3、低域通過フィルターから帯域通過フィルターへの変換

　次にＬＰＦからＢＰＦへの周波数変換を行ってみます。

(1) 1 次低域通過伝達関数の変換

　1 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{a_0}{s+a_0}$$

です。何度も書きましたが、分子に付いている a_0 は $s=j\omega=0$、つまり角周波数 0 での利得を 1 にする為の係数です。周波数変換の章で検討しましたが、帯域通過フィルターへの変換は、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を $\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$ に置き換えれば良いです。

$$\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)=\frac{s}{\omega_b-\omega_a}+\frac{1}{s(\omega_b-\omega_a)}=\frac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}$$

になりますから、

$$\left[\frac{a_0}{s+a_0}\right]_{s=\frac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}}=\frac{a_0}{\dfrac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}+a_0}$$

$$=\frac{a_0}{\dfrac{s^2+1+a_0s(\omega_b-\omega_a)}{s(\omega_b-\omega_a)}}=\frac{a_0s(\omega_b-\omega_a)}{s^2+1+a_0s(\omega_b-\omega_a)}$$

$$=\frac{a_0(\omega_b-\omega_a)s}{s^2+a_0(\omega_b-\omega_a)s+1}$$

です。この形の伝達関数を一般的な形で書けば、

$$\frac{\frac{1}{Q}s}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}$$

です。ただし$Q=\dfrac{1}{a_0(\omega_b-\omega_a)}$です。更に一般的にするには、H と言う係数を分子に付け、

$$\frac{H\frac{1}{Q}s}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}$$

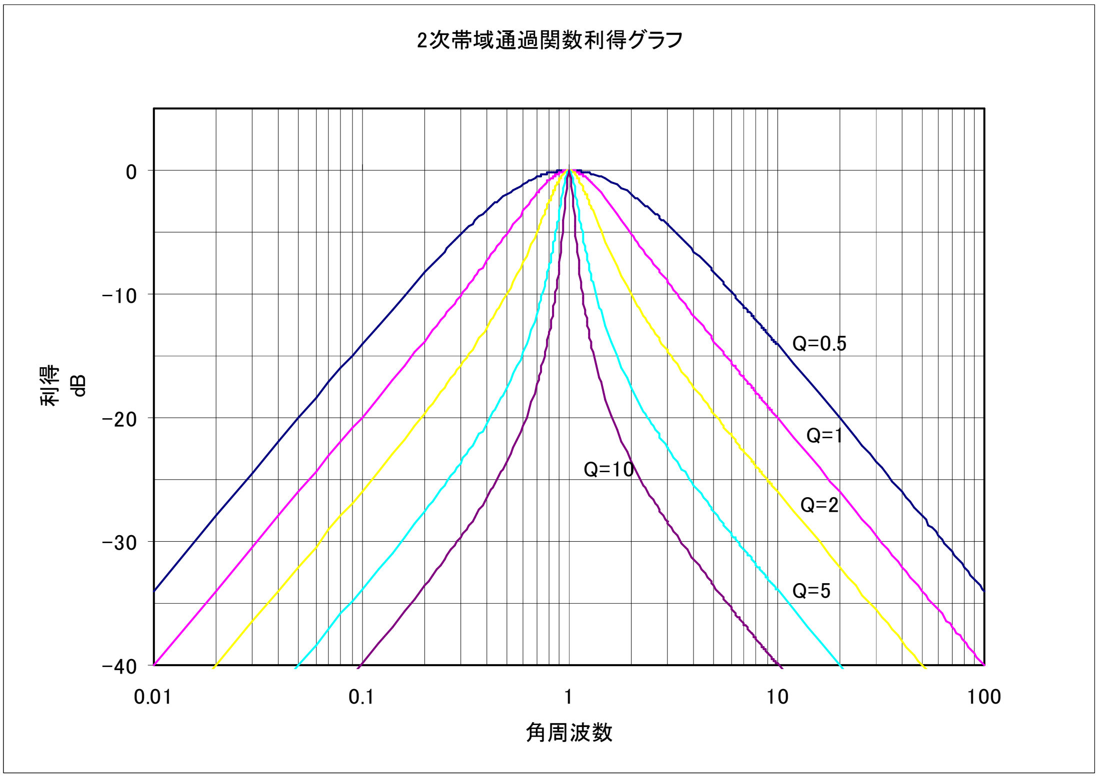
と言う式にします。H により、この式に入力する全ての角周波数での利得が変化します。

これは偶数次チェビシェフ、偶数次逆チェビシェフ、偶数次連立チェビシェフフィルターにおいて、1[rad/sec]で利得が 1 では無い場合等に使います。

H が 1 の場合、角周波数が 1[rad/sec] での出力の絶対値を求めるため、s=+j1=j を入力しますと、

$$\left[\frac{\frac{1}{Q}s}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}\right]_{s=j}=\frac{\frac{1}{Q}j}{j^2+\frac{1}{Q}j+1}=\frac{\frac{1}{Q}j}{-1+\frac{1}{Q}j+1}=\frac{\frac{1}{Q}j}{\frac{1}{Q}j}=1$$

になります。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求める為 s=−j1=−j を代入するまでも無く、3-①式の H=1、1[rad/sec] での利得は 1 と分りました。
この関数の利得グラフを下に示します。s=jω と置き、代表的 Q 値の各 ω で、出力の絶対値を求め、デシベル表示したものです。1[rad/sec]で利得が 1=0[dB]、つまりになっています。



この回路の実現方法も章を改めたいと思います。

「周波数変換」の章で帯域通過フィルター設計用の、正規化低域通過フィルターを設計しております。

1 次低域通過伝達関数の a_0、ω_a、ω_b から Q を計算し、2 次帯域通過伝達関数の Q の値とすれば良い事が分ります。

こうして出来た正規化帯域通過フィルターから、任意の角周波数の帯域通過フィルターへの変更は素子値のスケーリングを行えば良いです。

(2) 2 次低域通過伝達関数の変換

2 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}$$

です。何度も書きましたが、分子に付いている ${\omega_0}^2$ は s＝jω＝0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にする為の係数です。一般的には H と言う定数を分子に付け、

$$\frac{H{\omega_0}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+{\omega_0}^2}$$

となります。全ての角周波数での利得が変化します。

これは偶数次チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合の利得調整等に使います。

「周波数変換」の章で検討しましたが、帯域通過フィルターへの変換は、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を $\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$ に置き換えれば良いです。

$$\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)=\frac{s}{\omega_b-\omega_a}+\frac{1}{s(\omega_b-\omega_a)}=\frac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}$$

になります。式をすっきりとさせる為、ω_bーω_a を ω_1 と置きます。つまり、

$$\frac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}=\frac{s^2+1}{s\omega_1}$$

です。元式の分母は、

$$\left[s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right]_{s=\frac{s^2+1}{s\omega_1}}=\left(\frac{s^2+1}{s\omega_1}\right)^2+\frac{\omega_0}{Q}\bullet\frac{s^2+1}{s\omega_1}+\omega_0{}^2$$

$$=\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\omega_0s^2+\omega_0}{Q\omega_1s}+\omega_0{}^2$$

$$=\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2+\frac{\omega_0}{Q}}{\omega_1s}+\omega_0{}^2$$

$$=\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\omega_0{}^2\omega_1{}^2s^2}{\omega_1{}^2s^2}$$

$$=\frac{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1}{\omega_1{}^2s^2}$$

となります。分子÷分母を行いますと、

$$H\omega_0{}^2\div\frac{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1}{\omega_1{}^2s^2}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2\omega_1{}^2s^2}{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1}\quad\cdots 3-①$$

になりました。

伝達関数の ω での利得は、s に＋jω（またはーjω）を代入した複素数の絶対値です。または伝達関数の s に＋jω を代入した複素数と、ーjω を代入した複素数の積の平方根です。

3ー①式の H＝1、1[rad/sec] での利得は、まず s＝j1＝j を代入し、

$$\left[\frac{\omega_0{}^2\omega_1{}^2s^2}{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1}\right]_{s=j}$$

$$=\frac{\omega_0{}^2\omega_1{}^2 j^2}{j^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}j^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)j^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}j+1}$$

$$=\frac{-\omega_0{}^2\omega_1{}^2}{1-j\frac{\omega_0\omega_1}{Q}-\omega_0{}^2\omega_1{}^2-2+j\frac{\omega_0\omega_1}{Q}+1}$$

$$=\frac{-\omega_0{}^2\omega_1{}^2}{-\omega_0{}^2\omega_1{}^2}=1$$

となります。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求める為 s＝－j1 ＝－j を代入するまでも無く、3－①式の H＝1、1[rad/sec] での利得は 1 と分ります。

3－①式の 4 次伝達関数を、1 つの回路で実現するのは難しいです。因数分解して 2 次の伝達関数の直列接続で作ります。そのため 3－①式分母を＝0 と置きます。

$$s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1=0$$

この方程式は、s の 4 乗と s の 0 乗の係数、s の 3 乗と s の 1 乗の係数が同じで、s の 2 乗の係数を軸にして、係数が左右対称になっています。これを相反方程式と呼び、次のような特別の解法があります。

まず両辺を s^2 で割ります。

$$\frac{s^4}{s^2}+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}\frac{s^3}{s^2}+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)\frac{s^2}{s^2}+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}\frac{s}{s^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{0}{s^2}$$

$$s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}\bullet\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}=0$$

$$s^2+\frac{1}{s^2}+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}\left(s+\frac{1}{s}\right)+\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2=0 \quad ・・・3－②$$

$s+\frac{1}{s}=y$ と置いてみますと、

$$y^2=\left(s+\frac{1}{s}\right)^2=\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)=s^2+1+1+\frac{1}{s^2}=s^2+\frac{1}{s^2}+2$$

となります。したがって、

$$s^2+\frac{1}{s^2}=y^2-2$$

です。この結果を3ー②式に代入しますと、

$$y^2-2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}y+\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2=0$$

$$y^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}y+\omega_0{}^2\omega_1{}^2=0$$

です。この方程式の根は、

$$y=\frac{-\frac{\omega_0\omega_1}{Q}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega_0\omega_1}{Q}\right)^2-4\omega_0{}^2\omega_1{}^2}}{2}$$

になります。

ルートの中はQが0.5を越える場合、負になります。したがって、yは、Qが0.5を越える場合、共役の複素数になります。

yが求まりましたら、それぞれのyについて、sの値を求めます。$s+\frac{1}{s}=y$ なので、

$$s-y+\frac{1}{s}=0$$

です。両辺にsをかけ、

$$s^2-ys+1=0$$

となります。根の公式により、

$$s=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$$

です。ルートの中を考えますと、ほとんどのyが複素数です。yを2乗して実数4を引いても複素数です。複素数に付いているルートをはずさなければなりません。ルートの中の複素数を例えば $a+jb$ とした場合、

$$\sqrt{a+jb}=\left\{\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+j\sin\theta)\right\}^{\frac{1}{2}}$$ 極形式の平方根

$$\sqrt{a+jb}=\left(\sqrt{a+jb}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta+j\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$ 指数法則

$$\sqrt{a+jb}=\sqrt{\sqrt{a+jb}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+j\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}$$　　ド・モアブルの定理

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$　　θ は正の実軸から反時計回りで計った値。

です。

y は、ほとんどが共役の複素数として 2 つ出ます。それぞれの y について、s の根が共役の複素数として 2 つ出ます。最終的な s の根は 2×2 で 4 つ出ます。共役の複素根ペアが 2 組です。1 組で 2 次式が 1 つ出来ますから、2 次式 2 つになります。

3ー②式分母は因数分解して、2 次式 2 つにまとめられます。

次に、3ー①式の分子を因数分解したものを、今作り出した 2 つの分母の上に載せます。

3ー①式分子の因数分解は $\omega_0{}^2\omega_1{}^2s^2$ の 2 乗を取り、$\omega_0\omega_1 s$ にして、H を付ければ良いです。出来ました伝達関数を ω_{0A} と Q_A、ω_{0B} と Q_B で表しますと、

$$\frac{H\omega_0\omega_1 s}{s^2 + \frac{\omega_{0A}}{Q_A}s + \omega_{0A}{}^2} \quad と \quad \frac{H\omega_0\omega_1 s}{s^2 + \frac{\omega_{0B}}{Q_B}s + \omega_{0B}{}^2}$$

に なります。

しかし、こうして出来た 2 つの 2 次帯域通過関数は、それぞれ単独で計算した場合、H が 1 でも角周波数 1 での利得が 1 になりません。

もともとは 1 つの式でしたので、2 つが直列に接続されて、はじめて角周波数 1 での利得が 1 になります。

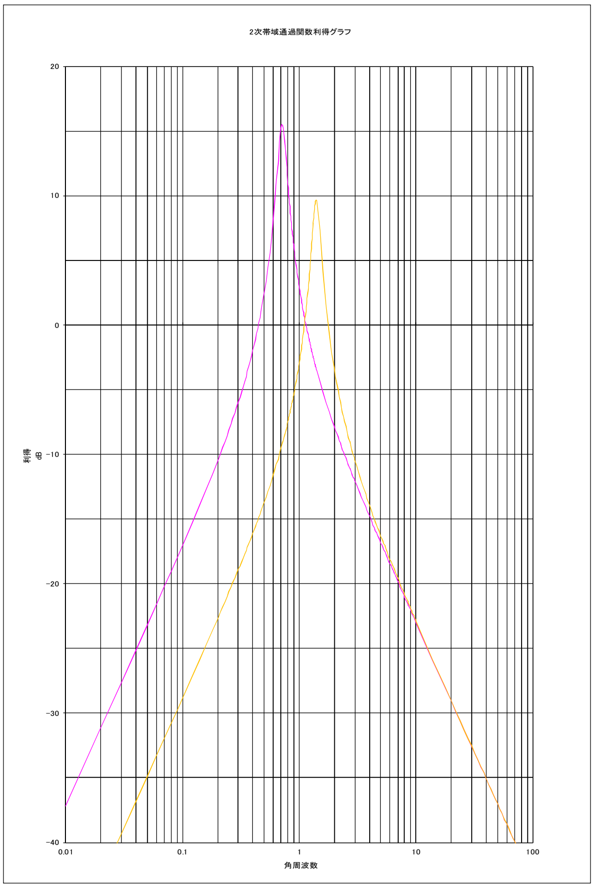
片方の利得が大きく、片方の利得が小さくなるので、フィルターの許容入力が小さくなりがちです。

右のグラフが 2 次帯域通過関数 2 つの利得(dB)と角周波数の関係です。

最大利得が食い違っています。

それぞれの利得が、角周波数 1 で 1 になる方法を考えます。

正弦波が加えられた時の回路の振る舞いは、次の様になるのでした。



①、＋jω が伝達関数の s に代入される。

②、－jω が伝達関数の s に代入される。

③、①の答えと②の答えが、かけ合わされる。

④、③の平方根が出力される。

でした。伝達関数の s に jω を入力したものと、伝達関数の s に－jω を入力したものが出来ますが、複素数の性質から、2 つの式は共役になります。

共役複素数どうしをかけると、その複素数の絶対値の 2 乗になります。

その平方根が出力されると言うことは、s に jω を入力した複素数、あるいは、s に－jω を入力した複素数の絶対値が出力されるということです。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章の 5 ページ付近に詳しい説明があります。

伝達関数が分数の場合、

・分母に付いている正の定数を A、

・分子に付いている正の定数を B、

・伝達関数の分母に jω および－jω を代入した複素数が a＋jb および a－jb、

・伝達関数の分子に jω および－jω を代入した複素数が c＋jd および c－jd

とした場合、出力は、

$$\sqrt{\frac{B(c+jd)}{A(a+jb)}\bullet\frac{B(c-jd)}{A(a-jb)}}=\sqrt{\frac{B^2(c^2+d^2)}{A^2(a^2+b^2)}}=\frac{B}{A}\bullet\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となります。したがって、$A=\sqrt{c^2+d^2}$ 、$B=\sqrt{a^2+b^2}$ が成り立てば、利得が 1 になります。角周波数 1 での利得を 1 にする為には、角周波数 1 入力時の伝達関数絶対値の逆数が定数として、かかっていれば良いです。

「ω_{0A} と Q_A 式」分母の、

$$s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2$$

式に s＝j1＝j を代入し、角周波数 1 入力時の値を求めますと、

$$\left[s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2\right]_{s=j}=j^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j+{\omega_{0A}}^2$$

$$=({\omega_{0A}}^2-1)+j\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\quad・・・3－③$$

になります。s＝－j1＝－j を代入し、角周波数－1 入力時の値を求めますと、

$$\left[s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2\right]_{s=-j}=(-j)^2-\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j+{\omega_{0A}}^2$$

$$=({\omega_{0A}}^2-1)-j\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\quad\cdot\cdot\cdot 3-④$$

になります。絶対値は、

$$\sqrt{\left\{({\omega_{0A}}^2-1)+j\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right\}\left\{({\omega_{0A}}^2-1)-j\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right\}}=\sqrt{({\omega_{0A}}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right)^2}$$

です。

一方、「ω_{0A} と Q_A 式」分子は定数と s のかけ算です。分子の定数を全部省いても、伝達関数全体としては、同じ折れ曲がりの形を保ったまま利得が変わるだけです。ここでは定数を全部省いて s とします。

分子に s=j1=j を代入し、角周波数 1 入力時の値を求めますと、

$$[s]_{s=j}=j$$

になります。分子に s=－j1=－j を代入し、角周波数 1 入力時の値を求めますと、

$$[s]_{s=-j}=-j$$

になります。絶対値は、

$$\sqrt{j\bullet(-j)}=\sqrt{-j^2}$$

$$=1$$

です。したがって、「ω_{0A} と Q_A 式」で角周波数 1 入力時の利得を 1 にする場合、

・定数 A は 1。

・定数 B は、$\sqrt{({\omega_{0A}}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right)^2}$ です。

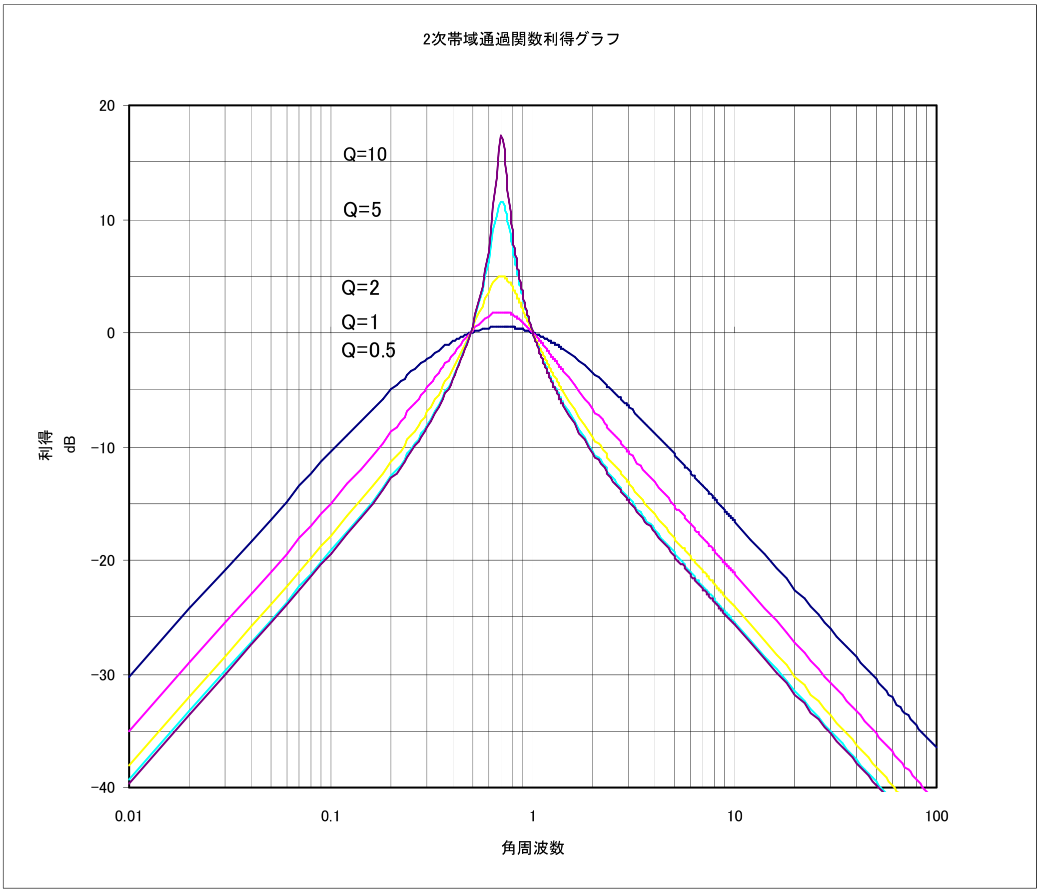
以上の結果、2 次帯域通過関数「ω_{0A} と Q_A 式」「ω_{0B} と Q_B 式」は、利得調整用の H を付けて、

$$\frac{H\sqrt{({\omega_{0A}}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right)^2}\bullet s}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2} \quad と \quad \frac{H\sqrt{({\omega_{0B}}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0B}}{Q_B}\right)^2}\bullet s}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+{\omega_{0B}}^2}$$

になります。この 2 次帯域通過関数は、どちらも H が 1 の場合、角周波数 1 で利得が 1 になります。例えば、H＝1、ω_0＝0.7 の場合、

$$\frac{\sqrt{(0.7^2-1)^2+\left(\frac{0.7}{Q}\right)^2}\bullet s}{s^2+\frac{0.7}{Q}s+0.7^2}$$

の利得グラフを下に示します。s＝jω と置き、代表的 Q で各 ω での絶対値を求めたものです。



角周波数 1 での利得が 1 になっています。

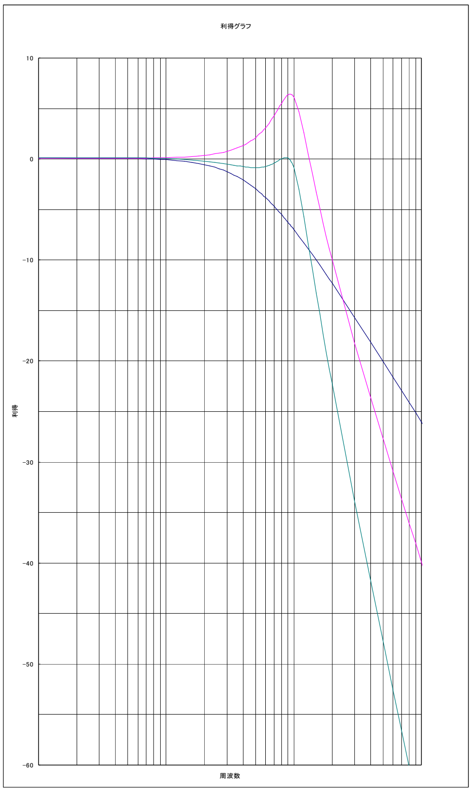
この回路の実現方法も章を改めたいと思います。

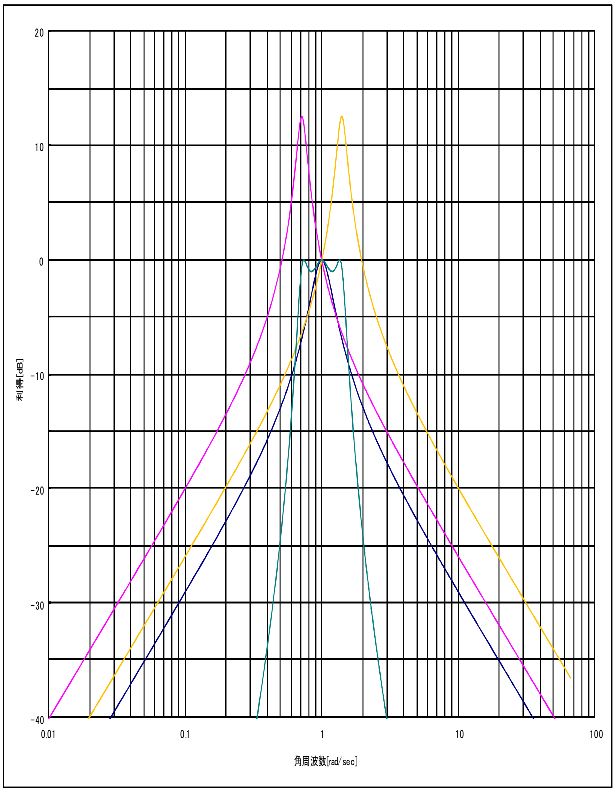
「周波数変換」の章で帯域通過フィルター設計用の、正規化低域通過フィルターを設計しております。

2 次低域通過伝達関数を帯域通過関数に変換すると、上記の通り、2 つの 2 次帯域通過関数になります。

こうして出来た正規化帯域通過フィルターを、任意角周波数の帯域通過フィルターに変更するには素子値のスケーリングを行えば良いです。

下に変換の具体例を示します。





上左図が変換前の 3 次チェビシェフ低域通過フィルターです。青が 1 次低域通過関数、ピンクが 2 次低域通過関数です。緑が最終出力です。

上右図が変換後の帯域通過フィルターです。青は 1 次低域通過関数が変換された 2 次帯域通過関数です。ピンクとオレンジは 2 次低域通過関数が変換された 2 つの 2 次帯域通過関数です。1[rad/sec]での利得が 1 になるようにしています。緑が最終出力です。拡大すると良く分ります。

(3) 零点のある 2 次の低域通過伝達関数の変換

零点の有る 2 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)}{\omega_Z{}^2(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2)}$$

です。1、の低域通過伝達関数要素中、2 次低域通過伝達関数とノッチ要素を直列接続した形です。何度も書きましたが、分子に付いている $\omega_0{}^2$、分母に付いている $\omega_Z{}^2$ は、s＝$j\omega$＝0、つまり周波数 0 での利得を 1 にするための係数です。分子分母に分けず、$\frac{\omega_0{}^2}{\omega_Z{}^2}$ として分子に載せても良いです。一般的には H と言う定数を付け、

$$\frac{H\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)}{\omega_Z{}^2\left(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right)} \quad ・・・3－⑤$$

となります。この式に入力する全ての角周波数での利得が変化します。

　これは偶数次逆チェビシェフ、偶数次連立チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合の利得調整等に使います。

　周波数変換の章で検討しましたが、帯域通過フィルターへの変換は、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を $\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$ に置き換えれば良いです。

$$\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)=\frac{s}{\omega_b-\omega_a}+\frac{1}{s(\omega_b-\omega_a)}=\frac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}$$

になります。式をすっきりとさせる為、ω_bーω_a を ω_1 と置きます。つまり、

$$\frac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}=\frac{s^2+1}{s\omega_1}$$

です。3ー⑤式の分母は、

$$\left[\omega_Z{}^2\left(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right)\right]_{s=\frac{s^2+1}{s\omega_1}}=\omega_Z{}^2\left\{\left(\frac{s^2+1}{s\omega_1}\right)^2+\frac{\omega_0}{Q}\bullet\frac{s^2+1}{s\omega_1}+\omega_0{}^2\right\}$$

$$=\omega_Z{}^2\left(\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\omega_0 s^2+\omega_0}{Q\omega_1 s}+\omega_0{}^2\right)$$

$$=\omega_Z{}^2\left(\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2+\frac{\omega_0}{Q}}{\omega_1 s}+\omega_0{}^2\right)$$

$$=\omega_Z{}^2\left(\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\omega_0{}^2\omega_1{}^2s^2}{\omega_1{}^2s^2}\right)$$

$$=\frac{\omega_Z{}^2\left\{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1\right\}}{\omega_1{}^2s^2}$$

となります。3-⑤式の分子は、

$$\left[H\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)\right]_{s=\frac{s^2+1}{s\omega_1}}=H\omega_0{}^2\left\{\left(\frac{s^2+1}{s\omega_1}\right)^2+\omega_Z{}^2\right\}$$

$$=H\omega_0{}^2\left(\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\omega_Z{}^2\right)$$

$$=H\omega_0{}^2\left(\frac{s^4+2s^2+1}{\omega_1{}^2s^2}+\frac{\omega_Z{}^2\omega_1{}^2s^2}{\omega_1{}^2s^2}\right)$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2\{s^4+(\omega_Z{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+1\}}{\omega_1{}^2s^2}$$

となります。分子÷分母を行いますと、

$$\frac{H\omega_0{}^2\{s^4+(\omega_Z{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+1\}}{\omega_1{}^2s^2}\div\frac{\omega_Z{}^2\left\{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1\right\}}{\omega_1{}^2s^2}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2\{s^4+(\omega_Z{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+1\}}{\omega_Z{}^2\left\{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0{}^2\omega_1{}^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1\right\}}\quad\cdots 3-⑥$$

となりました。3ー⑥式の分子分母に$\frac{1}{\omega_Z^2}$をかけ、定数項を分子に置きますと、

$$=\frac{H\omega_0^2\frac{1}{\omega_Z^2}\{s^4+(\omega_Z^2\omega_1^2+2)s^2+1\}}{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0^2\omega_1^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1}\quad\cdot\cdot\cdot 3-⑦$$

になります。

伝達関数の ω での利得は、s に＋jω（またはーjω）を代入した複素数の絶対値です。または伝達関数の s に＋jω を代入した複素数と、ーjω を代入した複素数の積の平方根です。3ー⑦式の H＝1、1[rad/sec] での利得は、まず s＝j1＝j を代入しまして、

$$\left[\frac{\omega_0^2\frac{1}{\omega_Z^2}\{s^4+(\omega_Z^2\omega_1^2+2)s^2+1\}}{s^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s^3+(\omega_0^2\omega_1^2+2)s^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}s+1}\right]_{s=j}$$

$$=\frac{\omega_0^2\frac{1}{\omega_Z^2}\{j^4+(\omega_Z^2\omega_1^2+2)j^2+1\}}{j^4+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}j^3+(\omega_0^2\omega_1^2+2)j^2+\frac{\omega_0\omega_1}{Q}j+1}$$

$$=\frac{\omega_0^2\frac{1}{\omega_Z^2}(1-\omega_Z^2\omega_1^2-2+1)}{1-j\frac{\omega_0\omega_1}{Q}-\omega_0^2\omega_1^2-2+j\frac{\omega_0\omega_1}{Q}+1}$$

$$=\frac{\omega_0^2\frac{1}{\omega_Z^2}(-\omega_Z^2\omega_1^2)}{-\omega_0^2\omega_1^2}=\frac{-\omega_0^2\omega_1^2}{-\omega_0^2\omega_1^2}=1$$

となります。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求める為 s＝ーj1＝ーj を代入するまでも無く、3ー⑦式の H＝1、1[rad/sec] での利得は、1 と分ります。

3ー⑦式の分母は 3ー①式の分母と全く同じです。相反方程式ですので、2 次式 2 つに分ける方法は既に(2)で説明致しました。

一方、3ー⑦式の分子の中括弧内の式、$s^4+(\omega_Z^2\omega_1^2+2)s^2+1$で s^2＝x、$\omega_Z^2\omega_1^2+2=b$

と置き、更に＝0 と置きますと、

$$x^2 + bx + 1 = 0$$

となります。これを複 2 次方程式と呼びます。複 2 次方程式は次のように因数分解します。
2 次方程式ですから、方程式の x の根は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

となります。s^2＝x なので、s＝± $\sqrt{x}$ です。したがって s の根は、

$$s = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}}$$

となります。3ー⑦式、分子の中括弧内の式は、

$$s^4 + bs^2 + 1 = \left(s - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)$$

$$\left(s - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)$$

$$= \left(s^2 - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)\left(s^2 - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)$$

$$= \left(s^2 + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)\left(s^2 + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)$$

と因数分解されます。

$\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ を $\omega_{ZA}{}^2$、$\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ を $\omega_{ZB}{}^2$、分母の ω_0 を ω_{0A} と ω_{0B}、同じく Q を Q_A と Q_B で表しますと、3ー⑦式は、自由に H を付け、

$$\frac{H\omega_0 \dfrac{1}{\omega_Z}(s^2+\omega_{ZA}{}^2)}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2} \quad \cdot\cdot\cdot 3-⑧$$

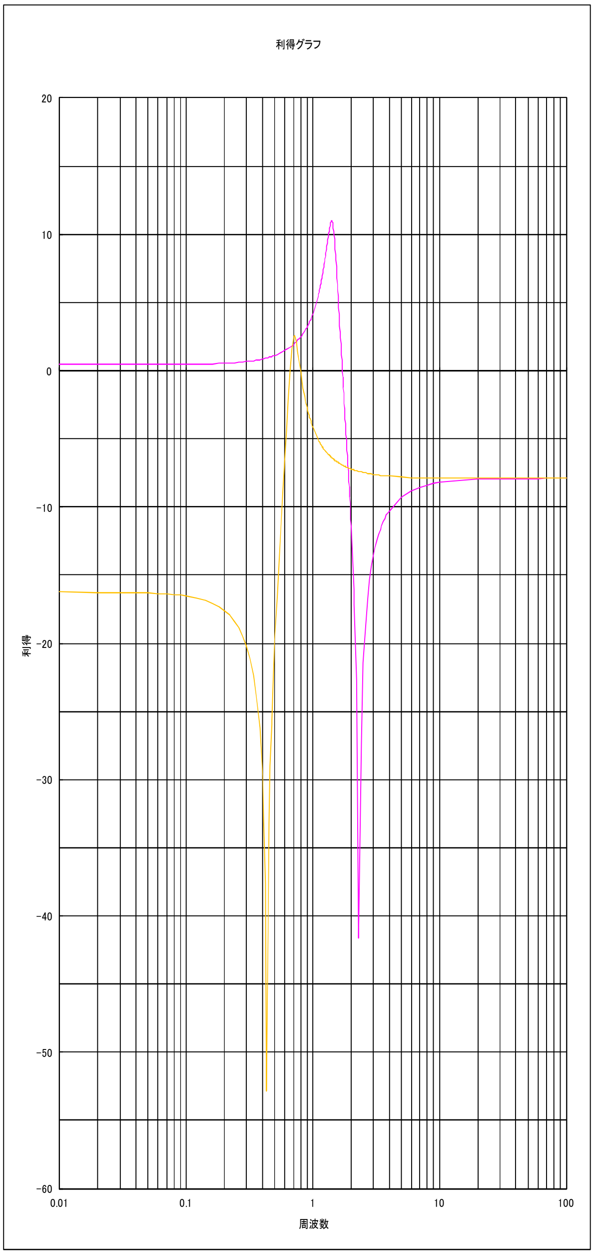
と、

$$\frac{H\omega_0 \dfrac{1}{\omega_Z}(s^2+\omega_{ZB}{}^2)}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2} \quad \cdot\cdot\cdot 3-⑨$$

の 2 つの式に因数分解出来ました。分子と分母の組み合わせは自由です。3－⑧式の分子を 3－⑨式の分子にしても良いです。

しかし、こうして出来た零点の有る 2 次伝達関数は、H が 1 でも角周波数 1 での利得が 1 にならないのです。もともとは一つの式でしたので、二つが直列に接続されてはじめて角周波数 1 での利得が 1 になります。
片方の利得が大きく、片方の利得が小さくなるので、フィルターの許容入力が小さくなりがちです。

右のグラフが零点のある 2 次伝達関数 2 つの利得(dB)と角周波数の関係です。最大利得が食い違っています。



角周波数 1 での利得を 1 にする方法を考えます。

両方の式の分子に付いている、$H\omega_0 \dfrac{1}{\omega_Z}$ と言う定数をはずして考えれば、どちらの式も零点の有る 2 次低域通過伝達関数または、零点の有る 2 次高域通過伝達関数の形です。両者は本質的な違いは無く、ω_Z の角周波数が ω_0 よりも、上にあるか下にあるかだけの違いでした。

既に(2)で説明致しました様に、どちらの式も、角周波数 1 入力時の関数絶対値の逆数が、かかっていれば、角周波数 1 での利得が 1 になります。

定数を外した 3－⑧式に角周波数 1 を入力した時の絶対値は、まず s=j1=j と s=－j1=－j を入力し、

$$\left[\frac{s^2+\omega_{ZA}{}^2}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}\right]_{s=j}=\frac{j^2+\omega_{ZA}{}^2}{j^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j+\omega_{0A}{}^2}=\frac{\omega_{ZA}{}^2-1}{(\omega_{0A}{}^2-1)+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j}$$

$$\left[\frac{s^2+\omega_{ZA}{}^2}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}\right]_{s=-j}=\frac{(-j)^2+\omega_{ZA}{}^2}{(-j)^2-\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j+\omega_{0A}{}^2}=\frac{\omega_{ZA}{}^2-1}{(\omega_{0A}{}^2-1)-\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j}$$

となります。両者をかけ合わせ、平方根を求め、

$$\sqrt{\frac{\omega_{ZA}{}^2-1}{(\omega_{0A}{}^2-1)+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j}\bullet\frac{\omega_{ZA}{}^2-1}{(\omega_{0A}{}^2-1)-\frac{\omega_{0A}}{Q_A}j}}=\sqrt{\frac{(\omega_{ZA}{}^2-1)^2}{(\omega_{0A}{}^2-1)^2+(\frac{\omega_{0A}}{Q_A})^2}}$$

となります。分子分母共に正ですから、

$$=\frac{\sqrt{(\omega_{ZA}{}^2-1)^2}}{\sqrt{(\omega_{0A}{}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right)^2}}$$

となります。分子に載せる定数は、逆数にして H を付けたものですから、

$$H\frac{\sqrt{(\omega_{0A}{}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right)^2}}{\sqrt{(\omega_{ZA}{}^2-1)^2}}$$

となります。3－⑧式は、

$$\frac{H\frac{\sqrt{(\omega_{0A}{}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0A}}{Q_A}\right)^2}}{\sqrt{(\omega_{ZA}{}^2-1)^2}}(s^2+\omega_{ZA}{}^2)}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}\quad\cdot\cdot\cdot 3-⑩$$

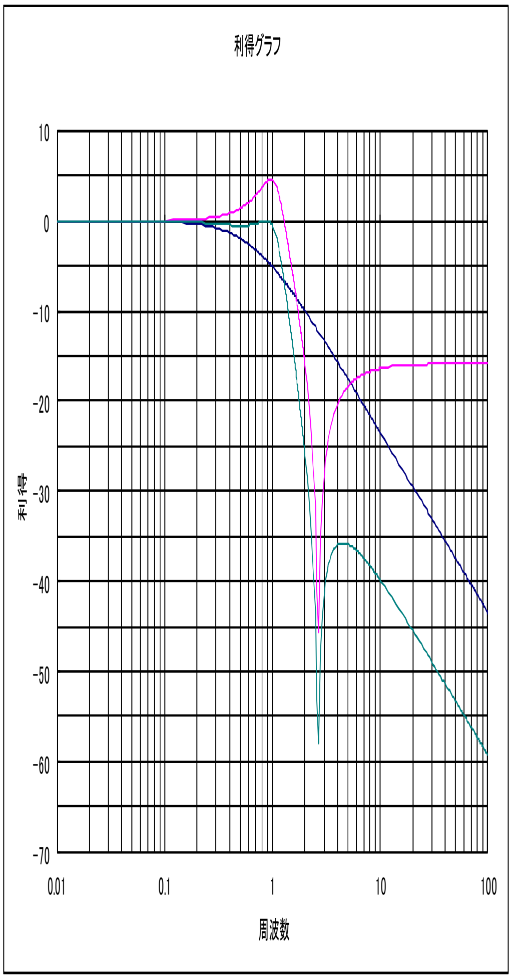
となります。同様に計算し、3－⑨式は、

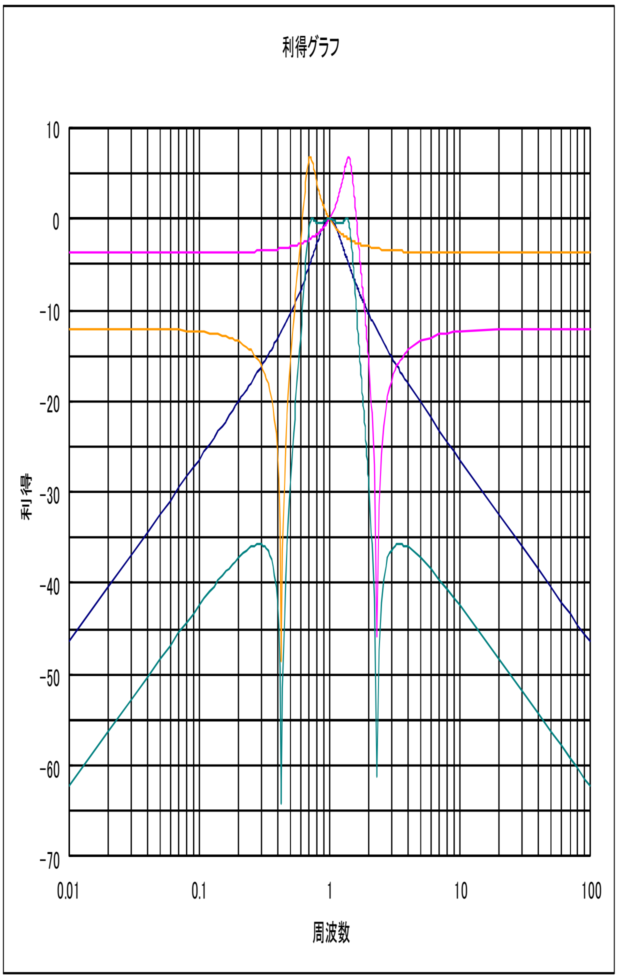
$$\frac{H\frac{\sqrt{(\omega_{0B}{}^2-1)^2+\left(\frac{\omega_{0B}}{Q_B}\right)^2}}{\sqrt{(\omega_{ZB}{}^2-1)^2}}(s^2+\omega_{ZB}{}^2)}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2} \quad \cdot\cdot\cdot 3-⑪$$

となります。

下に変換の具体例を示します。下左図が変換前の 3 次連立チェビシェフ低域通過フィルターです。青が 1 次低域通過関数、ピンクが 2 次低域通過関数です。緑が最終出力です。

下右図が変換後の帯域通過フィルターです。青は 1 次低域通過関数が変換された 2 次帯域通過関数です。ピンクとオレンジは 2 次低域通過関数が変換された 2 つの、零点の有る 2 次伝達関数です。奇数次の連立チェビシェフフィルターが元ですから、1[rad/sec]での利得が 1 になるようにしています。緑が最終出力です。拡大すると良く分ります。





　こうして出来た正規化帯域通過フィルターを、任意角周波数の帯域通過フィルターに変更するには素子値のスケーリングを行えば良いです。

目次へ戻る