周波数変換　　　　　　　　　　　　　　　2009 年 10 月 14 日　　目次へ戻る

フィルターには、おもに低域通過、高域通過、帯域通過、帯域阻止の 4 種類がありますが、それらは全て正規化低域通過フィルターから導くことが出来ます。この技術を周波数変換と呼びます。

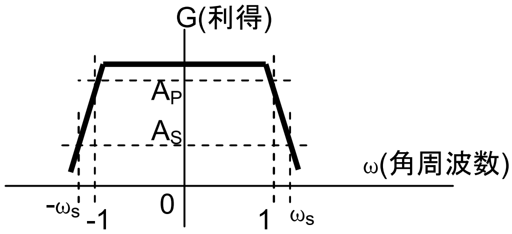
周波数変換の方法を用いれば、それぞれのフィルター仕様に従って設計した正規化低域通過フィルターから、任意角周波数の低域通過、高域通過、帯域通過、帯域阻止の各フィルターを作ることが出来ます。周波数変換の技術を詳しく説明致します。

1、正規化低域通過フィルターから任意角周波数の低域通過フィルターへの変換

「スケーリング」の章に記載の、素子値の周波数および数値スケーリングを行えば良いです。

2、正規化低域通過フィルターから任意角周波数の高域通過フィルターへの変換

一般的な低域通過フィルターは偶関数の為、下図の様に正の周波数における減衰と同じ曲線が、負の周波数においても現れます。

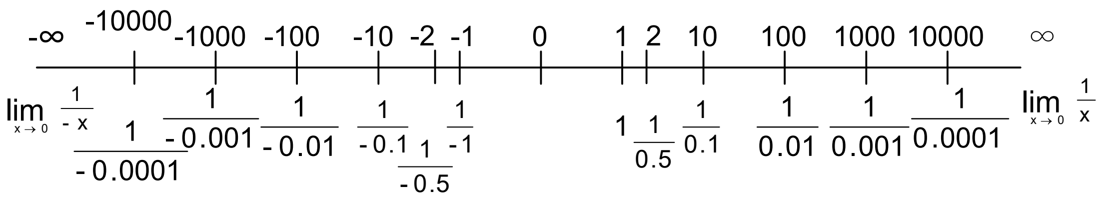


正規化した低域通過フィルター

上図の角周波数軸 ω において、通過域周波数（|ω|≦1）の逆数で、過渡域および阻止域の角周波数（|ω|≧1）を表すことが出来ます。

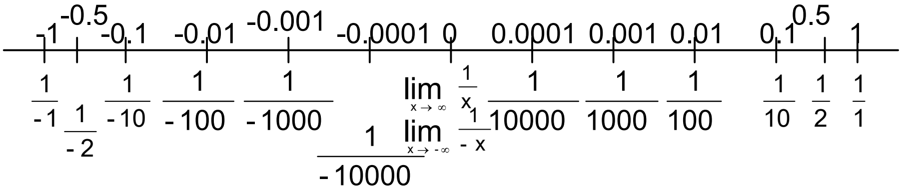
例えば、$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$、$\frac{1}{0.0001}=10000$、$\frac{1}{0.001}=1000$、$\frac{1}{0.01}=100$、$\frac{1}{0.1}=10$、$\frac{1}{0.5}=2$、そして$\frac{1}{1}=1$などです。

下図は上段が過渡域および阻止域角周波数、下段はそれを通過域角周波数の逆数で表した例です。



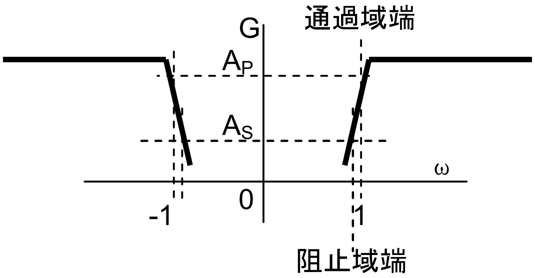
また、過渡域および阻止域周波数の逆数で、通過域の角周波数を表すことも出来ます。

下図は上段が通過域角周波数、下段はそれを過渡域および阻止域角周波数の逆数で表した例です。



各周波数軸で、正の周波数は 1、負の周波数は－1 を中心にして、それぞれ右と左の周波数は互いに逆数関係になっていると考えることが出来ます。

このことから角周波数 ω が入力される時、瞬時に $\frac{1}{\omega}$ を計算し、その値を正規化低域通過フィルターに入力した場合、1 と－1 を中心にして通過域と、過渡域および阻止域がひっくり返ります。角周波数特性は下図の様になることが予想されます。



ω を $\frac{1}{\omega}$ に変身させてから入力することにより、正規化低域通過フィルターは正規化高域通過フィルターに変身します。この原理を利用した、正規化高域通過フィルター設計用正規化低域通過フィルターの仕様は次の形になります。

①、通過域最大減衰量と阻止域最小減衰量は高域通過フィルターと同じ。

②、高域通過フィルターの通過域端角周波数は 1[rad/sec]なので、正規化低域通過フィルターの通過域端角周波数も 1[rad/sec]。

③、高域通過フィルターの阻止域端周波数の逆数が、正規化低域通過フィルターの阻止域端角周波数になる。

上記に従って設計した正規化低域通過フィルター伝達関数の s に、jω と－jω が代入され

る時、代わりに $j\frac{1}{\omega}$ と $-j\frac{1}{\omega}$ が入るようにしてあれば、この伝達関数の通過域が阻止域に、

阻止域が通過域になります。その為には、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を $\frac{1}{s}$ に

交換すれば良いです。$\frac{1}{s}$ に $j\omega$ と $-j\omega$ が代入された場合、

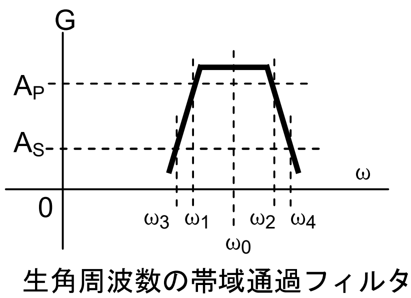
$$\left[\frac{1}{s}\right]_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega}=\frac{j\cdot 1}{j\cdot j\omega}=-j\frac{1}{\omega}$$

$$\left[\frac{1}{s}\right]_{s=-j\omega}=\frac{1}{-j\omega}=\frac{j\cdot 1}{-j\cdot j\omega}=j\frac{1}{\omega}$$

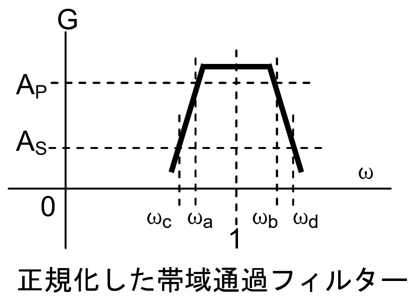
となります。角周波数の逆数が代入されることと同じになり、正規化低域通過フィルターの通過域が阻止域に、阻止域が通過域になります。正規化基準周波数 1[rad/sec]での減衰量は変わりません。

こうして出来た正規化高域通過フィルターから、任意の角周波数の高域通過フィルターへの変更は「スケーリング」の章に記載の、素子値の周波数および数値スケーリングを行えば良いです。周波数変換の具体例と各種問題点解決方法は、「周波数変換の実際」の章で述べます。

3、正規化低域通過フィルターから任意角周波数の帯域通過フィルターへの変換



生角周波数の帯域通過フィルター



正規化した帯域通過フィルター

上左図の生（なま）角周波数の帯域通過フィルターにおいて、下側通過域端角周波数を ω_1[rad/sec]、上側通過域端角周波数を ω_2[rad/sec]とします。また、下側阻止域端角周波数を ω_3[rad/sec]、上側阻止域端角周波数を ω_4[rad/sec]とします。

通過域中心の生（なま）の基準角周波数を仮に ω_0[rad/sec]とし、上下の通過域端角周波数を正規化します。正規化後の通過域端角周波数を ω_a、ω_b としますと、

$$\omega_a = \frac{\omega_1}{\omega_0} \qquad \omega_b = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

になります。正規化後の上下通過域端角周波数 ω_a、ω_b を逆数の関係にする為、式を立てます。

$$\frac{1}{\omega_a} = \omega_b$$

です。正規化前の生（なま）の角周波数で表しますと、

$$\frac{1}{\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

になります。この式を変形して行きますと、

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \qquad \omega_0{}^2 = \omega_1 \cdot \omega_2 \qquad \omega_0 = \pm\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

になります。これにより通過域中心の生（なま）の基準角周波数、ω_0[rad/sec]が決定されました。正規化スケーリングを行い、ω_0 を 1[rad/sec]に縮小します。1[rad/sec]を通過域中心の生の角周波数、ω_0[rad/sec]で割ったものが縮尺になります。正号の方を通過域中心の生の角周波数にします。

$$\text{縮尺} = \frac{1\,[\mathrm{rad/sec}]}{\text{通過域中心生角周波数}\ [\mathrm{rad/sec}]}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\text{下側通過域端生角周波数} \bullet \text{上側通過域端生角周波数}}}$$

です。正規化角周波数＝生(なま)角周波数×縮尺ですので、上右図中の各正規化角周波数を次のように求めます。

下側通過域端の正規化角周波数を ω_a とすれば、

$$\omega_a = \omega_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。上側通過域端の正規化角周波数を ω_b とすれば、

$$\omega_b = \omega_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。下側阻止域端の正規化角周波数を ω_c とすれば、

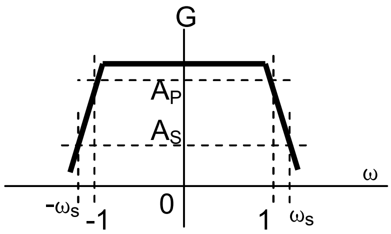
$$\omega_c = \omega_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。上側阻止域端の正規化角周波数を ω_d とすれば、

$$\omega_d = \omega_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。

本章 2 にも書きましたが、一般的な低域通過フィルターは偶関数の為、下図の様に正の周波数における減衰曲線と同じ曲線が、負の周波数においても現れます。



正規化した低域通過フィルター

正規化低域通過フィルターの通過域端角周波数は、－1[rad/sec]および＋1[rad/sec]です。

正規化低域通過フィルターは、－1～＋1[rad/sec]を通過域とする帯域通過フィルターと見ることも出来ます。

そこで、角周波数を次のように変身させ、正規化低域通過フィルターに入力すれば、その出力は正規化帯域通過フィルターに一致します。

①、0～∞[rad/sec]の角周波数を－∞～＋∞[rad/sec]に変身させる。
②、下側通過域端正規化角周波数 ω_a[rad/sec]を－1[rad/sec] に変身させる。
③、正規化後の通過域中心角周波数 1[rad/sec]を 0[rad/sec] に変身させる。
④、上側通過域端正規化角周波数 ω_b[rad/sec]を＋1[rad/sec] に変身させる。

先人は、①～④に当てはまる ω の変身関数を発見しました。

$$f(\omega) = \omega - \frac{1}{\omega}$$

がそれです。この変身関数は、

ω が 1 以下でプラスの小さな数の時は、$\frac{1}{\omega}$ が大きな数になり、全体としてマイナスの大きな数になります。

ω が 1 以上の大きな数の時は、$\frac{1}{\omega}$ が小さな数になり、全体としてプラスの大きな数にな

ります。つまり上記①が成り立ちます。

この関数の ω に、逆数 $\dfrac{1}{\omega}$ を代入しますと、

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\left[\omega-\frac{1}{\omega}\right]_{\omega=\frac{1}{\omega}}=\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega}\right)}=\frac{1}{\omega}-\omega=-\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)$$

になります。ω を入れた場合と絶対値が同じで、符号だけが変わります。例えば、帯域通過フィルターの上側通過域端正規化角周波数 ω_b が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_b)=\omega_b-\frac{1}{\omega_b}=\omega_b-\omega_a$$

になります。下側通過域端正規化角周波数の ω_a が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_a)=\omega_a-\frac{1}{\omega_a}=\omega_a-\omega_b=-(\omega_b-\omega_a)$$

になります。ω_b が代入された時に 1、ω_a が代入された時にー1 になれば良いのですから、(ω_b ーω_a)で割りますと、

$$f(\omega)=\frac{1}{\omega_b-\omega_a}(\omega-\frac{1}{\omega})$$

になります。これにより上記②と④が成り立ちます。この定数が付いても①は成り立ちます。

変身関数に、正規化帯域通過フィルターの通過域中心角周波数 1 が入力された時は、

$$f(1)=\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\left(1-\frac{1}{1}\right)=0$$

となり上記③が成り立ちます。全てが成り立ちました。実に都合の良い関数です。

この関数で計算し直した ω を正規化低域通過フィルターに入力すれば、正規化帯域通過フィルターに変身します。

上側阻止域端角周波数の ω_d が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_d) = \frac{1}{\omega_b - \omega_a}\left(\omega_d - \frac{1}{\omega_d}\right) = \frac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$$

となります。また、下側阻止域端角周波数の ω_c が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_c) = \frac{1}{\omega_b - \omega_a}\left(\omega_c - \frac{1}{\omega_c}\right) = \frac{-(\omega_d - \omega_c)}{\omega_b - \omega_a}$$

となります。この $\frac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$ [rad/sec]地点と、$\frac{-(\omega_d - \omega_c)}{\omega_b - \omega_a}$ [rad/sec]地点で、正規化低域通過フィルターも阻止域に入るように設計しなくてはなりません。

したがって、正規化帯域通過フィルター設計用正規化低域通過フィルターの仕様は、以下の通りになります。

①、通過域最大減衰量と阻止域最小減衰量は、帯域通過フィルターと同じ。
②、帯域通過フィルターの上側通過域端角周波数 ω_b の時、1[rad/sec]に変身するので、正規化低域通過フィルターの通過域端角周波数は 1[rad/sec]。
③、帯域通過フィルターの上側阻止域端角周波数 ω_d の時、$\frac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$ [rad/sec]に変身するので、正規化低域通過フィルターの阻止域端角周波数 ω_s は $\frac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$ [rad/sec]。

ω_1 と ω_2 は必ずユーザーからの設計仕様通りとなりますが、設計仕様の ω_3 と ω_4 は ω_0 を中心にして逆数関係になっているとは限らないので、結果の吟味が必要です。

こうして正規化低域通過フィルターの設計が完成します。この正規化低域フィルターはバタワースでも、チェビチェフでも、逆チェビチェフでも、連立チェビチェフでも良いです。

この正規化低域通過フィルター伝達関数の分子分母の s に、変身関数の効果を利かせれば良いです。

設計された正規化低域通過フィルターの伝達関数に、角周波数 ω の正弦波信号が入力されます。それにより伝達関数の s に $j\omega$ とその共役の $-j\omega$ が代入されますが、この時に変身関数による、

$$j\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\right)$$

とその共役の、

$$-j\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)(-j)\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(-j\omega + \frac{j}{\omega}\right)$$

が入れば、低域通過の伝達関数は、帯域通過の伝達関数に変身します。伝達関数の s には jω 及び－jω しか代入されませんので、正規化低域通過伝達関数の s を、式に変更する必要があります。jω が代入された時に $\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\right)$ になり、－jω が代入された時に $\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(-j\omega + \frac{j}{\omega}\right)$ になるような式にしておけば良いです。

jω と－jω は共役です。$\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\right)$ と $\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(-j\omega + \frac{j}{\omega}\right)$ も共役なので、複素数の四則演算の性質で明らかなように、jω が代入された時に $\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\right)$ になる式を発見すれば良いです。その式に－jω を代入すれば、自動的に共役の $\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(-j\omega + \frac{j}{\omega}\right)$ になります。複素数の四則演算の性質については、「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

$\left(\frac{1}{\omega_b - \omega_a}\right)\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\right)$ は、

$$\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(j\omega-\frac{j}{\omega}\right)=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left\{j\omega+\left(-j\frac{1}{\omega}\right)\right\}=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(j\omega+\frac{1}{j\omega}\right)$$

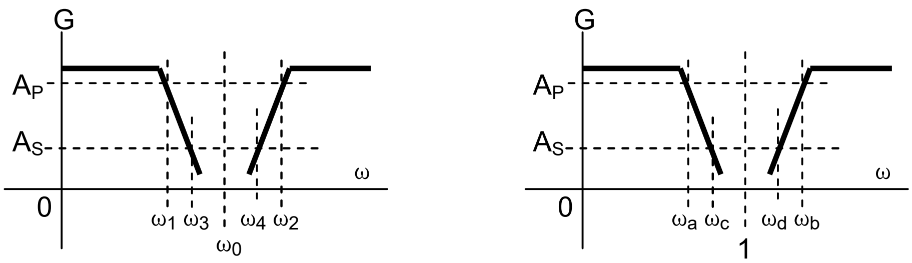
と変形出来ます。正弦波応答においては $j\omega=s$ なので、上式の $j\omega$ を s に置き換えれば、

$$\left[\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(j\omega+\frac{1}{j\omega}\right)\right]_{j\omega=s}=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

となります。つまり、正規化低域通過フィルター伝達関数の s を $\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$ に置き換えれば良いです。

こうして出来た正規化帯域通過フィルターから、任意角周波数の帯域通過フィルターへの変更は「スケーリング」の章に記載の、素子値の周波数および数値スケーリングを行えば良いです。周波数変換の具体例と各種問題点解決方法は、「周波数変換の実際」の章で述べます。

4、正規化低域通過フィルターから任意角周波数の帯域阻止フィルターへの変換



生角周波数帯域阻止フィルター　　正規化した帯域阻止フィルター

生（なま）角周波数帯域阻止フィルターにおいて、下側通過域端角周波数を ω_1[rad/sec]、上側通過域端角周波数を ω_2[rad/sec]とします。また、下側阻止域端角周波数を ω_3[rad/sec]、上側阻止域端角周波数を ω_4[rad/sec]とします。

通過域端角周波数どうしを逆数の関係にする為に、阻止域中心の生（なま）角周波数を ω_0 としますと、帯域通過フィルターの場合と同様に、

$$\omega_0=\pm\sqrt{\omega_1\cdot\omega_2}$$

が成り立ちます。正規化スケーリングを行い、阻止域中心の生角周波数 ω_0[rad/sec]を1[rad/sec]に縮小します。1[rad/sec]を阻止域中心の角周波数 ω_0[rad/sec]で割ったものが縮尺になります。正号の方を中心の角周波数にします。

$$\text{縮尺} = \frac{1\,[\mathrm{rad/sec}]}{\text{阻止域中心生角周波数}\,[\mathrm{rad/sec}]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{下側通過域端生角周波数} \bullet \text{上側通過域端生角周波数}}}$$

です。正規化角周波数＝生(なま)角周波数×縮尺なので、上右図中の各正規化角周波数を次のように求めます。

下側通過域端の正規化角周波数を ω_a とすれば、

$$\omega_a = \omega_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。上側通過域端の正規化角周波数を ω_b とすれば、

$$\omega_b = \omega_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。下側阻止域端の正規化角周波数を ω_c とすれば、

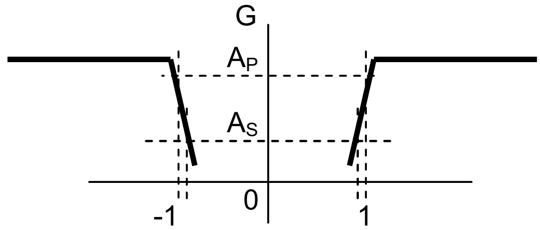
$$\omega_c = \omega_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。上側阻止域端の正規化角周波数を ω_d とすれば、

$$\omega_d = \omega_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

となります。

一般的な低域通過フィルターは偶関数の為、正の周波数における減衰曲線と同じ曲線が負の周波数においても現れます。本章の 2、高域通過フィルターの項でも述べましたが、正の角周波数および負の角周波数それぞれを逆数にしたものを、低域通過フィルターに入力した場合、その出力は下図の様になります。



つまり、ω を$\frac{1}{\omega}$に変身させることにより、正規化低域通過フィルターは正規化高域通過フィルターに変身します。

正規化高域通過フィルターの通過域端角周波数は、－1[rad/sec]および＋1[rad/sec]です。正規化高域通過フィルターは、－1～＋1[rad/sec]を過渡域および阻止域とする、帯域阻止フィルターと見ることも出来ます。

そこで、角周波数を次のように変身させ、正規化高域通過フィルターに入力すれば、その出力は正規化帯域阻止フィルターに一致します。

①、0～∞[rad/sec]の角周波数を、－∞～＋∞[rad/sec]に変身させる。
②、下側通過域端正規化角周波数 ω_a[rad/sec]を、－1[rad/sec] に変身させる。
③、正規化後の阻止域中心角周波数 1[rad/sec]を、0[rad/sec] に変身させる。
④、上側通過域端正規化角周波数 ω_b[rad/sec]を、＋1[rad/sec] に変身させる。

この変身は帯域通過フィルターの時と同じです。そこで、帯域通過フィルターの項で使用した変身関数を利用して、正規化高域通過フィルターの周波数を動かせば、正規化帯域阻止フィルターが出来ます。

$$f(\omega)=\omega-\frac{1}{\omega}$$

がそれです。この変身関数は、

ω が 1 以下でプラスの小さな数の時は、$\frac{1}{\omega}$が大きな数になり、マイナスの大きな数になります。

ω が 1 以上で大きな数の時は、$\frac{1}{\omega}$が小さな数になり、プラスの大きな数になります。つまり①が成り立ちます。

この関数の ω に、逆数$\frac{1}{\omega}$を代入しますと、

$$f\left(\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)=\left[\omega-\frac{1}{\omega}\right]_{\omega=\frac{1}{\omega}}=\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega}\right)}=\frac{1}{\omega}-\omega=-\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)$$

になります。例えば、帯域阻止フィルターの上側通過域端正規化角周波数 ω_b が入力された

時、この関数の値は、

$$f(\omega_b) = \omega_b - \frac{1}{\omega_b} = \omega_b - \omega_a$$

となります。下側通過域端正規化角周波数 ω_a が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_a) = \omega_a - \frac{1}{\omega_a} = \omega_a - \omega_b = -(\omega_b - \omega_a)$$

となります。ω_b が代入された時に 1、ω_a が代入された時にー1 にすれば良いのですから、全体を(ω_bーω_a)で割り、

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega_b - \omega_a}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)$$

と言う式になります。これにより②と④が成り立ちます。この定数が付いても①は成り立ちます。

変身関数に正規化帯域阻止フィルターの阻止域中心角周波数、1 が入力されたときは、

$$f(1) = \frac{1}{\omega_b - \omega_a}\left(1\text{-}\frac{1}{1}\right) = 0$$

となり③が成り立ちます。全てが成り立ちました。

正規化高域通過フィルターの ω に、この関数で計算し直した ω を入力すれば、正規化帯域阻止フィルターに変身します。

上側阻止域端角周波数の ω_d が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_d) = \frac{1}{\omega_b - \omega_a}\left(\omega_d - \frac{1}{\omega_d}\right) = \frac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$$

となります。また、下側阻止域端角周波数の ω_c が入力された時、この関数の値は、

$$f(\omega_c) = \frac{1}{\omega_b - \omega_a}\left(\omega_c - \frac{1}{\omega_c}\right) = \frac{-(\omega_d - \omega_c)}{\omega_b - \omega_a}$$

となります。

この$\dfrac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$[rad/sec]地点と、$\dfrac{-(\omega_d - \omega_c)}{\omega_b - \omega_a}$[rad/sec]地点で、正規化高域通過フィルターも阻止域に入るように設計しなくてはなりません。したがって、正規化帯域阻止フィルター設計用正規化高域通過フィルターの設計仕様は、以下の通りになります。

①、通過域最大減衰量と阻止域最小減衰量は、帯域阻止フィルターと同じ。

②、帯域阻止フィルターの上側通過域端角周波数 ω_b の時、1[rad/sec]に変身するので、正規化高域通過フィルターの通過域端角周波数は 1[rad/sec]。

③、帯域阻止フィルターの上側阻止域端角周波数 ω_d の時、$\dfrac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$[rad/sec]に変身するので、正規化高域通過フィルターの阻止域端角周波数 ω_s は$\dfrac{\omega_d - \omega_c}{\omega_b - \omega_a}$[rad/sec]。

ω_1 と ω_2 は必ずユーザーからの設計仕様通りとなりますが、設計仕様上の ω_3 と ω_4 は ω_0 を中心にして逆数関係になっているとは限らないので、結果の吟味が必要です。

更に、この正規化高域通過フィルター設計用の、正規化低域通過フィルターの設計仕様は次の形になります。

①、通過域最大減衰量と阻止域最小減衰量は、高域通過フィルターと同じ。

②、高域通過フィルターの通過域端角周波数は 1[rad/sec]なので、正規化低域通過フィルターの通過域端角周波数も 1[rad/sec]。

③、高域通過フィルターの阻止域端周波数の逆数が、正規化低域通過フィルターの阻止域端角周波数になる。つまり、$\dfrac{\omega_b - \omega_a}{\omega_d - \omega_c}$[rad/sec]である。

こうして正規化低域通過フィルターの設計が完成します。この正規化低域フィルターはバタワースでも、チェビチェフでも、逆チェビチェフでも、連立チェビチェフでも良いです。

この正規化低域フィルターを、まず正規化高域通過フィルターに変身させます。正規化

低域通過フィルター伝達関数の、分子分母のsに$j\omega$と$-j\omega$が代入される時、代わりに$j\frac{1}{\omega}$と$-j\frac{1}{\omega}$が入るようにして置けば、この伝達関数の通過域が阻止域に、阻止域が通過域になります。その為には、本章 2 の高域通過フィルターの項で説明した通り、正規化低域通過フィルター伝達関数のsを$\frac{1}{s}$に交換すれば良いです。

こうして出来た正規化高域通過フィルター伝達関数の分子分母の s に対し、更に変身関数の効果を利かせれば良いのです。

正規化高域通過フィルターの伝達関数に、角周波数 ω の正弦波信号が入力されます。それにより伝達関数のsに$j\omega$とその共役の$-j\omega$が代入されますが、この時にωの変身関数による、

$$j\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)j\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(j\omega-\frac{j}{\omega}\right)$$

とその共役の、

$$-j\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)(-j)\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)=\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(-j\omega+\frac{j}{\omega}\right)$$

が入れば、高域通過の伝達関数は帯域阻止の伝達関数に変身します。その為に、本章 3 の帯域通過フィルターの項で説明した通り、sを$\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$に置き換えれば良いです。

正規化低域通過フィルターからの変身をまとめれば、s を$\frac{1}{s}$にして、更にその s を、$\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)$にするのですから、

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_b-\omega_a}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)}=\frac{1}{\frac{s}{\omega_b-\omega_a}+\frac{1}{s(\omega_b-\omega_a)}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{s^2+1}{s(\omega_b-\omega_a)}}=\frac{s(\omega_b-\omega_a)}{s^2+1}$$

となります。設計した正規化低域通過フィルターの s を $\dfrac{s(\omega_b-\omega_a)}{s^2+1}$ にすれば良いのです。

こうして出来た正規化帯域阻止フィルターから任意の角周波数の帯域阻止フィルターへの変更は「スケーリング」の章に記載の、素子値の周波数および数値スケーリングを行えば良いです。周波数変換の具体例と各種問題点解決方法を、「周波数変換の実際」の章で述べます。

目次へ戻る