周波数変換の例　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2009 年 10 月 14 日　　目次へ戻る

2023.7.2　2023.10.12　2023.10.19　2023.11.9　2023.11.14　訂正

4、低域通過フィルターから帯域阻止フィルターへの変換

最後に LPF から BEF への周波数変換を行います。

(1) 1 次低域通過伝達関数の帯域阻止伝達関数への変換

1 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{a_0}{s+a_0}$$

という式で表されます。何度も書きましたが、分子に付いている a_0 は s＝j0＝0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にする為の定数です。分子と分母の a_0 が約分され 1 になります。実数の 1 ですから、共役（きょうやく）も 1 です。絶対値も 1 です。

「周波数変換」の章で検討しましたが、帯域阻止フィルターへの変換は正規化低域通過フィルター伝達関数の s を、$\dfrac{(\omega_b-\omega_a)s}{s^2+1}$ に置き換えれば良いです。

式をすっきりとさせる為、$\omega_b-\omega_a$ を ω_1 と置き、

$$\frac{s(\omega_b-\omega_a)}{s^2+1}=\frac{s\omega_1}{s^2+1}$$

とします。したがって、1 次低域通過伝達関数の変換は、

$$\left[\frac{a_0}{s+a_0}\right]_{s=\frac{s\omega_1}{s^2+1}}=\frac{a_0}{\dfrac{s\omega_1}{s^2+1}+a_0}=\frac{a_0}{\dfrac{s\omega_1+a_0(s^2+1)}{s^2+1}}=\frac{a_0}{\dfrac{a_0s^2+\omega_1s+a_0}{s^2+1}}$$

$$=\frac{a_0(s^2+1)}{a_0s^2+\omega_1s+a_0}=\frac{a_0(s^2+1)}{a_0\left(s^2+\dfrac{\omega_1}{a_0}s+1\right)}=\frac{s^2+1}{s^2+\dfrac{\omega_1}{a_0}s+1}$$

となります。この形の伝達関数を 2 次帯域阻止伝達関数と呼びます。一般的な形で書けば、

$$\frac{s^2+1}{s^2+\dfrac{1}{Q}s+1}\quad\cdot\cdot\cdot 4-①$$

となります。ここで、

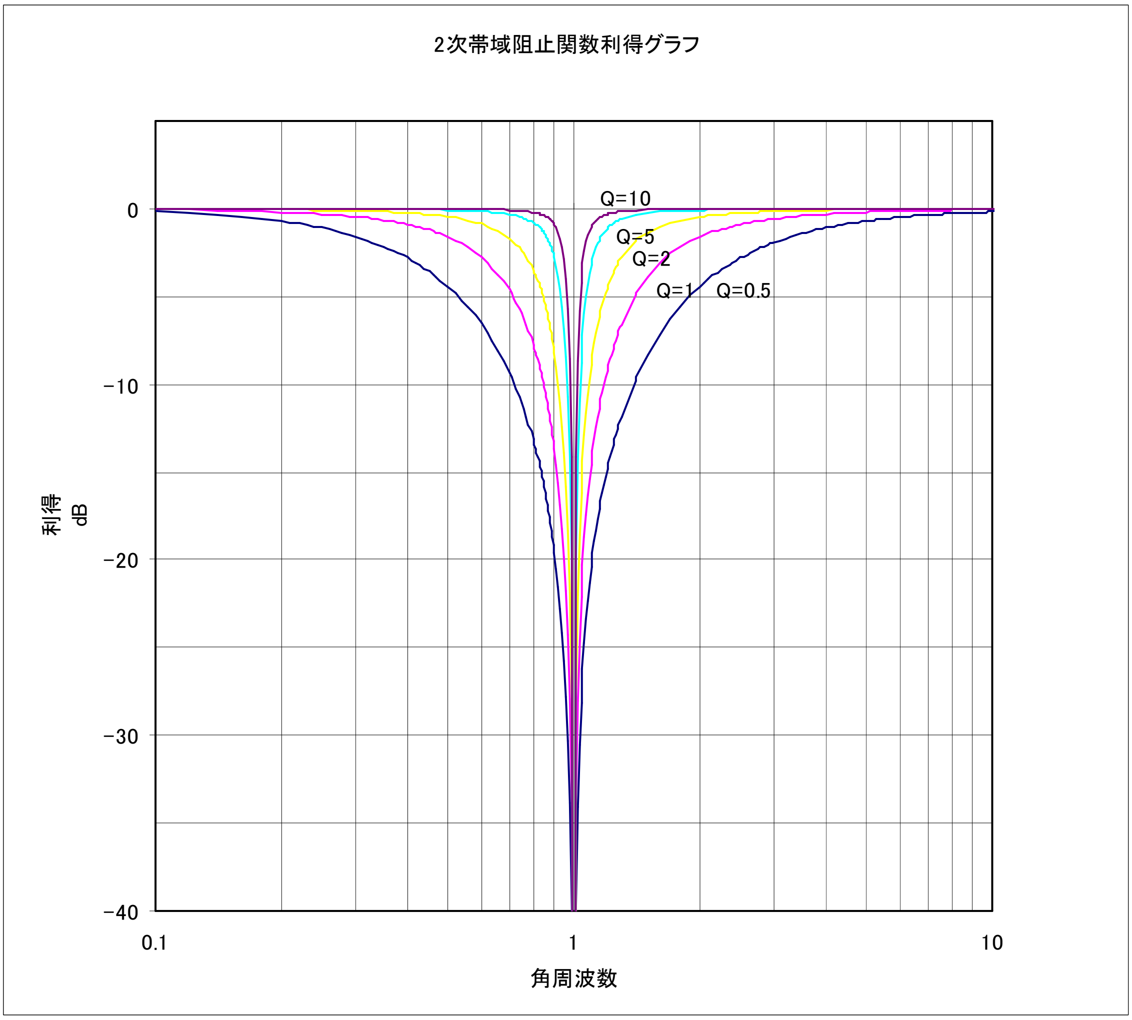
$$\frac{\omega_1}{a_0}=\frac{1}{Q}$$

$$\omega_1 Q=a_0$$

$$Q=\frac{a_0}{\omega_1}=\frac{a_0}{\omega_b-\omega_a}$$

です。

4ー①式の、2 次帯域阻止伝達関数利得グラフを下に示します。s=jω と置き、代表的 Q 値の各 ω で周波数伝達関数絶対値を求め、利得をデシベルで計算したものです。



4ー①式に s=j0=0 を代入し、角周波数 0 での利得を求めますと、

$$\left[\frac{s^2+1}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}\right]_{s=0}=1$$

になります。実数の 1 ですから、共役（きょうやく）も 1 です。絶対値も 1 です。2 次帯域阻止伝達関数の角周波数 0 での利得は 1 になります。

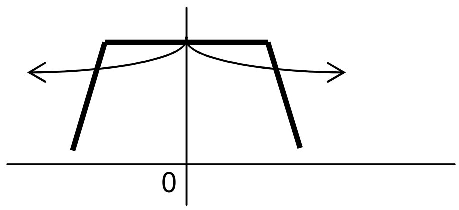
次に 4ー①式で、角周波数の大きな領域での利得を求めます。分子分母を s^2 で割り、極限での利得を求めますと、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{s^2+1}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\frac{s^2}{s^2}+\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2}+\frac{\frac{s}{Q}}{s^2}+\frac{1}{s^2}}=\lim_{s\to j\infty}\frac{1+\frac{1}{s^2}}{1+\frac{\frac{1}{Q}}{s}+\frac{1}{s^2}}=\frac{1}{1}=1$$

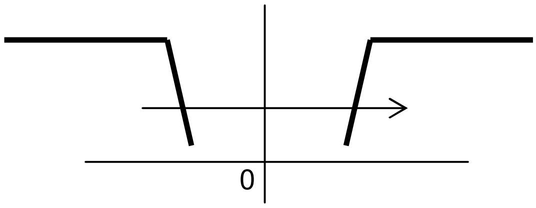
になり、1 であることが分ります。実数の 1 ですから、共役（きょうやく）も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求める為 s＝ーj∞を代入するまでも無く、2 次帯域阻止伝達関数の∞ [rad/sec] での利得は 1 です。

下の 3 つの図の様に、正規化低域通過フィルターを y 軸の所で両側に切り開いたのが正規化高域通過フィルターであり、更に正規化高域通過フィルターのー∞地点を 0 地点に移動させたのが、正規化帯域阻止フィルターです。

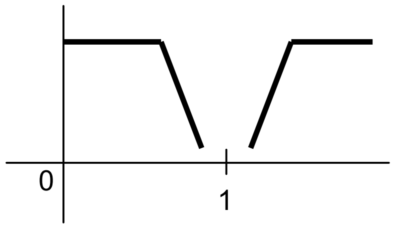
したがって、正規化低域通過フィルターの角周波数 0 での利得と、正規化帯域阻止フィルターの角周波数 0 での利得は同じになります。また、正規化低域通過フィルターの角周波数 0 での利得と、正規化帯域阻止フィルターの角周波数∞での利得は同じになります。「周波数変換」の章をご覧下さい。



正規化低域通過フィルター



正規化高域通過フィルター



正規化帯域阻止フィルター

2 次帯域阻止伝達関数を更に一般的にするには、H と言う係数を分子に付け、

$$\frac{H(s^2+1)}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}$$

という式にします。全ての角周波数での利得を、H で変化させます。これは偶数次チェビシェフ、偶数次連立チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合等に使います。

「周波数変換」の章で、帯域阻止フィルター設計用の正規化低域通過フィルターを設計しております。1 次低域通過伝達関数の a_0 と、帯域阻止フィルターの仕様である ω_a、ω_b から Q を計算し、2 次帯域阻止伝達関数の Q の値とすれば良い事が分ります。

この回路の実現方法も章を改めたいと思います。

こうして出来た正規化帯域阻止フィルターから、任意の角周波数の帯域阻止フィルターへの変更は素子値のスケーリングを行えば良いです。

(2) 2 次低域通過伝達関数の帯域阻止伝達関数への変換

2 次低域通過伝達関数は、

$$\frac{\omega_0{}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$$

です。何度も書きましたが、分子に付いている $\omega_0{}^2$ は s＝jω＝0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にする為の定数です。分子と分母の $\omega_0{}^2$ が約分され 1 になります。実数の 1 ですから、共役（きょうやく）も 1 です。絶対値も 1 です。一般的には H と言う定数を分子に付け、

$$\frac{H\omega_0{}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}\quad\cdot\cdot\cdot 4-②$$

となります。H により、全ての角周波数での利得が変化します。

これは偶数次チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合の利得調整等に使います。

「周波数変換」の章で検討しましたが、帯域阻止フィルターへの変換は、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を、$\frac{(\omega_b-\omega_a)s}{s^2+1}$ に置き換えれば良いです。

式をすっきりとさせる為、$\omega_b-\omega_a$ を ω_1 と置きます。つまり、

$$\frac{(\omega_b-\omega_a)s}{s^2+1}=\frac{\omega_1 s}{s^2+1}$$

です。4－②式の 2 次低域通過伝達関数の変換を行います。分母の変換は、

$$\begin{aligned}\left[s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right]_{s=\frac{s\omega_1}{s^2+1}} &=\left(\frac{\omega_1 s}{s^2+1}\right)^2+\frac{\omega_0}{Q}\bullet\frac{\omega_1 s}{s^2+1}+\omega_0{}^2\\ &=\frac{\omega_1{}^2 s^2}{(s^2+1)^2}+\frac{\omega_0\omega_1 s}{Q(s^2+1)}+\omega_0{}^2\\ &=\frac{Q\omega_1{}^2 s^2}{Q(s^2+1)^2}+\frac{\omega_0\omega_1 s(s^2+1)}{Q(s^2+1)(s^2+1)}+\frac{\omega_0{}^2 Q(s^2+1)^2}{Q(s^2+1)^2}\\ &=\frac{Q\omega_1{}^2 s^2+\omega_0\omega_1 s(s^2+1)+\omega_0{}^2 Q(s^2+1)^2}{Q(s^2+1)^2}\\ &=\frac{Q\omega_1{}^2 s^2+\omega_0\omega_1 s^3+\omega_0\omega_1 s+\omega_0{}^2 Q(s^4+2s^2+1)}{Q(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{Q\omega_1^{\ 2}s^2+\omega_0\omega_1 s^3+\omega_0\omega_1 s+\omega_0^{\ 2}Qs^4+2\omega_0^{\ 2}Qs^2+\omega_0^{\ 2}Q}{Q(s^2+1)^2}$$
$$=\frac{\omega_0^{\ 2}Qs^4+\omega_0\omega_1 s^3+Q\omega_1^{\ 2}s^2+2\omega_0^{\ 2}Qs^2+\omega_0\omega_1 s+\omega_0^{\ 2}Q}{Q(s^2+1)^2}$$
$$=\frac{\omega_0^{\ 2}Qs^4+\omega_0\omega_1 s^3+(\omega_1^{\ 2}+2\omega_0^{\ 2})Qs^2+\omega_0\omega_1 s+\omega_0^{\ 2}Q}{Q(s^2+1)^2}$$

となります。「4－②式の分子÷変換後の分母」を行いますと、

$$H\omega_0^{\ 2}\div\frac{\omega_0^{\ 2}Qs^4+\omega_0\omega_1 s^3+(\omega_1^{\ 2}+2\omega_0^{\ 2})Qs^2+\omega_0\omega_1 s+\omega_0^{\ 2}Q}{Q(s^2+1)^2}$$
$$=\frac{H\omega_0^{\ 2}Q(s^2+1)^2}{\omega_0^{\ 2}Qs^4+\omega_0\omega_1 s^3+(\omega_1^{\ 2}+2\omega_0^{\ 2})Qs^2+\omega_0\omega_1 s+\omega_0^{\ 2}Q}$$

になります。分子分母に $\frac{1}{\omega_0^{\ 2}Q}$ を掛けますと、

$$=\frac{\dfrac{H\omega_0^{\ 2}Q(s^2+1)^2}{\omega_0^{\ 2}Q}}{\dfrac{\omega_0^{\ 2}Q}{\omega_0^{\ 2}Q}s^4+\dfrac{\omega_0\omega_1}{\omega_0^{\ 2}Q}s^3+\dfrac{\omega_1^{\ 2}Q+2\omega_0^{\ 2}Q}{\omega_0^{\ 2}Q}s^2+\dfrac{\omega_0\omega_1}{\omega_0^{\ 2}Q}s+\dfrac{\omega_0^{\ 2}Q}{\omega_0^{\ 2}Q}}$$

$$=\frac{H(s^2+1)^2}{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}s+1}\quad\cdot\cdot\cdot 4-③$$

になりました。これが 2 次低域通過伝達関数を帯域阻止の伝達関数に変換したものです。
　4－③式に s＝j0＝0 を代入し、角周波数 0 での利得を求めますと、

$$\left[\frac{H(s^2+1)^2}{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}s+1}\right]_{s=0}=\frac{H\cdot 1}{1}=H$$

になります。分母は 1、分子は H となり、全体で H です。実数の H ですから、共役も H で

す。絶対値も H です。角周波数 0 での利得は H です。H＝1 の場合は 1 です。

次に 4ー③式で、角周波数の大きな領域での利得を求めます。分子分母を s^4 で割り、極限での利得を求めますと、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{H(s^2+1)^2}{s^4+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}s^3+\left(\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)s^2+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}s+1}$$

$$=\lim_{s\to j\infty}\frac{H\left(\frac{s^4}{s^4}+\frac{2s^2}{s^4}+\frac{1}{s^4}\right)}{\frac{s^4}{s^4}+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\frac{s^3}{s^4}+\left(\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)\frac{s^2}{s^4}+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\frac{s}{s^4}+\frac{1}{s^4}}$$

$$=\lim_{s\to j\infty}\frac{H\left(1+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right)}{1+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\frac{1}{s}+\left(\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)\frac{1}{s^2}+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4}}$$

$$=\frac{H\cdot 1}{1}=H$$

になり、H であることが分ります。実数の H ですから、共役（きょうやく）も H です。絶対値も H です。共役を求める為 s＝－j∞を代入するまでも無く、4ー③式の∞[rad/sec] での利得は 1 です。

4ー③式の 4 次伝達関数を 1 つの回路で実現するのは難しいので、因数分解し、2 つの 2 次伝達関数の直列接続で実現します。分母を因数分解する為＝0 と置きますと、

$$s^4+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}s^3+\left(\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)s^2+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}s+1=0$$

になります。この方程式は、s の 4 乗と s の 0 乗（定数の部分）の係数が同じです。s の 3 乗と s の 1 乗の係数も同じです。s の 2 乗の係数を軸にして、係数が左右対称になっています。この様な方程式を相反方程式と呼びます。相反方程式には決まった解き方があります。

まず両辺を s^2 で割り、変形して行きますと、

$$\frac{s^4}{s^2}+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\frac{s^3}{s^2}+\left(\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}}+2\right)\frac{s^2}{s^2}+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\frac{s}{s^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{0}{s^2}$$

$$s^2+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}s+\frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}=0$$

$$s^2+\frac{1}{s^2}+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\left(s+\frac{1}{s}\right)+\frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2=0 \quad \cdot\cdot\cdot 4-④$$

になります。$s+\frac{1}{s}=y$と置き、y の 2 乗を計算して見ますと、

$$y^2=\left(s+\frac{1}{s}\right)^2=\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)=s^2+1+1+\frac{1}{s^2}=s^2+\frac{1}{s^2}+2$$

になり、

$$s^2+\frac{1}{s^2}=y^2-2$$

となります。この結果を 4－④式に代入しますと、

$$y^2-2+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}y+\frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2=0$$

$$y^2+\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}y+\frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}=0$$

と言う 2 次方程式になりました。この 2 次方程式の根（＝解）は、

$$y=\frac{-\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0 Q}\right)^2-4\cdot\frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}}}{2}$$

になります。ルートの中は Q が 0.5 を越える場合、負になります。したがって y は Q が 0.5 を越える場合、共役（きょうやく）複素数になります。

　y の値はまだ計算の途中であり、s の根（＝解）を求めなくてはいけません。y を求め、それぞれの y について s の値を求めます。$s+\frac{1}{s}=y$ですので、

$$s-y+\frac{1}{s}=0$$

です。この式の両辺に s を掛け、

$$s^2-ys+1=0$$

となります。この２次方程式の根（＝解）は、

$$s=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$$

です。この式のルートの中を考えます。先ほど説明しました様に、Q が 0.5 を超える時、y は複素数になります。Q は 0.5 を超える場合が多く、ほとんどの y が複素数です。上式で複素数の y を 2 乗して 4 を引いても複素数になりますので、複素数に付いているルートを外さなければなりません。ルートの中の複素数を、例えば$a+jb$ とした場合、$\sqrt{a+jb}$ の計算は、

$$\sqrt{a+jb}=\{\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+j\sin\theta)\}^{\frac{1}{2}}$$ ・・・・極形式の平方根に直し

$$=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta+j\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$ ・・・・ 指数法則を使い

$$=\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+j\sin\frac{\theta}{2}\right)$$ ・・・ド・モアブルの定理を使い

$$=\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}+j\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

になります。ド・モアブルの定理は、$(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$ です。また、極形式に直す時に使う θ は、$\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ です。

y は、ほとんどが共役（きょうやく）複素数で 2 つ出ます。それぞれの y について、s も共役複素数で 2 つ出ます。s は合計 4 つ出て来ますが、共役複素数根が 2 組です。共役複素数根 1 組で 2 次式が 1 つ出来ますから、2 次式が 2 つ出来ます。4－④式は 2 次式 2 つに因数分解出来ます。

次に、4－③式の分子を因数分解したものを、今作り出した 2 つの分母の上に載せます。

分子の因数分解は、$H(s^2+1)^2$ から括弧の肩の 2 乗を外し、H を $\sqrt{H}$ にすれば良いのですが、H は自由ですので H のままにしておきます。出来た伝達関数を ω_{0A} と Q_A、ω_{0B} と Q_B で表しますと、

$$\frac{H(s^2+1)}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}$$ ・・・4－⑤

と

$$\frac{H(s^2+1)}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+{\omega_{0B}}^2}\quad\cdots 4-⑥$$

になります。4ー⑤および 4ー⑥式の分母は、4ー③式分母を因数分解したものです。4ー⑤式分母の定数項である ${\omega_{0A}}^2$ と、4ー⑥式分母の定数項である ${\omega_{0B}}^2$ を掛ければ、4ー③式分母の定数項である 1 になる筈です。つまり ${\omega_{0A}}^2$ と ${\omega_{0B}}^2$ は互いに逆数の関係になります。

4ー⑤式および 4ー⑥式の分子は s＝j1 で 0 になります。分子が 0 になりますので、零点角周波数を 1 とする、零点の有る 2 次低域通過伝達関数と零点の有る 2 次高域通過伝達関数です。

${\omega_{0A}}^2$ と ${\omega_{0B}}^2$ で、零点の 1 よりも小さいほうが、零点の有る 2 次低域通過伝達関数となり、零点の 1 よりも大きいほうが、零点の有る 2 次高域通過伝達関数になります。

ここでは、${\omega_{0A}}^2$ が 1 よりも小さく、${\omega_{0B}}^2$ が 1 よりも大きいと仮定します。したがって 4ー⑤式が零点の有る 2 次低域通過伝達関数、4ー⑥式が零点の有る 2 次高域通過伝達関数になります。

H を 1 として、それぞれ角周波数 0 での利得を求めて見ます。4ー⑤式に s＝j0＝0 を代入し、

$$\left[\frac{s^2+1}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2}\right]_{s=0}=\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}$$

となります。実数の $\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}$ ですから、共役も $\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}$ です。絶対値も $\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}$ です。4ー⑤式の H＝1、0[rad/sec] での利得は $\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}$ です。同様に 4ー⑥式は、

$$\left[\frac{s^2+1}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+{\omega_{0B}}^2}\right]_{s=0}=\frac{1}{{\omega_{0B}}^2}$$

になり、4ー⑥式の H＝1、0[rad/sec] での利得は$\dfrac{1}{{\omega_{0B}}^2}$です。

$ {\omega_{0A}}^2 $が 1 よりも小さいと仮定したので、$\dfrac{1}{{\omega_{0A}}^2}$は 1 よりも大きくなります。

$ {\omega_{0B}}^2 $が 1 よりも大きいと仮定したので、$\dfrac{1}{{\omega_{0B}}^2}$は 1 よりも小さくなります。

4ー⑤、4ー⑥両式の、角周波数 0 での利得を掛けあわせた値は、$\dfrac{1}{{\omega_{0A}}^2}\bullet\dfrac{1}{{\omega_{0B}}^2}=1$です。

$ {\omega_{0A}}^2 $と${\omega_{0B}}^2$は逆数関係ですから、そのまま掛けても、両方を逆数にしてから掛けても 1 になります。

次に H を 1 として、それぞれ角周波数が非常に大きな領域での利得を考えます。4ー⑤式は、

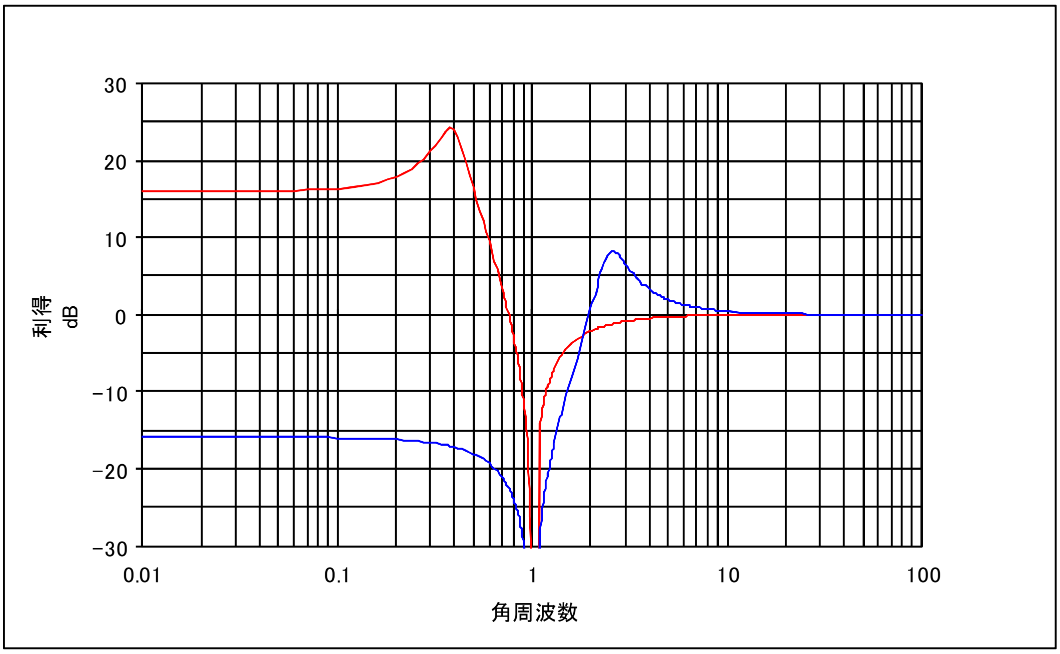
$$\lim_{s\to j\infty}\frac{s^2+1}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}}{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}s}{Q_A}}{s^2}+\dfrac{{\omega_{0A}}^2}{s^2}}=\lim_{s\to j\infty}\frac{1+\dfrac{1}{s^2}}{1+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}}{s}+\dfrac{{\omega_{0A}}^2}{s^2}}=1$$

となり、1 であることが分ります。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求める為 s＝ーj∞を代入するまでも無く、4ー⑤式の H＝1、∞[rad/sec] での利得は、1 と分ります。同様に 4ー⑥式も、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{s^2+1}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+{\omega_{0B}}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}}{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}s}{Q_B}}{s^2}+\dfrac{{\omega_{0B}}^2}{s^2}}=\lim_{s\to j\infty}\frac{1+\dfrac{1}{s^2}}{1+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}}{s}+\dfrac{{\omega_{0B}}^2}{s^2}}=1$$

となり、1 であることが分ります。

Hを1とした場合､4ー⑤式および4ー⑥式の利得をグラフにすると下図の様になります。グラフでの利得は dB 表示です。



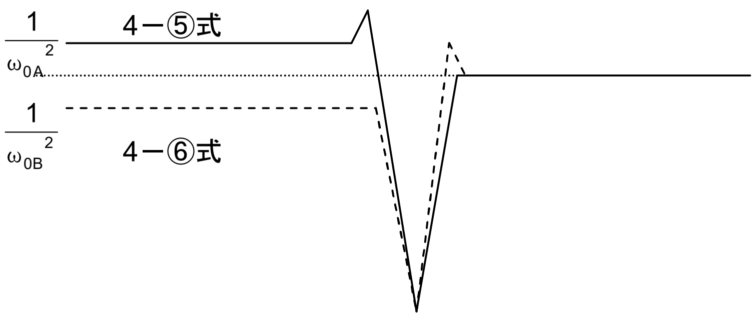
赤が 4ー⑤式、零点の有る 2 次低域通過伝達関数です。青が 4ー⑥式、零点の有る 2 次高域通過伝達関数です。

角周波数 0 での総合利得は、4ー⑤式の利得と 4ー⑥式の利得が互いに逆数関係になっている為、1＝0[dB]になります。

このグラフで、1 以下の低い角周波数での利得の違いが気になります。赤の 4ー⑤式の利得は、1 以下の低い角周波数の所で大きく、更に減衰の手前で盛り上がっています。その為フィルターの許容入力が小さくなっています。

H を 1 とした場合、4ー⑤式および 4ー⑥式の利得を図式化すると下図の様になります。

角周波数 0 での総合利得は、4ー⑤式の利得と 4ー⑥式の利得が互いに逆数関係になっている為、1 になります。



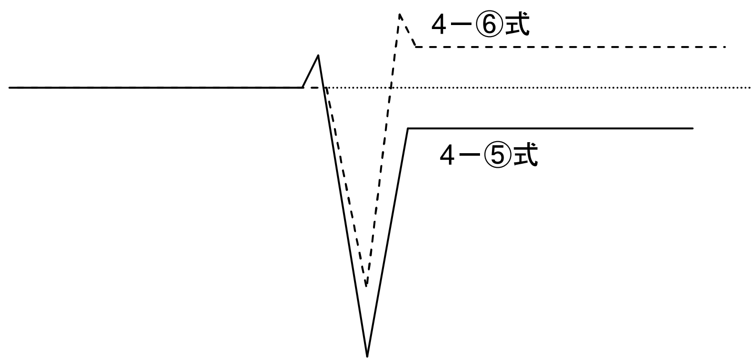
4ー⑤式と 4ー⑥式で、低い角周波数での利得の違いが気になります。　4ー⑤式の利得が大きい所でサチり易いのです。サチるとは電源電圧以上の出力は出ない為、大きな入力が

入って来た時、出力が歪む事です。

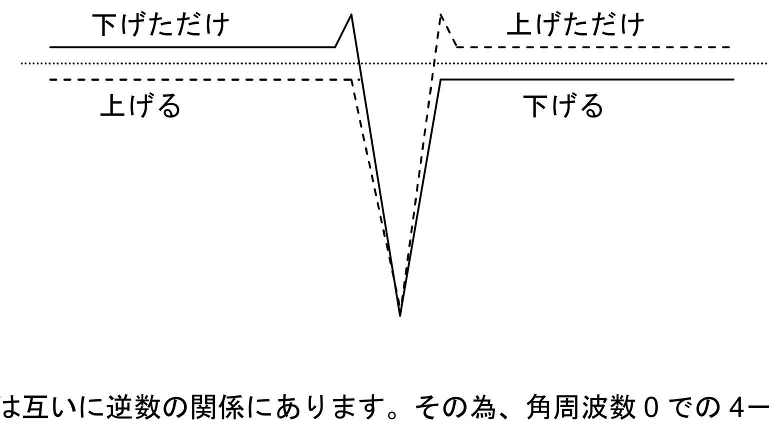
フィルターの許容入力を大きくする為、4ー⑤式分子に係数をつけ、利得を抑えたくなります。角周波数 0 での利得を下げる為、強引に角周波数 0 での利得、$\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}$ の逆数を分子に付けてしまうと、角周波数 0 での 4ー⑥式との総合利得が 1 になりません。

4ー⑥式にも角周波数 0 での利得、$\frac{1}{{\omega_{0B}}^2}$ の逆数を分子に付けますと、角周波数 0 での総合利得は 1 になります。

しかしこれでは 4ー⑤式の低い角周波数範囲での最大利得が、4ー⑥式の高い角周波数での最大利得に変身するだけで、許容入力は増加しません。下図の通りです。



フィルターの許容入力が小さくなるのを防止する為には、4ー⑤式分子と 4ー⑥式分子に、丁度良い係数をつけなければなりません。下図の通りです。



${\omega_{0A}}^2$ と ${\omega_{0B}}^2$ は互いに逆数の関係にあります。その為、角周波数 0 での 4ー⑤式の利得と 4ー⑥式の利得も逆数関係になり、総合利得が 1 になります。

丁度良い係数として、4ー⑤式分子に 1 より小さい$\dfrac{1}{\alpha}$と言う係数を付けた場合、4ー⑥式分子には 1 より大きい α と言う係数を付けなければ、総合利得が 1 になりません。係数も逆数にします。

現在、4ー⑤式の角周波数 0 での利得は$\dfrac{1}{{\omega_{0A}}^2}$です。したがって、$\dfrac{1}{\alpha}$と言う係数を付けた上図実線の角周波数 0 での利得は、$\dfrac{\frac{1}{\alpha}}{{\omega_{0A}}^2}$になります。

現在、4ー⑥式の角周波数が大きい領域での利得は 1 です。したがって、α と言う係数を付けた上図破線の角周波数大領域での利得は、α になります。両方の利得が同じならば、

$$\frac{\frac{1}{\alpha}}{{\omega_{0A}}^2}=1\cdot\alpha$$

が成り立ちます。式を変形しますと、

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{{\omega_{0A}}^2}=\alpha$$

$$\frac{1}{\alpha^2{\omega_{0A}}^2}=1$$

$$\frac{1}{\alpha^2}={\omega_{0A}}^2$$

となり、

$$\frac{1}{\alpha}=\pm\sqrt{{\omega_{0A}}^2}=\pm\omega_{0A}$$

となります。フィルターの伝達関数分子の係数は＋でなければ、利得がひっくり返りますので、4ー⑤式に付ける係数はω_{0A}となります。$\alpha=\dfrac{1}{\omega_{0A}}=\omega_{0B}$となり、4ー⑥式分子に付ける係数は$\omega_{0B}$となります。4ー⑤式分子に$\omega_{0A}$の係数を付けた時、角周波数 0 での利得は、

$$\left[\frac{\omega_{0A}(s^2+1)}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+{\omega_{0A}}^2}\right]_{s=0}=\frac{\omega_{0A}}{{\omega_{0A}}^2}=\frac{1}{\omega_{0A}}$$

となり、高い角周波数での利得は、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{\omega_{0A}(s^2+1)}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\omega_{0A}s^2}{s^2}+\dfrac{\omega_{0A}}{s^2}}{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}s}{Q_A}}{s^2}+\dfrac{\omega_{0A}{}^2}{s^2}}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\omega_{0A}+\dfrac{\omega_{0A}}{s^2}}{1+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}}{s}+\dfrac{\omega_{0A}{}^2}{s^2}}=\omega_{0A}$$

になります。4ー⑥式分子に ω_{0B} の係数を付けた時、角周波数 0 での利得は、

$$\left[\frac{\omega_{0B}(s^2+1)}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}\right]_{s=0}=\frac{\omega_{0B}}{\omega_{0B}{}^2}=\frac{1}{\omega_{0B}}$$

となり、高い角周波数での利得は、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{\omega_{0B}(s^2+1)}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\omega_{0B}s^2}{s^2}+\dfrac{\omega_{0B}}{s^2}}{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}s}{Q_B}}{s^2}+\dfrac{\omega_{0B}{}^2}{s^2}}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\omega_{0B}+\dfrac{\omega_{0B}}{s^2}}{1+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}}{s}+\dfrac{\omega_{0B}{}^2}{s^2}}=\omega_{0B}$$

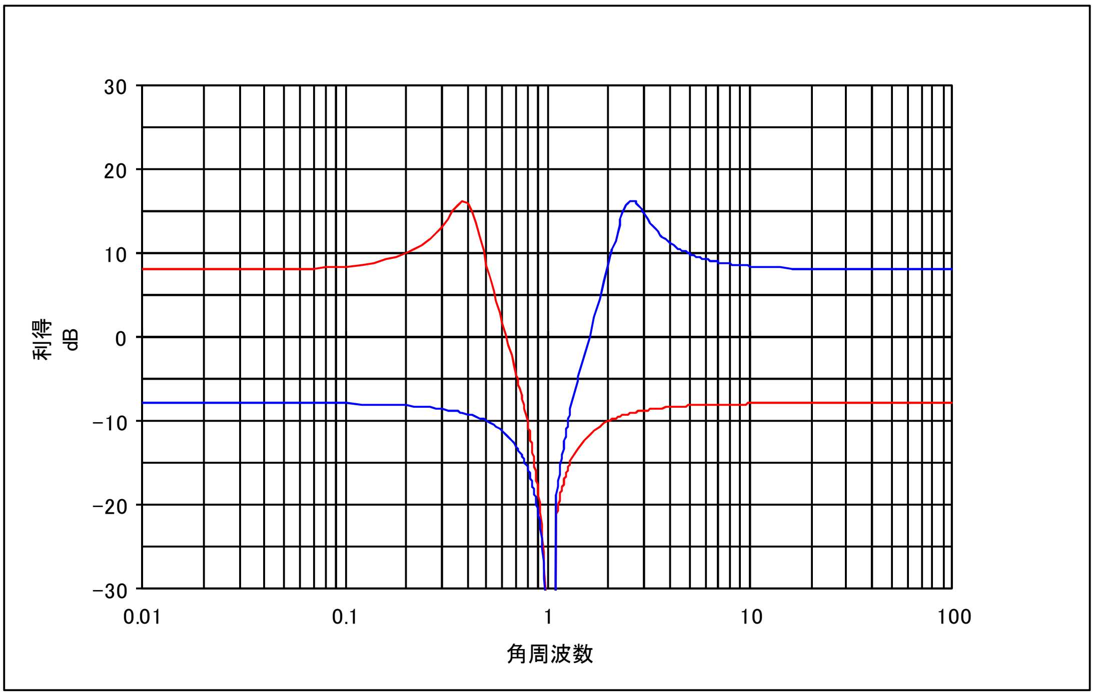
となります。

4ー⑤式分子に係数 ω_{0A} を付けた場合、高い角周波数での利得は ω_{0A} になります。$\dfrac{1}{\omega_{0B}}$ と同じです。これは、4ー⑥式分子に係数 ω_{0B} を付けた時の、角周波数 0 での利得と同じです。

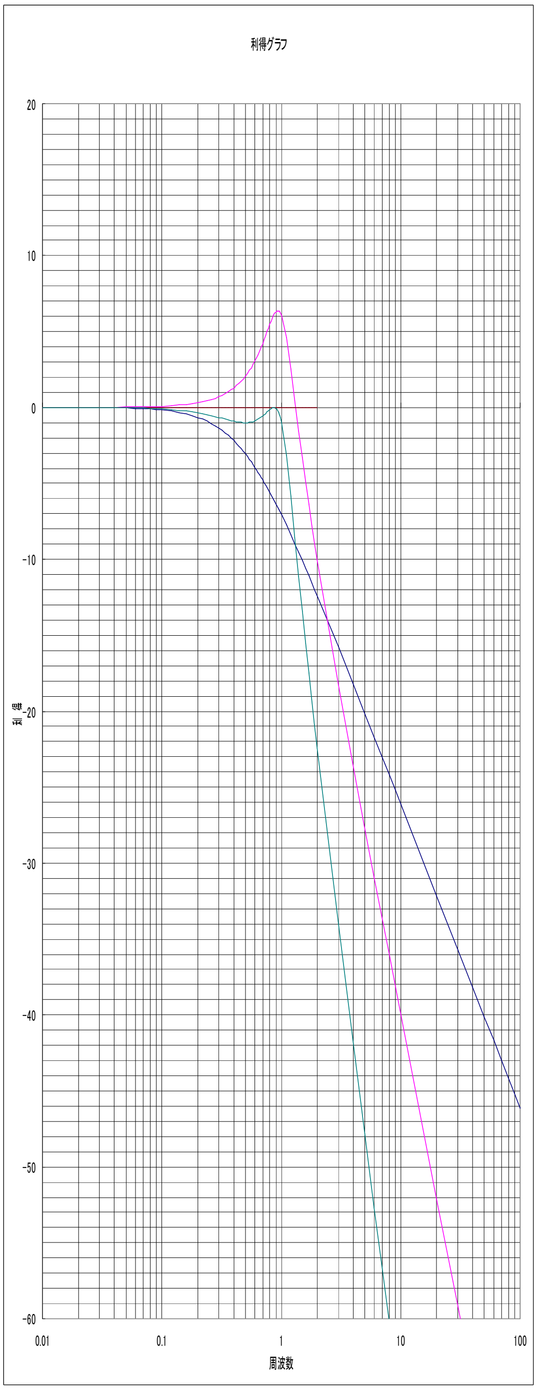
4ー⑥式分子に係数 ω_{0B} を付けた場合、高い角周波数での利得は ω_{0B} になります。$\dfrac{1}{\omega_{0A}}$ と同じです。これは、4ー⑤式分子に係数 ω_{0A} を付けた時の、角周波数 0 での利得と同じです。

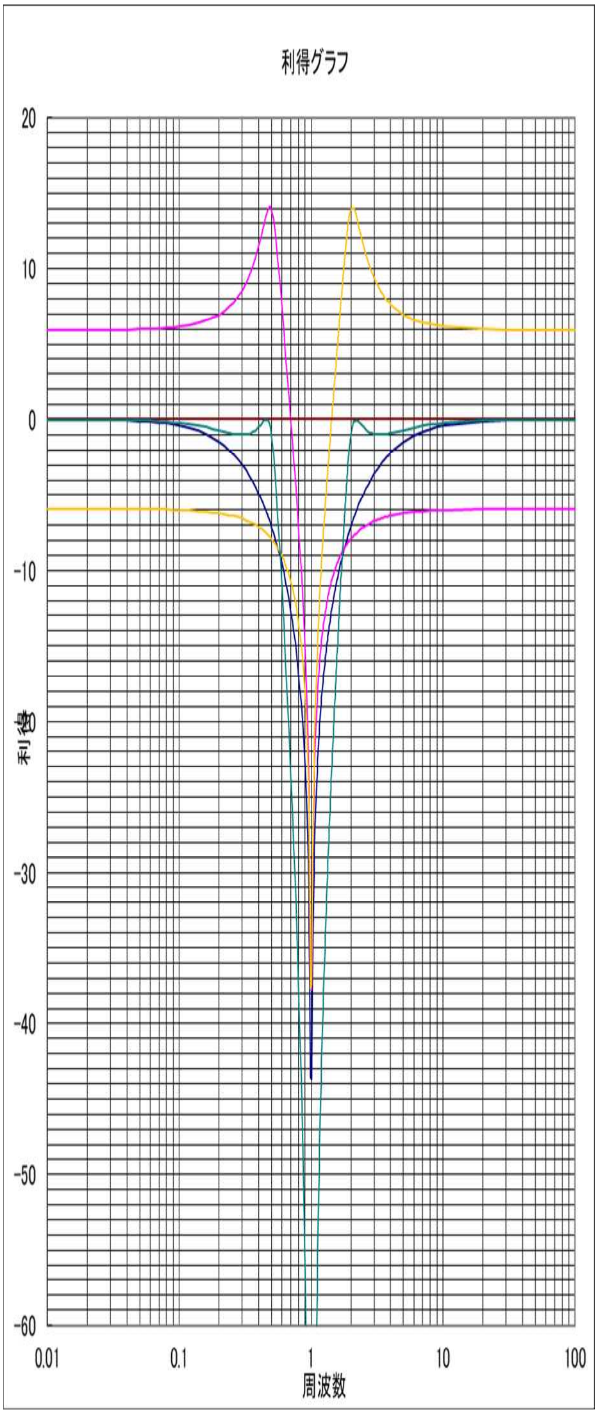
したがって、両者の最大利得は同じになるので、このフィルターの許容入力が増加します。それぞれが逆数関係になるので総合利得は変わりません。

4ー⑤式および 4ー⑥式の分子に、係数を付けた場合の利得をグラフにしますと、下図の様になります。二つの山のピークがそろっています。赤がだいぶ低くなりました。



下に変換の具体例を示します。下左図が変換前の 3 次チェビシェフ低域通過フィルターです。青が 1 次低域通過関数、ピンクが 2 次低域通過関数です。緑が最終出力です。
下右図が変換後の 3 次チェビシェフ帯域阻止フィルターです。青が 1 次低域通過関数を変換した 2 次帯域阻止関数です。ピンクとオレンジが、2 次低域通過関数を変換した、零点の有る 2 次低域通過関数と零点のある 2 次高域通過関数です。緑が最終出力です。
拡大すると良く見えます。





(3) 零点のある２次の低域通過伝達関数の帯域阻止伝達関数への変換

零点の有る２次低域通過伝達関数は、

$$\frac{\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)}{\omega_Z{}^2\left(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2\right)}$$

です。周波数変換の例 1、の低域通過伝達関数要素中、2 次低域通過伝達関数とノッチ要素を直列接続した形です。何度も書きましたが、分子に付いている ω_0^2、分母に付いている ω_Z^2 は、s＝jω＝0、つまり角周波数 0 での利得を 1 にする為の定数です。分子と分母が約分され 1 になります。実数の 1 ですから、共役（きょうやく）も 1 です。絶対値も 1 です。各定数を分子分母に分けず、$\dfrac{\omega_0^2}{\omega_Z^2}$ として分子に載せても良いです。一般的には H と言う定数を分子に付け、

$$\frac{H\omega_0^2(s^2+\omega_Z^2)}{\omega_Z^2\left(s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2\right)}\quad\cdot\cdot\cdot 4-⑦$$

となります。H により、この式に入力する全ての角周波数での利得が変化します。

これは偶数次連立チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では無い場合の利得調整等に使います。

「周波数変換」の章で検討しましたが、帯域阻止フィルターへの変換は、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を、$\dfrac{(\omega_b-\omega_a)s}{s^2+1}$ に置き換えれば良いです。式をすっきりとさせる為、$\omega_b-\omega_a$ を ω_1 と置きますと、

$$\frac{s(\omega_b-\omega_a)}{s^2+1}=\frac{\omega_1 s}{s^2+1}$$

になります。4ー⑦式の分母の変換は、

$$\left[\omega_Z^2\left(s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2\right)\right]_{s=\frac{s_1 s}{s^2+1}}=\omega_Z^2\left\{\left(\frac{\omega_1 s}{s^2+1}\right)^2+\frac{\omega_0}{Q}\cdot\frac{\omega_1 s}{s^2+1}+\omega_0^2\right\}$$

$$=\omega_Z^2\left\{\frac{\omega_1^2 s^2}{(s^2+1)^2}+\frac{\omega_0\omega_1 s}{Q(s^2+1)}+\omega_0^2\right\}$$

$$=\omega_Z^2\left\{\frac{Q\omega_1^2 s^2}{Q(s^2+1)^2}+\frac{\omega_0\omega_1 s(s^2+1)}{Q(s^2+1)(s^2+1)}+\frac{\omega_0^2 Q(s^2+1)^2}{Q(s^2+1)^2}\right\}$$

$$=\omega_Z{}^2\left\{\frac{Q\omega_1{}^2s^2}{Q(s^2+1)^2}+\frac{\omega_0\omega_1s^3+\omega_0\omega_1s}{Q(s^2+1)^2}+\frac{\omega_0{}^2Qs^4+2\omega_0{}^2Qs^2+\omega_0{}^2Q}{Q(s^2+1)^2}\right\}$$

$$=\omega_Z{}^2\left\{\frac{\omega_0{}^2Qs^4+\omega_0\omega_1s^3+Q\omega_1{}^2s^2+2\omega_0{}^2Qs^2+\omega_0\omega_1s+\omega_0{}^2Q}{Q(s^2+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{\omega_Z{}^2\{\omega_0{}^2Qs^4+\omega_0\omega_1s^3+(\omega_1{}^2+2\omega_0{}^2)Qs^2+\omega_0\omega_1s+\omega_0{}^2Q\}}{Q(s^2+1)^2}$$

となります。4ー⑦式の分子の変換は、

$$\left[H\omega_0{}^2(s^2+\omega_Z{}^2)\right]_{s=\frac{\omega_1 s}{s^2+1}}=H\omega_0{}^2\left\{\left(\frac{\omega_1 s}{s^2+1}\right)^2+\omega_Z{}^2\right\}$$

$$=H\omega_0{}^2\left\{\frac{\omega_1{}^2s^2}{(s^2+1)^2}+\omega_Z{}^2\right\}$$

$$=H\omega_0{}^2\left\{\frac{\omega_1{}^2s^2}{(s^2+1)^2}+\frac{\omega_Z{}^2(s^2+1)^2}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2(\omega_1{}^2s^2+\omega_Z{}^2s^4+2\omega_Z{}^2s^2+\omega_Z{}^2)}{(s^2+1)^2}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}}{(s^2+1)^2}$$

となります。分子÷分母を行いますと、

$$\frac{H\omega_0{}^2\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}}{(s^2+1)^2}\div\frac{\omega_Z{}^2\{\omega_0{}^2Qs^4+\omega_0\omega_1s^3+(\omega_1{}^2+2\omega_0{}^2)Qs^2+\omega_0\omega_1s+\omega_0{}^2Q\}}{Q(s^2+1)^2}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}}{(s^2+1)^2}\cdot\frac{Q(s^2+1)^2}{\omega_Z{}^2\{\omega_0{}^2Qs^4+\omega_0\omega_1s^3+(\omega_1{}^2+2\omega_0{}^2)Qs^2+\omega_0\omega_1s+\omega_0{}^2Q\}}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}Q}{\omega_Z{}^2\{\omega_0{}^2Qs^4+\omega_0\omega_1s^3+(\omega_1{}^2+2\omega_0{}^2)Qs^2+\omega_0\omega_1s+\omega_0{}^2Q\}}$$

$$=\frac{H\omega_0{}^2Q\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}}{\omega_Z{}^2\omega_0{}^2Q\left\{s^4+\dfrac{\omega_0\omega_1}{\omega_0{}^2Q}s^3+\dfrac{(\omega_1{}^2+2\omega_0{}^2)Q}{\omega_0{}^2Q}s^2+\dfrac{\omega_0\omega_1}{\omega_0{}^2Q}s+1\right\}}$$

$$=\frac{H\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}}{\omega_Z{}^2\left\{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s+1\right\}}\quad\cdot\cdot\cdot 4-⑧$$

になります。4－⑧式の分子分母に$\dfrac{1}{\omega_Z{}^2}$を掛けますと、

$$=\frac{\dfrac{1}{\omega_Z{}^2}\bullet H\{\omega_Z{}^2s^4+(\omega_1{}^2+2\omega_Z{}^2)s^2+\omega_Z{}^2\}}{\dfrac{1}{\omega_Z{}^2}\bullet\omega_Z{}^2\left\{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s+1\right\}}$$

$$=\frac{H\left\{s^4+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)s^2+1\right\}}{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s+1}\quad\cdot\cdot\cdot 4-⑨$$

になりました。これが零点の有る 2 次低域通過伝達関数を帯域阻止の伝達関数に変換したものです。

4－⑨式に s＝j0＝0 を代入し、角周波数 0 での利得を求めますと、

$$\left[\frac{H\left\{s^4+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)s^2+1\right\}}{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0Q}s+1}\right]_{s=0}=\frac{H\cdot 1}{1}=H$$

になります。分母は 1、分子は H となり、全体で H です。実数の H ですから、共役も H です。絶対値も H です。角周波数 0 での利得は H です。H＝1 の場合は 1 です。

次に 4－⑨式で、角周波数の大きな領域での利得を求めます。分子分母を s^4 で割り、極限での利得を求めますと、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{H\left\{s^4+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)s^2+1\right\}}{s^4+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}s^3+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)s^2+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}s+1}$$

$$=\lim_{s\to j\infty}\frac{H\left\{\dfrac{s^4}{s^4}+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)\cdot\dfrac{s^2}{s^4}+\dfrac{1}{s^4}\right\}}{\dfrac{s^4}{s^4}+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\dfrac{s^3}{s^4}+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)\dfrac{s^2}{s^4}+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\dfrac{s}{s^4}+\dfrac{1}{s^4}}$$

$$=\lim_{s\to j\infty}\frac{H\left\{1+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)\cdot\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s^4}\right\}}{1+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\dfrac{1}{s}+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^2}+2\right)\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{\omega_1}{\omega_0 Q}\cdot\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{1}{s^4}}$$

$$=\frac{H\cdot 1}{1}=H$$

になり、H であることが分ります。実数の H ですから、共役（きょうやく）も H です。絶対値も H です。共役を求める為 s＝－j∞を代入するまでも無く、4－⑨式の∞[rad/sec] での利得は H です。H＝1 の場合は 1 です。角周波数 0 での利得と同じです。

4－⑨式の 4 次伝達関数を 1 つの回路で実現するのは難しいので、因数分解し、2 つの 2 次伝達関数の直列接続で実現します。4－⑨式の分母は、4－③式の分母と全く同じ相反方程式です。2 次式 2 つに分ける方法は、既に(2)で説明致しましたので、省略致します。

4－⑨式分子の中括弧内の式、$s^4+\left(\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)s^2+1$も、2 次式 2 つに分けなくてはいけません。この式を＝0 と置きます。

$$s^4+\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2\right)s^2+1=0$$

これを複 2 次方程式と呼びます。複 2 次方程式は次のように因数分解します。s^2＝x、$\dfrac{\omega_1{}^2}{\omega_Z{}^2}+2=b$ と置きますと、

$$x^2+bx+1=0$$

になります。これは２次方程式ですから、x の根（＝解）は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

となります。s^2＝x なので、s＝±$\sqrt{x}$ です。したがって s の根（＝解）は、

$$s = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}}$$

となります。4－⑨式分子の中括弧内の式は因数定理により、

$$s^4 + bs^2 + 1 = \left(s - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)$$

$$\left(s - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}}\right)$$

$$= \left(s^2 - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)\left(s^2 - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)$$

$$= \left(s^2 + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)\left(s^2 + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)$$

と因数分解されます。$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ を $\omega_{ZA}{}^2$、$\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ を $\omega_{ZB}{}^2$ とします。相反方程式の方法で因数分解した分母の ω_0 を ω_{0A} と ω_{0B}、同じく Q を Q_A と Q_B で表しますと、4－⑨式は、H を付け、

$$\frac{H(s^2 + \omega_{ZA}{}^2)}{s^2 + \frac{\omega_{0A}}{Q_A}s + \omega_{0A}{}^2} \quad ・・・4－⑩$$

と、

$$\frac{H(s^2+\omega_{ZB}{}^2)}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}$$ ・・・4－⑪

の２つの式に因数分解出来ます。分子と分母の組み合わせは自由です。つまり、

$$\frac{H(s^2+\omega_{ZB}{}^2)}{s^2+\frac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}$$ ・・・4－⑫

と、

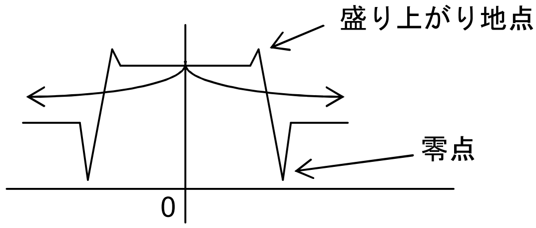
$$\frac{H(s^2+\omega_{ZA}{}^2)}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}$$ ・・・4－⑬

でも良いのですが、以下お読みになれば分かります様に、ω_0 と ω_Z は近いものどうしを組み合わせた方が、より大きな入力に対して歪無く（サチる事無く）出力されます。4－⑩⑪式、4－⑫⑬式の分母は、4－⑨式分母を因数分解したものです。s の定数項である 4－⑩⑫式の $\omega_{0A}{}^2$ と 4－⑪⑬式の $\omega_{0B}{}^2$ を掛ければ、4－⑨式分母の定数項である 1 になります。つまり、$\omega_{0A}{}^2$ と $\omega_{0B}{}^2$ は互いに逆数の関係になります。どちらかが 1 より大きく、どちらかが 1 より小さいのです。

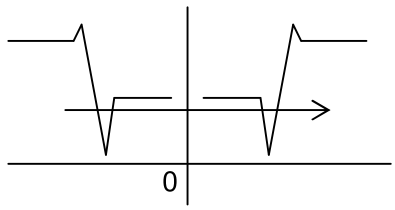
一方 4－⑩⑪式、4－⑫⑬式の分子は、4－⑨式分子を因数分解したものです。s の定数項である 4－⑩⑬式の $\omega_{ZA}{}^2$ と 4－⑪⑫式の $\omega_{ZB}{}^2$ を掛ければ、4－⑨式分子の定数項である 1 になります。つまり、$\omega_{ZA}{}^2$ と $\omega_{ZB}{}^2$ も互いに逆数の関係になります。どちらかが 1 より大きく、どちらかが 1 より小さいです。

4－⑩⑫式、4－⑪⑬式は、零点角周波数を $\omega_{ZA}{}^2$ または $\omega_{ZB}{}^2$ とする、零点の有る 2 次低域通過伝達関数、または零点の有る 2 次高域通過伝達関数です。

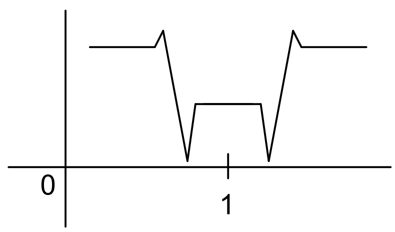
帯域阻止フィルターの零点 $\omega_{ZA}{}^2$ と $\omega_{ZB}{}^2$ は、必ず盛り上がり地点 $\omega_{0A}{}^2$ と $\omega_{0B}{}^2$ の内側に有ります。下図をご覧下さい。



低域通過フィルター



高域通過フィルター



帯域阻止フィルター

$\omega_{0A}{}^2$と$\omega_{0B}{}^2$で、零点角周波数$\omega_{ZA}{}^2$と$\omega_{ZB}{}^2$よりも小さいほうが、零点の有る 2 次低域通過伝達関数となり、零点角周波数$\omega_{ZA}{}^2$と$\omega_{ZB}{}^2$よりも大きいほうが、零点の有る 2 次高域通過伝達関数になります。

ここでは、$\omega_{0A}{}^2$が、$\omega_{ZA}{}^2$と$\omega_{ZB}{}^2$よりも小さく、$\omega_{0B}{}^2$が、$\omega_{ZA}{}^2$と$\omega_{ZB}{}^2$よりも大きいと仮定します。

したがって 4ー⑩⑫式が零点の有る 2 次低域通過伝達関数、4ー⑪⑬式が零点の有る 2 次高域通過伝達関数になります。

H を 1 として、それぞれで角周波数 0 での利得を求めます。4ー⑩式に s＝j0＝0 を代入

し、

$$\left[\frac{s^2+\omega_{ZA}{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}\right]_{s=0}=\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$$

となります。実数の$\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$ですから、共役も$\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$です。絶対値も$\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$です。

4ー⑩式の H＝1、0[rad/sec] での利得は、$\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$です。分母よりも大きな分子が乗っているので、1 よりも大きな数です。増幅されます。

同様に 4ー⑫式は、

$$\left[\frac{s^2+\omega_{ZB}{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}\right]_{s=0}=\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$$

となります。実数の$\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$ですから、共役も$\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$です。絶対値も$\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$です。4ー⑫式の H＝1、0[rad/sec] での利得は、$\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}$です。4ー⑩式よりも更に大きな分子が乗っているので、4ー⑩式よりも更に大きな数です。更に増幅されます。

同様に 4ー⑪式は、

$$\left[\frac{s^2+\omega_{ZB}{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}\right]_{s=0}=\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0B}{}^2}$$

になります。4ー⑪式の H =1、0[rad/sec] での利得は、分母よりも小さな分子が乗っているので、1 よりも小さくなります。減衰です。

同様に 4ー⑬式は、

$$\left[\frac{s^2+\omega_{ZA}{}^2}{s^2+\frac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}\right]_{s=0}=\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0B}{}^2}$$

になります。4ー⑬式の H＝1、0[rad/sec] での利得は、4ー⑪式よりも更に小さな分子が乗っているので、更に小さくなります。もっと減衰です。

4ー⑩、4ー⑪両式の、角周波数 0 での利得を掛けあわせた値は、$\frac{\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{0A}{}^2}\bullet\frac{\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{0B}{}^2}=1$です。

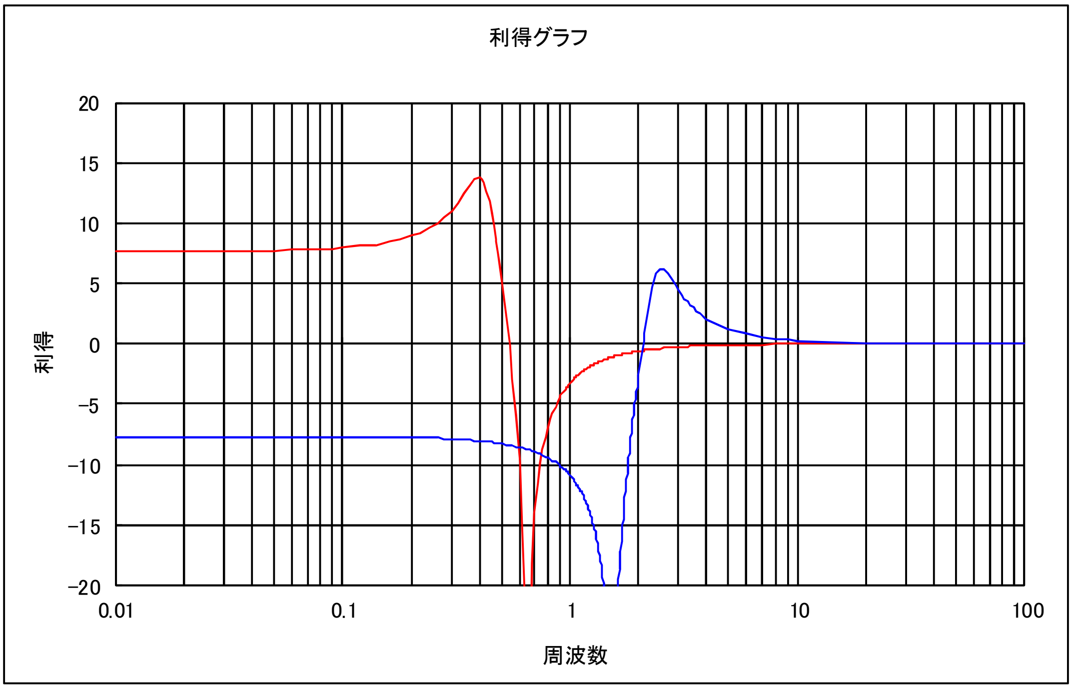
分母の$\omega_{0A}{}^2$と$\omega_{0B}{}^2$は、逆数関係です。分子の$\omega_{ZA}{}^2$と$\omega_{ZB}{}^2$も、逆数関係です。したがって、分子分母を掛ければ 1 になります。全く同様に 4ー⑫、4ー⑬両式の、角周波数 0 での利得を掛け合わせた値も 1 です。

次に H を 1 として、それぞれで角周波数が大きな領域での利得を考えますと、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{s^2+\omega_Z{}^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}=\lim_{s\to j\infty}\frac{\frac{s^2}{s^2}+\frac{\omega_Z{}^2}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2}+\frac{\frac{\omega_0 s}{Q}}{s^2}+\frac{\omega_0{}^2}{s^2}}=\lim_{s\to j\infty}\frac{1+\frac{\omega_Z{}^2}{s^2}}{1+\frac{\frac{\omega_0}{Q}}{s}+\frac{\omega_0{}^2}{s^2}}=1$$

になり、1 であることが分ります。4ー⑩⑪⑫⑬式は皆同じになります。その為上式では A、B の添え字は省略しています。実数の 1 ですから、共役も 1 です。絶対値も 1 です。共役を求める為 s＝ーj∞を代入するまでも無く、4ー⑩⑪⑫⑬式の H＝1、∞[rad/sec] での利得は、1 と分ります。

零点の有る 2 次低域通過伝達関数と零点の有る 2 次高域通過伝達関数は、両方とも高い角周波数での利得は 1 になります。H を 1 とした場合、4ー⑩式および 4ー⑪式の利得をグラフ化すると下図の様になります。縦軸の単位は dB にしています。



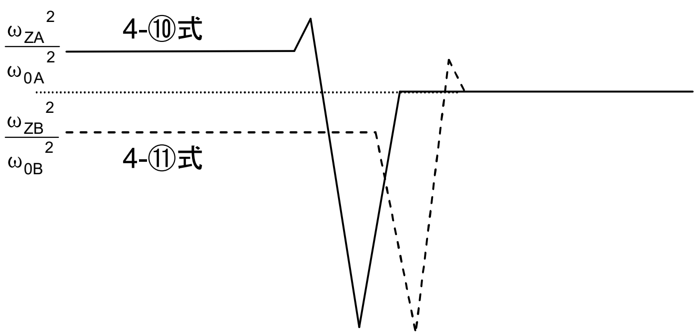
赤が 4ー⑩式の零点の有る 2 次低域通過伝達関数です。青が 4ー⑪式の零点の有る 2 次高域通過伝達関数です。角周波数 0 での総合利得は、4ー⑩式の利得と 4ー⑪式の利得が互いに逆数関係になっている為、1 になります。

このグラフで、低い角周波数範囲での利得の違いが気になります。赤の利得が、低い角周波数の所で大きく、しかも減衰の手前で盛り上がっています。赤の利得が大きいことにより、フィルターの許容入力が小さくなってしまいます。

H を 1 とした場合、4ー⑩式および 4ー⑪式の利得を図式化すると下図の様になります。

角周波数 0 での総合利得は、4ー⑩式の利得と 4ー⑪式の利得が互いに逆数関係になっている為、1 になります。

偶数次チェビシェフフィルターにおいて、角周波数 0 での利得が 1 では良くない場合は、どちらかの H を少しいじれば良いです。



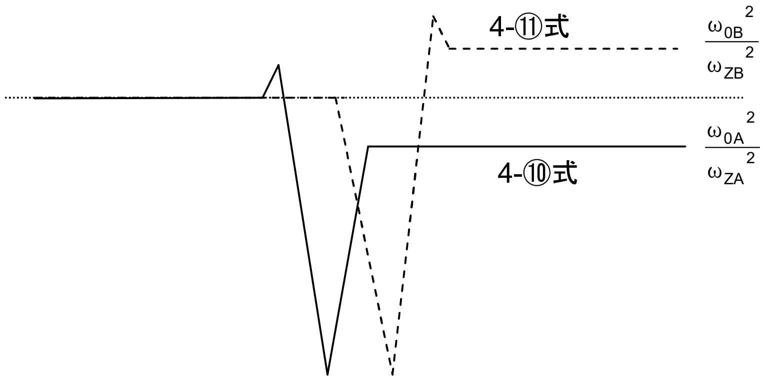
4ー⑩式または 4ー⑪式で、低い角周波数の範囲と高い角周波数の範囲での利得の違いが

気になります。利得が大きい所でサチり易いのです。サチるとは電源電圧以上の出力は出ない為、大きな入力が入って来た時、出力が歪む事です。

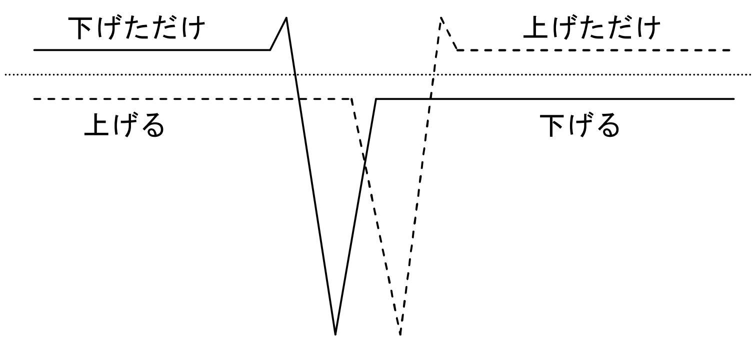
フィルターの許容入力を大きくしたいと思い、4ー⑩式に係数をつけ、利得を抑えます。

角周波数 0 での利得を 1 にする為に、強引に角周波数 0 での利得 $\dfrac{\omega_{ZA}^{2}}{\omega_{0A}^{2}}$ の逆数を係数として付けると、角周波数 0 での総合利得が 1 になりません。

4ー⑪式にも角周波数 0 での利得 $\dfrac{\omega_{ZB}^{2}}{\omega_{0B}^{2}}$ の逆数を係数として付けると、角周波数 0 での総合利得は 1 になります。しかしこれでは 4ー⑩式の最大利得が 4ー⑪式の最大利得に変身するだけで、許容入力は増加しません。下図の通りです。



フィルターの許容入力が小さくなるのを防止する為には、4ー⑩式と 4ー⑪式に、丁度良い係数をつけなければなりません。下図の通りです。



$\dfrac{\omega_{ZA}^{2}}{\omega_{0A}^{2}}$ と $\dfrac{\omega_{ZB}^{2}}{\omega_{0B}^{2}}$ は互いに逆数の関係にあります。その為、角周波数 0 での 4ー⑩式の利得

と 4ー⑪式の利得も逆数関係になり、総合利得が 1 になります。4ー⑩式の利得を下げ、4ー⑪式の利得を上げる、丁度良い係数を付ければ良いです。4ー⑩式に 1 より小さい $\frac{1}{\alpha}$ と言う係数を付けた場合、4ー⑪式には 1 より大きい α と言う係数を付けなければいけません。角周波数 0 または角周波数の高い領域で、総合利得が 1 にならないからです。係数も逆数にします。

現在、4ー⑩式の角周波数 0 での利得は $\frac{\omega_{ZA}^{2}}{\omega_{0A}^{2}}$ です。したがって、上図実線の角周波数 0 での利得は $\frac{\omega_{ZA}^{2}}{\omega_{0A}^{2}}\cdot\frac{1}{\alpha}$ になります。

現在、4ー⑪式の角周波数が大きい領域での利得は 1 です。したがって、上図破線の角周波数が大きい領域での利得は α になります。

両方の利得が同じならば、

$$\frac{\omega_{ZA}^{2}}{\omega_{0A}^{2}}\cdot\frac{1}{\alpha}=\alpha$$

が成り立ちますので、

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\cdot\omega_{0A}^{2}}{\omega_{ZA}^{2}}$$

となります。両辺に $\frac{1}{\alpha}$ を掛け、

$$\frac{1}{\alpha^{2}}=\frac{\omega_{0A}^{2}}{\omega_{ZA}^{2}}$$

となります。両辺の平方根を求めますと、

$$\frac{1}{\alpha}=\pm\frac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$$

となります。フィルターの伝達関数の分子に付ける係数は、＋でなければ利得がひっくり返ります。したがって、4ー⑩式に付ける係数は $\frac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$ となります。

$\alpha = \dfrac{\omega_{ZA}}{\omega_{0A}} = \dfrac{\dfrac{1}{\omega_{ZB}}}{\dfrac{1}{\omega_{0B}}} = \dfrac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$ ですので、4－⑪式に付ける係数は、$\dfrac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$ となります。

4－⑩式に $\dfrac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$ の係数が付いた時、角周波数 0 での利得は、

$$\left[\frac{\dfrac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}(s^2+\omega_{ZA}{}^2)}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2}\right]_{s=0} = \frac{\omega_{0A}\omega_{ZA}}{\omega_{0A}{}^2} = \frac{\omega_{ZA}}{\omega_{0A}}$$

となり、高い角周波数での利得は、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}(s^2+\omega_{ZA}{}^2)}{s^2+\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}s+\omega_{0A}{}^2} = \lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}s^2}{\omega_{ZA}}}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}\omega_{ZA}{}^2}{\omega_{ZA}}}{s^2}}{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}s}{Q_A}}{s^2}+\dfrac{\omega_{0A}{}^2}{s^2}} = \lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}+\dfrac{\omega_{0A}\omega_{ZA}}{s^2}}{1+\dfrac{\dfrac{\omega_{0A}}{Q_A}}{s}+\dfrac{\omega_{0A}{}^2}{s^2}} = \frac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$$

となります。

4－⑪式に $\dfrac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$ の係数が付いた時、角周波数 0 での利得は、

$$\left[\frac{\dfrac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}(s^2+\omega_{ZB}{}^2)}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2}\right]_{s=0} = \frac{\omega_{0B}\omega_{ZB}}{\omega_{0B}{}^2} = \frac{\omega_{ZB}}{\omega_{0B}}$$

となり、高い角周波数での利得は、

$$\lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}(s^2+\omega_{ZB}{}^2)}{s^2+\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}s+\omega_{0B}{}^2} = \lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}s^2}{\omega_{ZB}}}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}\omega_{ZB}{}^2}{\omega_{ZB}}}{s^2}}{\dfrac{s^2}{s^2}+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}s}{Q_B}}{s^2}+\dfrac{\omega_{0B}{}^2}{s^2}} = \lim_{s\to j\infty}\frac{\dfrac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}+\dfrac{\omega_{0B}\omega_{ZB}}{s^2}}{1+\dfrac{\dfrac{\omega_{0B}}{Q_B}}{s}+\dfrac{\omega_{0B}{}^2}{s^2}} = \frac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$$

となります。

4－⑩式に係数$\frac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$を付けた場合、高い角周波数での利得は$\frac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$になります。$\dfrac{\frac{1}{\omega_{0B}}}{\frac{1}{\omega_{ZB}}}$です

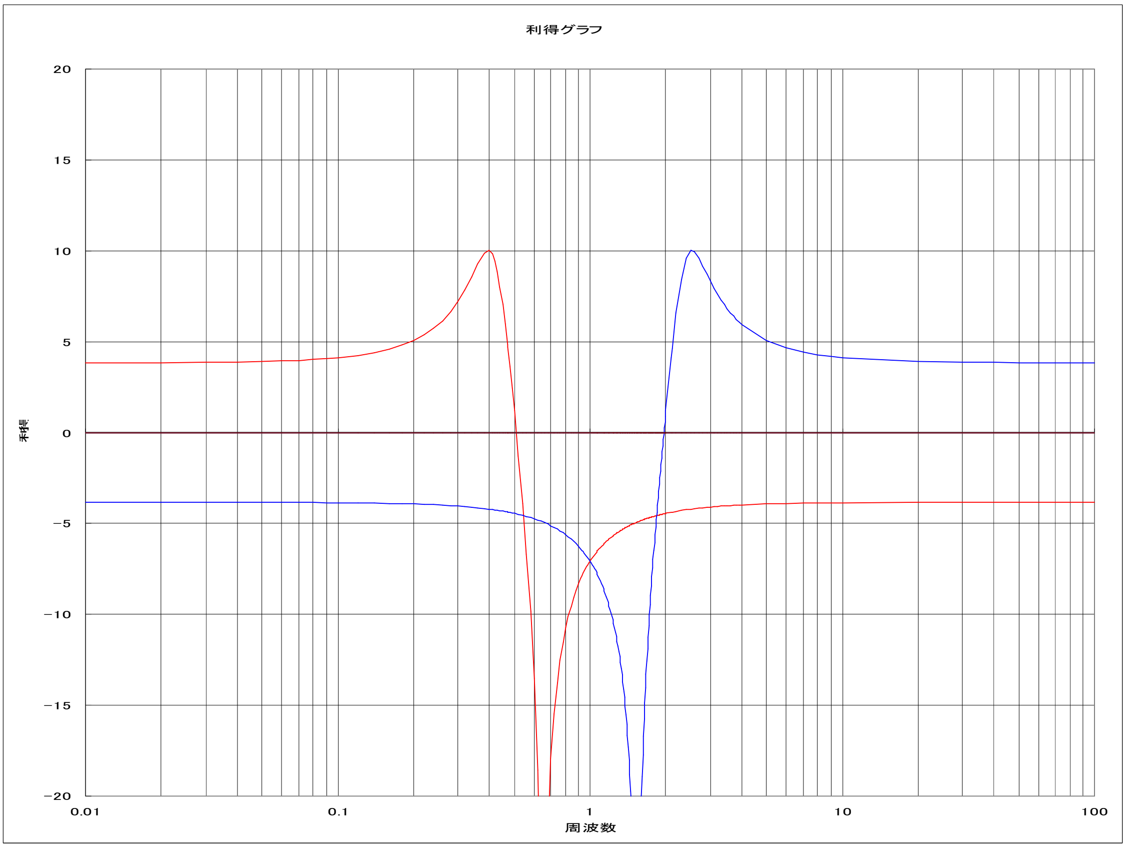
から、$\frac{\omega_{ZB}}{\omega_{0B}}$と同じです。これは4－⑪式に係数$\frac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$を付けた時の、4－⑪式の角周波数0での利得と同じです。

4－⑪式に係数$\frac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$を付けた場合、高い角周波数での利得は$\frac{\omega_{0B}}{\omega_{ZB}}$になります。$\dfrac{\frac{1}{\omega_{0A}}}{\frac{1}{\omega_{ZA}}}$です

から、$\frac{\omega_{ZA}}{\omega_{0A}}$と同じです。これは 4－⑩式に係数$\frac{\omega_{0A}}{\omega_{ZA}}$を付けた時の、4－⑩式の角周波数 0 での利得と同じです。

両者の最大利得は同じになるので、このフィルターの許容入力が増加します。それぞれが逆数関係になるので、総合利得は変わりません。

4－⑩式および 4－⑪式に係数を付けた場合の利得をグラフ化しますと、下図の様になります。



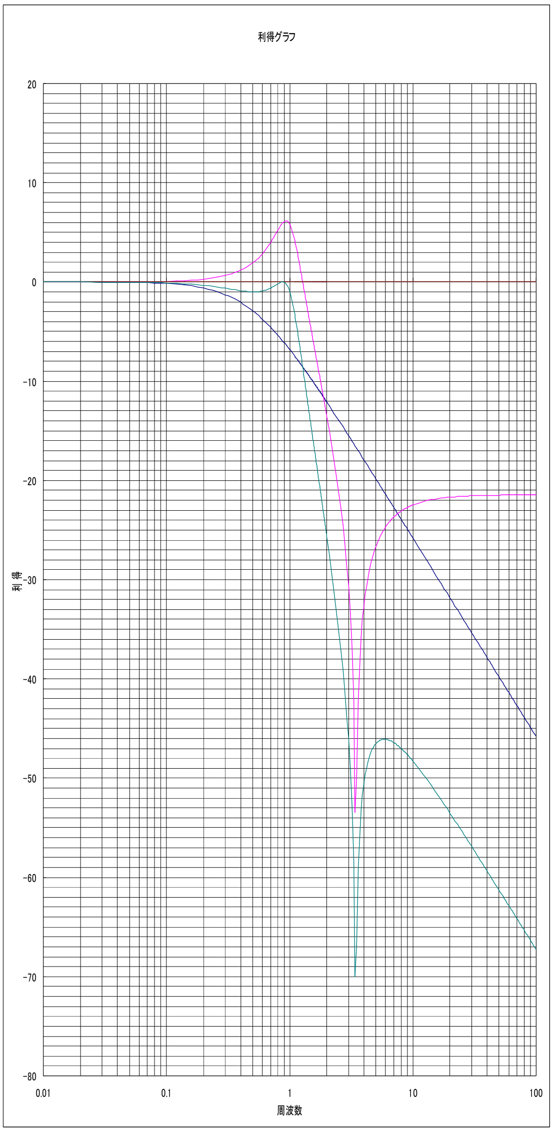
4ー⑩式および4ー⑪式の最大利得がそろっています。赤が低くなりました。

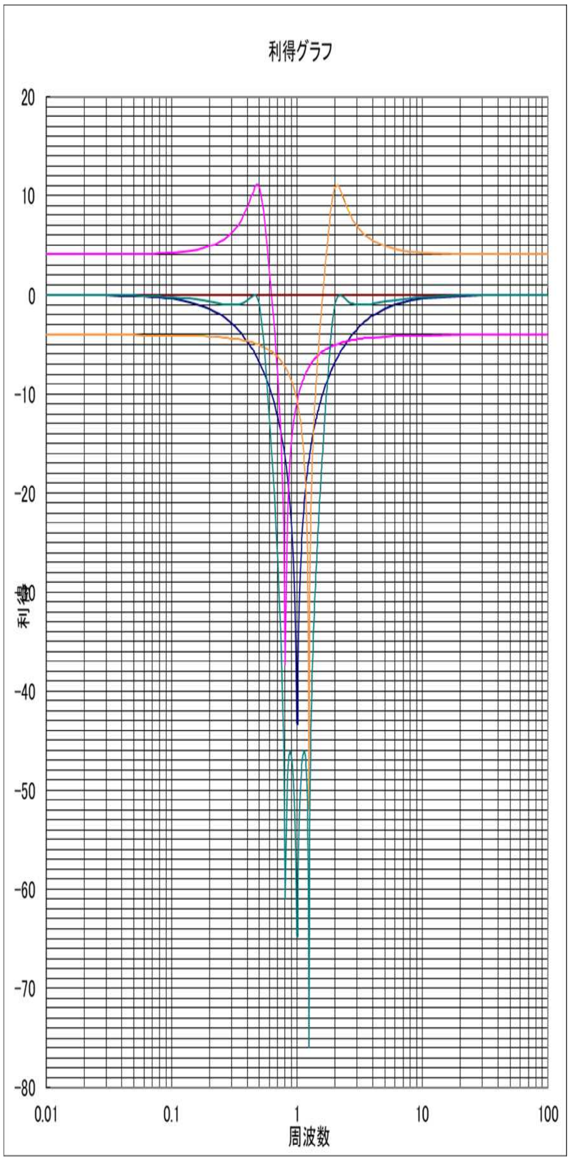
4ー⑪⑬式の場合も同様に考えれば係数が計算できるので、出し方は省略します。

下に変換の具体例を示します。下左図が変換前の 3 次連立チェビシェフ低域通過フィルターです。青が 1 次低域通過関数、ピンクが 2 次低域通過関数です。緑が最終出力です。

下右図が変換後の 3 次連立チェビシェフ帯域阻止フィルターです。青が 1 次低域通過関数を変換した 2 次帯域阻止関数です。ピンクとオレンジが、2 次低域通過関数を変換した、零点の有る 2 次低域通過関数と零点のある 2 次高域通過関数です。緑が最終出力です。

拡大すると良く見えます。





目次へ戻る