双対（そうつい）変換　　　２０１５年９月２２日　　　目次へ戻る

2024.3.11　2024.3.12　2024.3.13　訂正

1、双対変換とは

R−R 型 LC フィルターのコイルをコンデンサーに、コンデンサーをコイルに置き換える変換です。コンデンサーに比べ値段の高い、コイルの個数を少なくする技術です。

2、電圧電源と電流電源

電気回路の電源は一般的には電圧電源ですが、回路によっては電流電源として計算した方が都合の良い場合があります。双対変換ではそれが当てはまります。はじめに電圧電源を電流電源に置き換える方法を考えます。

(1)電圧電源

負荷の大きさに関係なく、一定の電圧を発生する電源を定電圧源と呼びます。内部抵抗零の電圧電源は、負荷に関係なく一定電圧を発生するので定電圧源と言えます。ところが実際の電圧電源には必ず内部抵抗があり、負荷が掛かると端子電圧が下がります。

電圧電源では、図 1 のように定電圧源 Vi に内部抵抗 Ri が直列につながっていると考えます。図中の○は端子です。 端子は抵抗も容量もインダクタンスも 0 ですから、電圧や電流に影響を与えません。

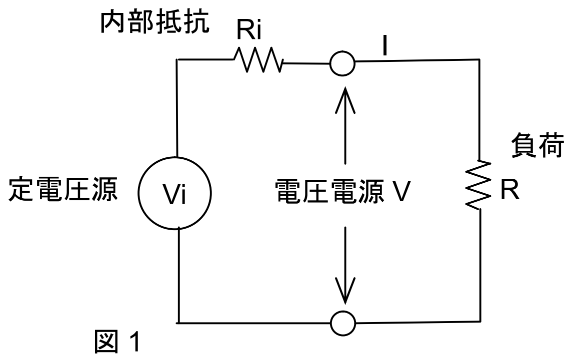


図 1

図 1 の電圧電源 V の値は、定電圧源 Vi を内部抵抗 Ri と負荷 R で分圧していると考え、

$$V = Vi \cdot \frac{R}{Ri + R}$$

となります。

(2)電流電源

まず定電流源とは何かについて、電圧電源の特別の場合である、図 2 の回路で考えます。

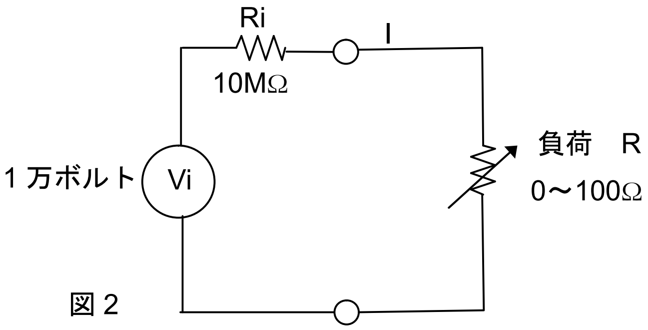


図 2

負荷が変化した時の、回路に流れる電流 I を求めます。負荷 R が 0Ω の時、

$$I = \frac{Vi}{Ri + R} = \frac{10000}{10 \times 10^{6} + 0} = 1 \times 10^{-3} [A]$$

となり、I は 1mA です。負荷 R が 100Ω の時、

$$I = \frac{Vi}{Ri + R} = \frac{10000}{10 \times 10^{6} + 100} = 0.9999 \times 10^{-3} [A]$$

となり、ほぼ 1mA です。

負荷 R に比べ内部抵抗 Ri があまりにも大きいので、負荷 R の若干の変化は無視され、I は 1mA になります。内部抵抗 Ri および内部電圧 Vi を共に大きくて行きますと、更に大きな負荷 R に対しても一定の電流を流すようになります。最後に負荷の大きさに関係なく一定の電流を流す電源になります。この電源を定電流源と呼びます。定電流源は内部抵抗 Ri および内部電圧 Vi が共に無限大であり、$\frac{Vi}{Ri}$ が一定の電流になる理想的で特別な電源です。

(3)電圧電源から電流電源への等価変換

定電流源の内部抵抗は無限大です。出力端子（図 2 の〇）から左を見た時の内部抵抗は無限大です。一方、電圧電源の内部抵抗は Ri です。

電圧電源から電流電源への等価変換には Ri をつなぎます。電圧電源の内部抵抗 Ri と同じ抵抗値を定電流源に並列につなぎます。これで電流電源の内部抵抗が Ri になります。

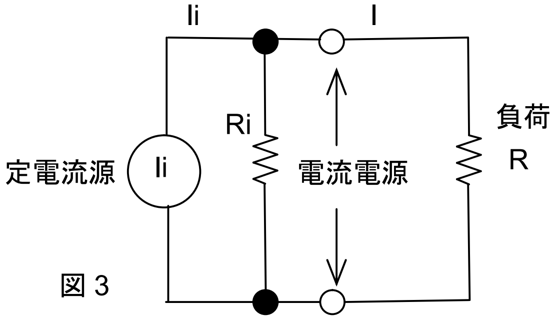


図 3

次に定電流源の電流値 Ii を決めなければなりません。図 3 で分ります様に、定電流源の

電流 Ii は、内部抵抗 Ri と負荷 R で分流することになります。負荷 R に流れる電流 I は、

$$I = Ii \cdot \frac{Ri}{Ri + R}$$

です。分流回路ですから分子は Ri です。この I に R を掛けた値、つまり負荷電圧が電圧電源、図 1 の端子電圧に等しくならなければなりません。方程式、

$$Ii \cdot \frac{Ri}{Ri + R} \cdot R = Vi \cdot \frac{R}{Ri + R}$$

が成り立ちます。この方程式を Ii について解きますと、

$$\frac{Ii \cdot Ri \cdot R}{Ri + R} = \frac{Vi \cdot R}{Ri + R}$$

$$Ii \cdot Ri = Vi$$

$$Ii = \frac{Vi}{Ri}$$

になります。電圧電源内部にある定電圧源の電圧を、電圧電源の内部抵抗の値で割ったものが、電流電源内部にある定電流源の電流値になります。

負荷 R を外した出力開放電圧は、定電流源の電流値と内部抵抗 Ri の積ですから、

$$Ii \cdot Ri = \frac{Vi}{Ri} \cdot Ri$$

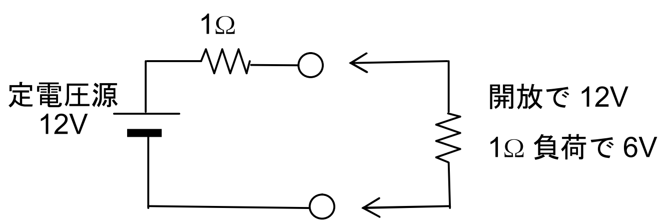
$$= Vi$$

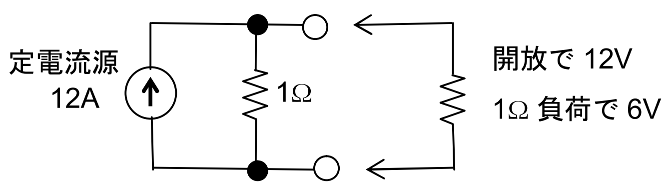
となり電圧電源の出力開放電圧と等しくなります。等価電流電源の出力短絡電流は、電流電源内部の定電流源の短絡電流ですから、定電流源の設定電流である、

$$Ii = \frac{Vi}{Ri}$$

です。これも電圧電源の短絡電流と等しくなります。

(4)等価変換の例

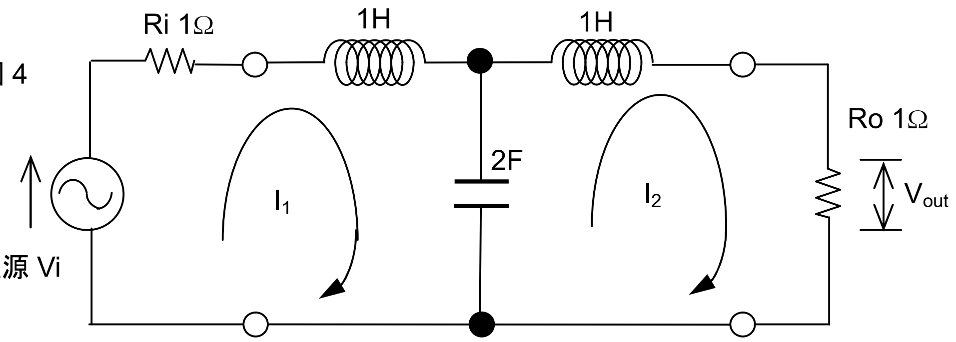




3、フィルター回路の網目電流解析

図 4 の回路で網目電流解析を行います。電源は内部抵抗 0 の理想的な定電圧源とします。内部抵抗 Ri として 1Ω が付いていると考えて下さい。

図 4



網目の電流、I_1 と I_2 を図のように決めます。キルヒホッフの第 2 法則によれば、網目内の全ての電圧の代数的総和は零です。代数的総和とは向きを考慮して加えると言うことです。網目内に電流の向きと同じ電圧源があった場合は、正の符号を付けます。電流の向きと反対の電圧源には負の符号を付けます。

受動素子については、抵抗およびリアクタンスの値と網目電流を掛け、電圧降下を求めます。電圧降下は電流の向きと逆に生じます。負の符号が付きます。

図 4 のコンデンサーのリアクタンスには、隣の網目の電流も流れているので気を付けます。I_1 と I_2 の 2 つの電流が反対向きに流れています。I_1 の網目で式を作る時、I_2 による電圧降下は、I_1 の向きと同じになりますから、正の符号が付きます。

「四端子回路について」の章の 6、リアクタンス四端子回路で書きましたが、ラプラスの世界でコイルのリアクタンスは sL です。コンデンサーのリアクタンスは $\frac{1}{sC}$ です。ラプラスの世界でも抵抗は R です。I_1 の網目の式は、

$$Vi - 1 \cdot I_1 - s \cdot 1 \cdot I_1 - \frac{1}{2s} \cdot I_1 + \frac{1}{2s} \cdot I_2 = 0$$

となります。移項して、網目電流 I_1 による電圧降下を正にします。

$$Vi = I_1 + sI_1 + \frac{1}{2s} I_1 - \frac{1}{2s} I_2$$

左辺と右辺を入れ替えます。

$$I_1 + sI_1 + \frac{1}{2s} I_1 - \frac{1}{2s} I_2 = Vi$$

式を整理して、

$$(1 + s + \frac{1}{2s}) I_1 - \frac{1}{2s} I_2 = Vi$$

となりました。I_2の網目の式は、

$$\frac{1}{2s}\cdot I_1 - \frac{1}{2s}\cdot I_2 - s\cdot 1\cdot I_2 - 1\cdot I_2 = 0$$

となります。移項して網目電流 I_2 による電圧降下を正にします。

$$0 = -\frac{1}{2s}\cdot I_1 + \frac{1}{2s}\cdot I_2 + s\cdot I_2 + I_2$$

左辺と右辺を入れ替えます。

$$-\frac{1}{2s}\cdot I_1 + \frac{1}{2s}\cdot I_2 + s\cdot I_2 + I_2 = 0$$

式を整理して、

$$-\frac{1}{2s}I_1 + (1 + s + \frac{1}{2s})I_2 = 0$$

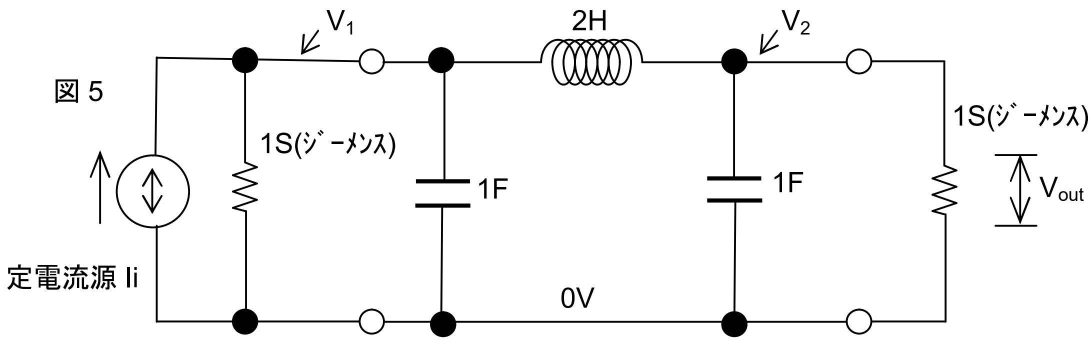
となります。I_1 と I_2 の網目の式を行列に直しますと、

$$\begin{bmatrix} 1+s+\frac{1}{2s} & -\frac{1}{2s} \\ -\frac{1}{2s} & 1+s+\frac{1}{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vi \\ 0 \end{bmatrix} \quad ・・・3-①$$

になります。出力 V_{out} は電流 I_2 の Ro 1Ω での電圧降下ですから、$V_{out}=I_2\times 1=I_2$ です。

4、フィルター回路の節点（接続点）電圧解析

図 5 の回路で、節点電圧解析を行います。



キルヒホッフの第 1 法則によれば、1 点に流出入する電流の総和は零です。

その 1 点のことを節点と呼び、部品の接続点つまり同じ電圧の場所のことです。図 5 の回路の節点は 3 つ在ります。それぞれの電圧、V_1 と V_2 と 0V を図のように決めます。

節点電圧解析では、節点に流れ込む向きの電流源があった場合は正の符号が付きます。節点から吸い出す向きの電流源には負の符号が付きます。

0V ではない節点に接続された受動素子には、節点から流れ出す向きの電流が流れます。

節点の電圧にコンダクタンス（抵抗の逆数）、サセプタンス（リアクタンスの逆数）を掛けることにより流れ出す電流を求めます。流れ出す電流の符号は負になります。

図 5 のコイルは、0V ではない節点どうしに接続されています。この場合は V_1 節点からの電流は V_2 節点に流れ、V_2 節点からの電流は V_1 節点に流れていると考えて下さい。網目電流の時、隣の網目電流も流れる素子に似ています。流れ込む電流の符号は正になります。

ラプラスの世界でコイルのサセプタンスは $\frac{1}{sL}$ です。コンデンサーのサセプタンスは sC です。ラプラスの世界でもコンダクタンスは $\frac{1}{R}$ です。節点 V_1 の式は、

$$Ii - 1 \cdot V_1 - s \cdot 1 \cdot V_1 - \frac{1}{2s} \cdot V_1 + \frac{1}{2s} \cdot V_2 = 0$$

となります。V_1 に流れ込む電流源は Ii です。V_1 からコンダクタンス 1 の抵抗で 0V に流れます。V_1 からサセプタンス s1 のコンデンサーで 0V に流れます。V_1 にコイルのサセプタンス $\frac{1}{2s}$ を掛けた電流が V_2 に流れます。V_2 にコイルのサセプタンス $\frac{1}{2s}$ を掛けた電流が V_1 に流れます。移項して節点電圧 V_1 による電流を正にします。

$$Ii = V_1 + sV_1 + \frac{1}{2s} V_1 - \frac{1}{2s} V_2$$

左辺と右辺を入れ替えます。

$$V_1 + sV_1 + \frac{1}{2s} V_1 - \frac{1}{2s} V_2 = Ii$$

式を整理し、

$$(1 + s + \frac{1}{2s})V_1 - \frac{1}{2s} V_2 = Ii$$

になります。節点 V_2 の式は、

$$\frac{1}{2s} \cdot V_1 - \frac{1}{2s} \cdot V_2 - s \cdot 1 \cdot V_2 - 1 \cdot V_2 = 0$$

になります。V_1 からコイルのサセプタンス $\frac{1}{2s}$ を掛けた電流が V_2 に流れます。V_2 にコイルのサセプタンス $\frac{1}{2s}$ を掛けた電流が V_1 に流れます。V_2 からサセプタンス s1 のコンデンサーで 0V に流れます。V_2 からコンダクタンス 1 の抵抗で 0V に流れます。

移項して節点電圧 V_2 による電流を正にします。

$$0 = -\frac{1}{2s} V_1 + \frac{1}{2s} V_2 + sV_2 + V_2$$

左辺と右辺を入れ替えます。

$$-\frac{1}{2s}V_1+\frac{1}{2s}V_2+sV_2+V_2=0$$

式を整理し、

$$-\frac{1}{2s}V_1+(1+s+\frac{1}{2s})V_2=0$$

になります。V_1 と V_2 の節点の式を行列に直しますと、

$$\begin{bmatrix} 1+s+\frac{1}{2s} & -\frac{1}{2s} \\ -\frac{1}{2s} & 1+s+\frac{1}{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Ii \\ 0 \end{bmatrix} \quad ・・・4ー①$$

になります。出力 V_{out} は V_2 そのものですから、V_{out}＝V_2 です。

5、双対変換

図 5 の回路は図 4 の回路に、

電圧電源→電流電源

直列→並列

並列→直列

抵抗の値→コンダクタンスの値

コイルの値→コンデンサーの値

コンデンサーの値→コイルの値

の変更をしています。回路の左端、右端は直列でもあり並列でもあるので、同一接続になります。このような変換を双対（そうつい）変換と呼んでいます。

図 4 の網目解析で網目電流を求める行列、3ー①式と、

双対変換後、図 5 の節点解析で節点電圧を求める行列、4ー①式は、

電流と電圧の違いはありますが、全く同じ形をしています。図 5 の 1S（ジーメンス）のコンダクタンスをを含めた電流源は、図 4 の 1Ω の抵抗を含めた電圧源と等価です。

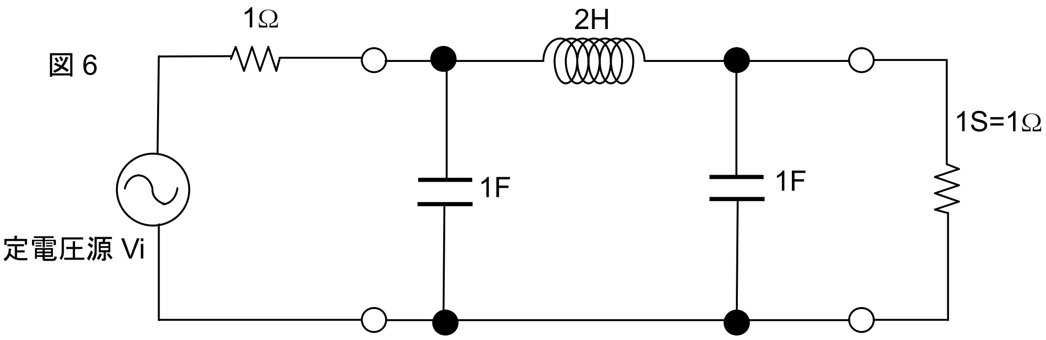
本章の 2、(3)に在ります様に、等価電流電源の Ii は電圧電源の $\frac{Vi}{Ri}$ になっています。図 4 の Ri は 1Ω ですから、図 5 の定電流源の Ii と図 4 の定電圧源の Vi は、アンペアとボルトの違いはありますが同じ数値になります。したがって、行列 3ー①式の I_1 と I_2 の数値は、行列 4ー①式の V_1 と V_2 の数値に等しくなります。

図 4 の出力 Ro は 1Ω ですから、I_2 と同じ数値の電圧が生じます。また、図 5 の V_2 は出力

そのものです。図 4 と図 5 の回路の V_{out} は同じ値になります。

図 5 の電流電源は図 4 の電圧電源と等価ですので、図 5 の電流電源を図 4 の電圧電源に戻し、

図 6

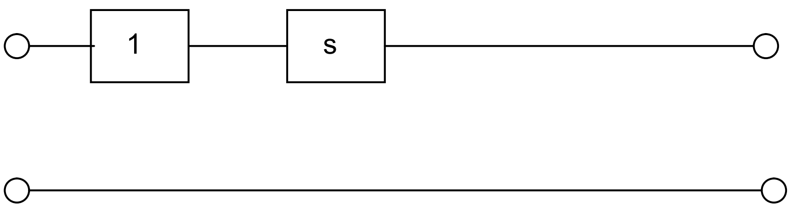


として良いです。これでコイルの個数が 1 個に減りました

6、検算

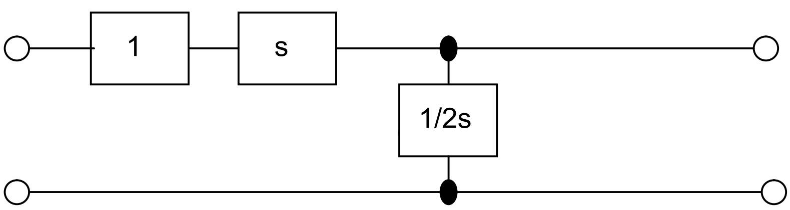
(1)図 4 の回路の四端子定数を求めます。「四端子回路について」の章をご参照下さい。

①1Ω と 1H の接続



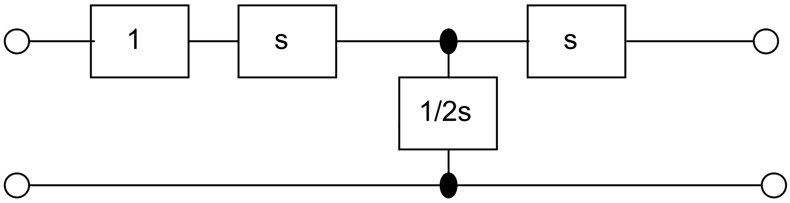
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

②2F の追加



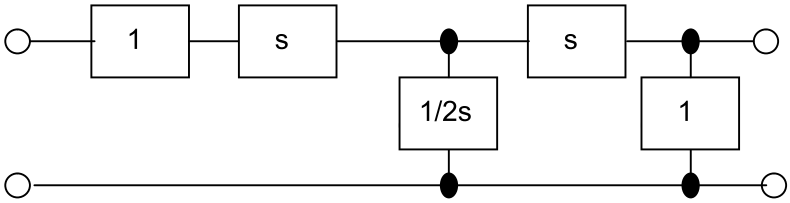
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2+2s+1 & s+1 \\ 2s & 1 \end{bmatrix}$$

③1H の追加



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2+2s+1 & s+1 \\ 2s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s^3+2s^2+2s+1 \\ 2s & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

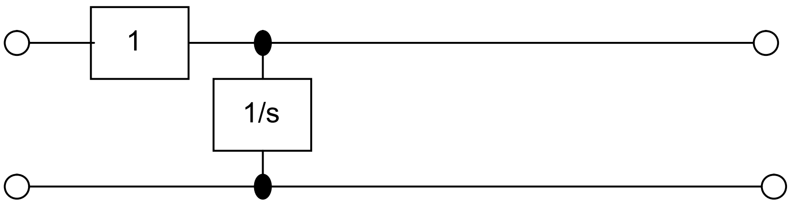
④1Ω の追加



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2+2s+1 & 2s^3+2s^2+2s+1 \\ 2s & 2s^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^3+4s^2+4s+2 & 2s^3+2s^2+2s+1 \\ 2s^2+2s+1 & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

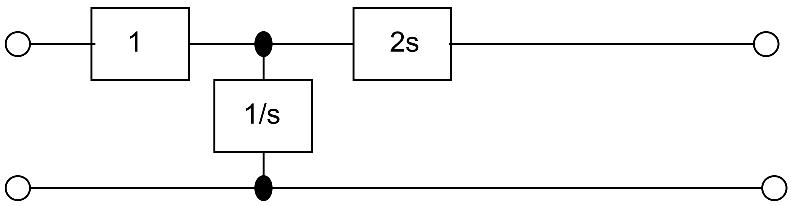
　四端子定数 A の位置に、R−R 型バタワースフィルターの伝達関数逆数が出ています。「はしご型 LC フィルターの設計」の章をご参照下さい。

(2)図 6 の回路の四端子定数を求めます。
①1Ω と 1F の接続



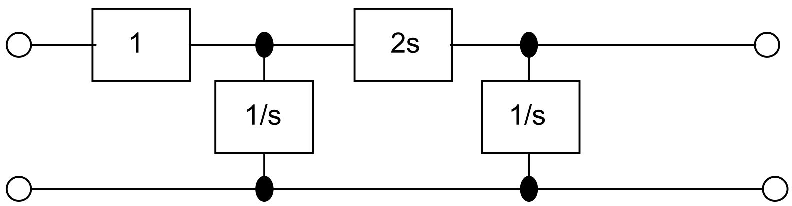
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

②2H の追加



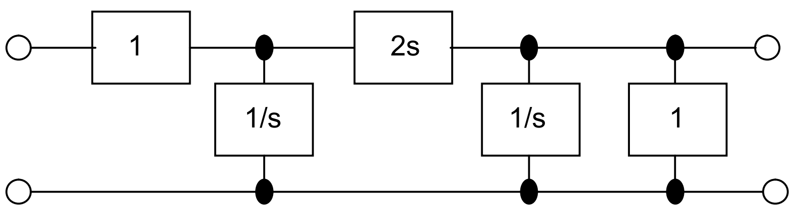
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 2s^2+2s+1 \\ s & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

③1F の追加



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 2s^2+2s+1 \\ s & 2s^2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^3+2s^2+2s+1 & 2s^2+2s+1 \\ 2s^3+2s & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

④1Ω の追加



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^3+2s^2+2s+1 & 2s^2+2s+1 \\ 2s^3+2s & 2s^2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^3+4s^2+4s+2 & 2s^2+2s+1 \\ 2s^3+2s^2+2s+1 & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

こちらも四端子定数 A の位置に、R−R 型バタワースフィルターの伝達関数逆数が出ています。

目次へ戻る