 Qs^2}{\omega_0{}^2 Q(s^2+\frac{1}{Q\omega_0}s+\frac{1}{\omega_0{}^2})} = \frac{Hs^2}{s^2+\frac{1}{Q\omega_0}s+\frac{1}{\omega_0{}^2}}$$

となります。ここで、$\frac{1}{\omega_0}=\omega_{HP}$ と置きますと、2 次高域通過伝達関数は、

$$\frac{Hs^2}{s^2+\frac{\omega_{HP}}{Q}s+\omega_{HP}{}^2} \quad \cdot\cdot\cdot 2-④$$

になります。

この関数の ω_{HP} と H が、共に 1 の場合の利得グラフを下に示します。s＝jω と置き、各 ω での絶対値を求め利得をデシベル計算したものです。



2－④式には、分子にも分母にも H 以外の係数が付きません。H が 1 の場合、角周波数が大きな領域での出力絶対値を求めるため、s に＋j∞を入力しますと、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_{HP}}{Q}s+\omega_{HP}{}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\frac{1}{s^2}\bullet s^2}{\frac{1}{s^2}\left(s^2+\frac{\omega_{HP}}{Q}s+\omega_{HP}{}^2\right)}=\lim_{s\to j\infty}\frac{1}{1+\frac{\frac{\omega_{HP}}{Q}}{s}+\frac{\omega_{HP}{}^2}{s^2}}$$

$$=1$$

になります。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求めるため s＝－j∞を代入するまでも無く、2－④式の H＝1、∞[rad/sec]での利得は 1 と分りました。

この伝達関数を、回路としての実現する方法は、章を改めて説明させて頂きたいと思います。

「周波数変換」の章で高域通過フィルター設計用の、正規化低域通過フィルターを設計しております。

2 次の低域通過伝達関数各段の Q および H はそのままの値、ω_0 は逆数の値を、2 次高域通過伝達関数各段の Q、H、ω_0 の値とすれば良い事が分ります。角周波数 0 での利得調整用として分子に付いていた $\omega_0{}^2$ は無くなります。

こうして出来た正規化高域通過フィルターから、任意の角周波数の高域通過フィルターへの変更は素子値のスケーリングを行えば良いです。

(3) 零点のある 2 次の低域通過伝達関数の変換

零点のある 2 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)}{\omega_Z{}^2(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2)}$$

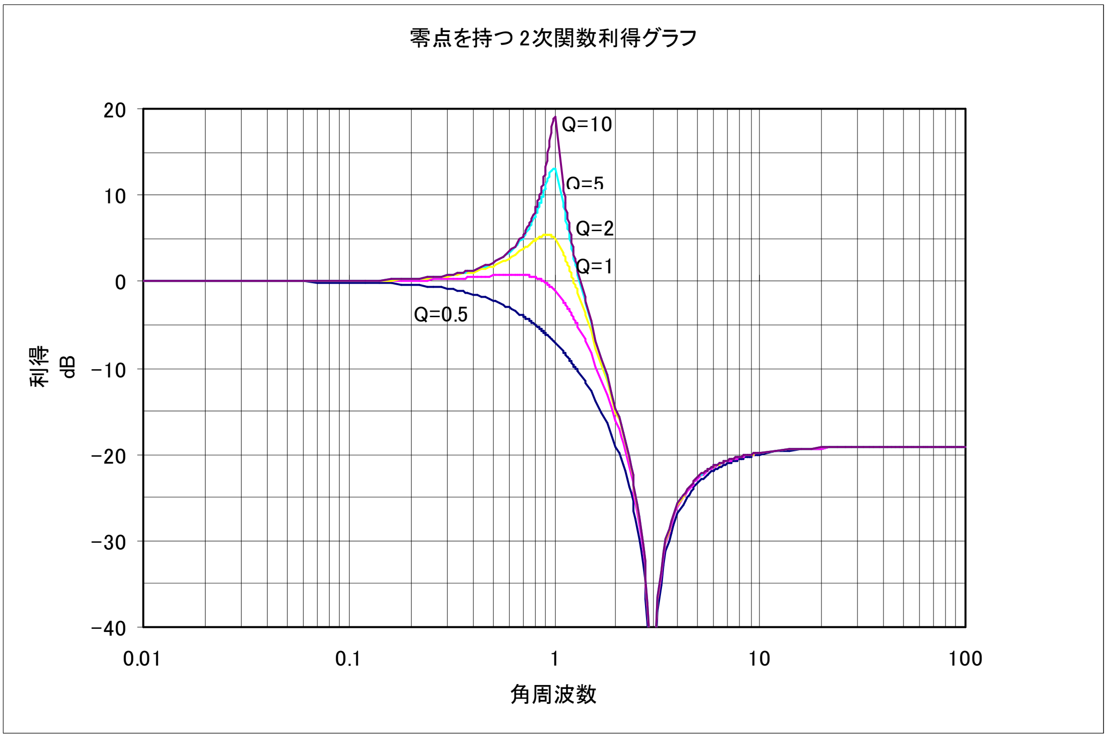
です。「低域通過伝達関数の要素」の章 1 の低域通過伝達関数要素中、2 次低域通過伝達関数とノッチ要素を直列接続した形です。先程も書きましたが、分子に付いている $\omega_0{}^2$、分母に付いている $\omega_Z{}^2$ は、s＝jω＝0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にするための係数です。一般的には H と言う定数を分子に付け、

$$\frac{H\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)}{\omega_Z{}^2\left(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right)}\quad\cdot\cdot\cdot 2-⑤$$

となります。H により、この式に入力する全ての角周波数での利得が変化します。

これは偶数次逆チェビシェフ、偶数次連立チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合の利得調整等に使います。

2ー⑤式関数の ω_0、H 共に 1、ω_Z が 3 の場合の利得グラフを下に示します。s＝jω と置き、各 ω での絶対値を求めたものです



高域通過伝達関数に変換するため、まず分子の s を $\frac{1}{s}$ にしますと、

$$H\omega_0^{\ 2}\left[s^2+\omega_Z^{\ 2}\right]_{s=\frac{1}{s}}=H\omega_0^{\ 2}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)^2+\omega_Z^{\ 2}\right\}=\frac{H\omega_0^{\ 2}(1+\omega_Z^{\ 2}s^2)}{s^2}$$

になります。次に分母の s を $\frac{1}{s}$ にしますと、

$$\omega_Z^{\ 2}\left[s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^{\ 2}\right]_{s=\frac{1}{s}}=\omega_Z^{\ 2}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)^2+\frac{\omega_0}{Qs}+\omega_0^{\ 2}\right\}=\frac{\omega_Z^{\ 2}(Q+\omega_0 s+Q\omega_0^{\ 2}s^2)}{Qs^2}$$

になります。分子÷分母を行いますと、

$$\frac{H\omega_0^{\ 2}(1+\omega_Z^{\ 2}s^2)}{s^2}\div\frac{\omega_Z^{\ 2}(Q+\omega_0 s+Q\omega_0^{\ 2}s^2)}{Qs^2}=\frac{H\omega_0^{\ 2}(1+\omega_Z^{\ 2}s^2)}{s^2}\bullet\frac{Qs^2}{\omega_Z^{\ 2}(Q+\omega_0 s+Q\omega_0^{\ 2}s^2)}$$

$$=\frac{QH\omega_0{}^2(1+\omega_Z{}^2s^2)}{\omega_Z{}^2(Q+\omega_0 s+Q\omega_0{}^2s^2)}=\frac{QH\omega_0{}^2\omega_Z{}^2\left(\frac{1}{\omega_Z{}^2}+s^2\right)}{\omega_Z{}^2Q\omega_0{}^2\left(\frac{1}{\omega_0{}^2}+\frac{s}{Q\omega_0}+s^2\right)}$$

$$=\frac{H\left(s^2+\frac{1}{\omega_Z{}^2}\right)}{s^2+\frac{s}{Q\omega_0}+\frac{1}{\omega_0{}^2}}$$

になります。ここで、$\frac{1}{\omega_0}=\omega_{HP0}$、$\frac{1}{\omega_Z}=\omega_{HPZ}$と置きますと、零点の有る 2 次高域通過伝達関数は、

$$\frac{H(s^2+\omega_{HPZ}{}^2)}{s^2+\frac{\omega_{HP0}}{Q}s+\omega_{HP0}{}^2}\quad\cdot\cdot\cdot 2-⑥$$

になります。零点の有る 2 次低域通過伝達関数と、零点の有る 2 次高域通過伝達関数とは本質的な違いは有りません。ω_Z の角周波数が ω_0 よりも上にあるか下にあるか、だけの違いです。高域通過の場合は、分子の H 以外の係数は付きません。

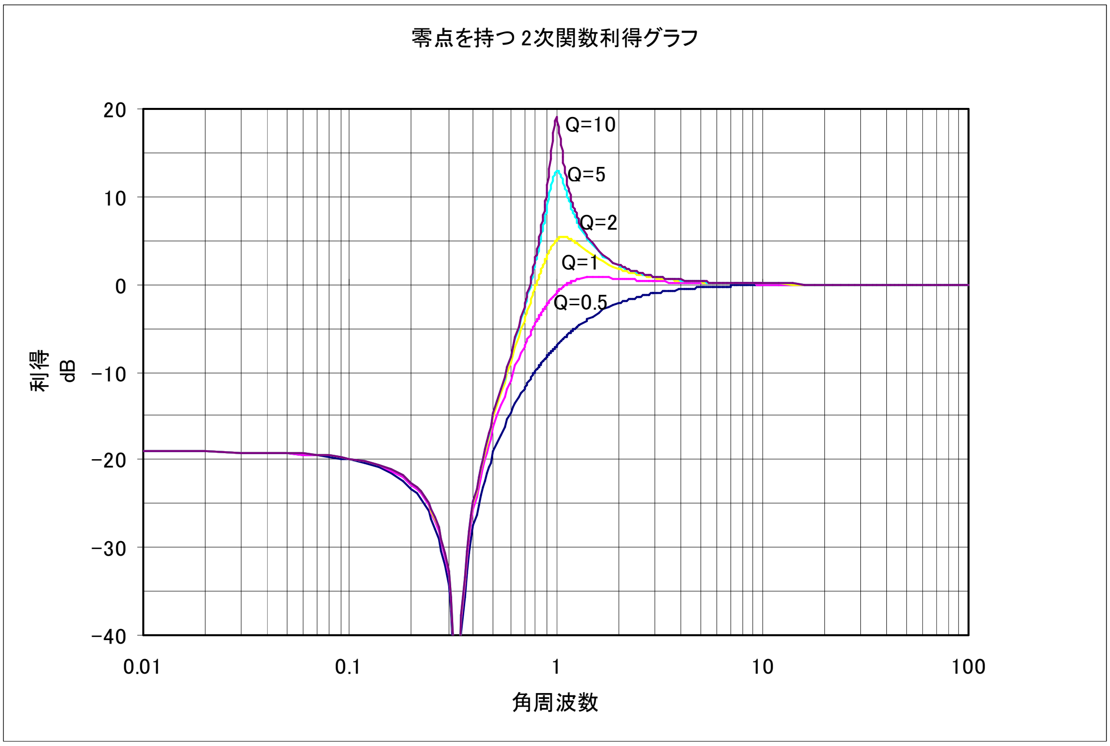
H が 1 の場合、角周波数が大きな領域での出力の絶対値を求めるため、2−⑥式の s に＋j∞を代入しますと、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{s^2+\omega_{HPZ}{}^2}{s^2+\frac{\omega_{HP0}}{Q}s+\omega_{HP0}{}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\frac{1}{s^2}\left(s^2+\omega_{HPZ}{}^2\right)}{\frac{1}{s^2}\left(s^2+\frac{\omega_{HP0}}{Q}s+\omega_{HP0}{}^2\right)}=\lim_{s\to j\infty}\frac{1+\frac{\omega_{HPZ}{}^2}{s^2}}{1+\frac{\frac{\omega_{HP0}}{Q}}{s}+\frac{\omega_{HP0}{}^2}{s^2}}$$

$$=1$$

になります。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求めるため s＝−j∞を代入するまでも無く、2−⑥式の H＝1、∞[rad/sec]での利得は 1 と分りました。したがって、H 以外の係数を付ける必要は有りません。

この関数の ω_0 が 1、ω_Z が $\frac{1}{3}$ の場合の利得グラフを下に示します。s＝jω と置き、各 ω での伝達関数の絶対値を求め、デシベル計算したものです



この回路の実現方法も章を改めたいと思います。

「周波数変換」の章で、高域通過フィルター設計用の正規化低域通過フィルターを設計しております。

零点の有る2次低域通過伝達関数の場合、各段のQおよびHはそのままの値、ω_0およびω_Zは逆数の値を、零点の有る2次高域通過伝達関数各段の、Q、 H、ω_0、ω_Zの値とすれば良い事が分りました。角周波数0での利得調整用として付いていたω_0^2およびω_Z^2は無くなります。

こうして出来た正規化高域通過フィルターから、任意の角周波数の高域通過フィルターへの変更は素子値のスケーリングを行えば良いです。

目次へ戻る