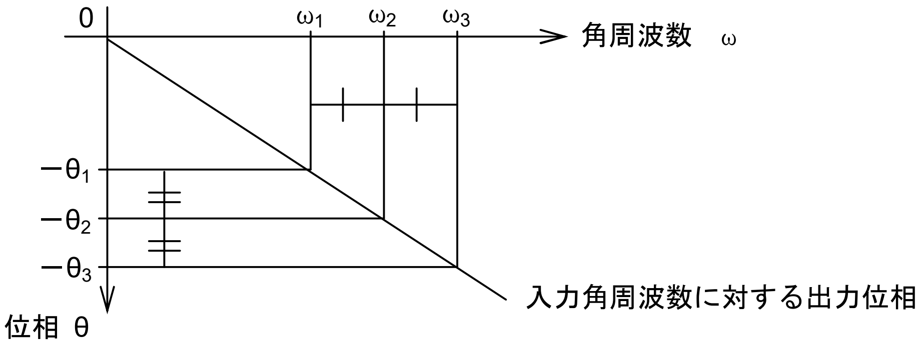
高次ベッセルフィルター　　　　　　　　　　　　　　　2017 年 6 月 2 日　目次に戻る

2022.4.13　2022.4.19　2022.4.22　2024.5.28　2024.6.4　2024.6.10　訂正

1、角周波数と位相

前の章で 2 次フィルターの伝達関数標準形から、群遅延時間 1 秒の 2 次ベッセルフィルターの伝達関数を求めました。同じ方法で 3 次ベッセルフィルターの伝達関数を求めようとしますと、計算量が膨大で手に負えなくなります。興味のある方はトライして下さい。3 次以上のベッセルフィルターの伝達関数は、違うアプローチで求めます。

例えば、方形波の基本波が 0.4 波長遅れた場合、3 倍高調波は 0.4×3 の 1.2 波長遅れでなければなりません。5 倍高調波は 0.4×5 の 2.0 波長遅れでなければなりません。このことを位相の遅れで言い換えますと、基本波が 144 度遅れたら、3 倍高調波は 432 度、5 倍高調波は 720 度遅れなければなりません。角周波数と位相遅れが比例しなければ、方形波の波形が崩れます。との説明は 2 次ベッセルで既に行いました。ここからは、角度や位相を表すのに弧度法[rad]を使います。



入力の角周波数に対する出力位相のグラフを描いた時、角周波数と出力位相が比例する関係が必要です。上のグラフの様に、入力の角周波数と出力の位相遅れが直線の関係になっていなければなりません。グラフの横軸は角周波数 ω [rad/sec]、縦軸は位相 θ [rad]です。

その時の角周波数 ω [rad/sec]に、入ってから出るまでの時間 t [sec]を掛ければ、遅れの角度(位相)$-\theta$ [rad]が出ます。位相遅れ$-\theta=-\omega t$ です。入ってから出るまでの時間 t が固定されていれば、角周波数 ω の増加に伴い、位相は一定の傾きでマイナス方向に増加します。

その傾きは例えば、

$$\frac{-\theta_2-(-\theta_1)}{\omega_2-\omega_1}=\frac{-\omega_2 t-(-\omega_1 t)}{\omega_2-\omega_1}=\frac{-\omega_2 t+\omega_1 t}{\omega_2-\omega_1}=\frac{-t(\omega_2-\omega_1)}{\omega_2-\omega_1}=-t$$

の直線となります。例えば、ベッセルフィルターに入ってから出るまでの時間 t が 1 秒で固

定されている場合、入力が 1[rad/sec]の時、出力の位相遅れはー1[rad]です。入力が 2 [rad/sec]の時、出力の位相遅れはー2 [rad]です。入力が 3 [rad/sec]の時、出力の位相遅れはー3 [rad]です。つまり θ がー(ω×1)の時も 1 つの直線になります。この入出力の遅延時間は後ほど自由に変更出来ますので、まず 1 秒で設計してみます。

2、ベッセルフィルターの伝達関数

入力角周波数と出力位相の関係が、上記の様に直線になる伝達関数 G(s)が有ると仮定します。この伝達関数の s に jω を代入し、周波数伝達関数 G(jω)に直します。周波数伝達関数の分子分母に分母の共役（きょうやく）複素数を掛け、実数部 Re G(jω)と虚数部 Im G(jω)に分けますと、

$$
\begin{aligned}
\left[G(s)\right]_{s=j\omega} &= \frac{C}{\operatorname{Re}G(j\omega)+j\operatorname{Im}G(j\omega)} \\
&= \frac{C}{\operatorname{Re}G(j\omega)+j\operatorname{Im}G(j\omega)} \bullet \frac{\operatorname{Re}G(j\omega)-j\operatorname{Im}G(j\omega)}{\operatorname{Re}G(j\omega)-j\operatorname{Im}G(j\omega)} \\
&= \frac{C\operatorname{Re}G(j\omega)-Cj\operatorname{Im}G(j\omega)}{\{\operatorname{Re}G(j\omega)\}^2+\{\operatorname{Im}G(j\omega)\}^2} \\
&= \frac{C\operatorname{Re}G(j\omega)}{\{\operatorname{Re}G(j\omega)\}^2+\{\operatorname{Im}G(j\omega)\}^2} - j\frac{C\operatorname{Im}G(j\omega)}{\{\operatorname{Re}G(j\omega)\}^2+\{\operatorname{Im}G(j\omega)\}^2}
\end{aligned}
$$

になります。分子の C は s＝jω＝0 つまり角周波数 0（直流）での利得を 1、つまり 0[dB]にする為に伝達関数分子に載せてある定数項です。分母の定数項と同じ値が載せてあります。上記計算は抽象的過ぎて非常に分かり難いので、3 次チェビシェフフィルターの伝達関数を用いて、具体的に計算した例を載せます。3 次チェビシェフフィルターの伝達関数は、

$$
\frac{0.25059}{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}
$$

です。分子の 0.25059 は角周波数 0 つまり s＝0 で利得を 1 にする為の係数です。s＝0 で伝達関数は 1 になります。この伝達関数の s に jω を代入し、周波数伝達関数に直しますと、

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{0.25059}{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}\right]_{s=j\omega} \\
&\qquad = \frac{0.25059}{(j\omega)^3+0.59724(j\omega)^2+0.92834(j\omega)+0.25059} \\
&\qquad = \frac{0.25059}{-j\omega^3-0.59724\omega^2+j0.92834j\omega+0.25059}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{0.25059}{-0.59724\omega^2+0.25059-j\omega^3+j0.92834j\omega}$$
$$=\frac{0.25059}{-0.59724\omega^2+0.25059+j(-\omega^3+0.92834\omega)}$$

になります。分母の共役（きょうやく）複素数を分子分母に掛け、有理化しますと、

$$=\frac{0.25059}{\{(-0.59724\omega^2+0.25059)+j(-\omega^3+0.92834\omega)\}}\bullet\frac{\{(-0.59724\omega^2+0.25059)-j(-\omega^3+0.92834\omega)\}}{\{(-0.59724\omega^2+0.25059)-j(-\omega^3+0.92834\omega)\}}$$
$$=\frac{0.25059(-0.59724\omega^2+0.25059)}{(-0.59724\omega^2+0.25059)^2+(-\omega^3+0.92834\omega)^2}-j\frac{0.25059(-\omega^3+0.92834\omega)}{(-0.59724\omega^2+0.25059)^2+(-\omega^3+0.92834\omega)^2}$$

になり実数部と虚数部に分かれました。分子の定数 C この場合の 0.25059 については、チェビシェフフィルターの章 29 ページ付近をご覧下さい。また、伝達関数の s に jω を代入し周波数伝達関数にする事については「s＝jω とは何か」の章や「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご覧下さい。抽象的な計算に戻り、アークタンジェント $\frac{虚数部}{実数部}$ で周波数伝達関数の遅れ位相角度ーθ を求めますと、

$$-\theta=\tan^{-1}\frac{\dfrac{-C\,\mathrm{Im}\,G(j\omega)}{\{\mathrm{Re}\,G(j\omega)\}^2+\{\mathrm{Im}\,G(j\omega)\}^2}}{\dfrac{C\,\mathrm{Re}\,G(j\omega)}{\{\mathrm{Re}\,G(j\omega)\}^2+\{\mathrm{Im}\,G(j\omega)\}^2}}$$
$$=\tan^{-1}\frac{-C\,\mathrm{Im}\,G(j\omega)}{\{\mathrm{Re}\,G(j\omega)\}^2+\{\mathrm{Im}\,G(j\omega)\}^2}\bullet\frac{\{\mathrm{Re}\,G(j\omega)\}^2+\{\mathrm{Im}\,G(j\omega)\}^2}{C\,\mathrm{Re}\,G(j\omega)}$$
$$=\tan^{-1}\frac{-\mathrm{Im}\,G(j\omega)}{\mathrm{Re}\,G(j\omega)}$$
$$=-\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\,G(j\omega)}{\mathrm{Re}\,G(j\omega)}$$

になります。最後の部分、$\tan^{-1}$ は奇関数ですので $\tan^{-1}(-X)=-\tan^{-1}X$ です。

伝達関数の s に jω を代入した時、虚数部 Im G(jω)になるのは s の奇数乗の部分、つまり s の奇多項式部分です。実数部 Re G(jω)になるのは s の 0 乗を含めた偶数乗部分、つまり s

の偶多項式部分と定数部分です。先程仮定しました通り、入出力時間が１秒固定ですから、θ と $\omega \times 1$ とは同じ値を取り、

$$-\tan^{-1}\frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} = -(\omega \times 1)$$

$$\tan^{-1}\frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} = \omega$$

となります。$\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数ですので、

$$\tan\omega = \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)}$$

になります。これは、角周波数 ω の $\tan$ が伝達関数の s に $j\omega$ を代入した周波数伝達関数の、「虚数部÷実数部」になると言うことです。

$\tan\omega$ を ω の「奇多項式÷偶多項式」で表すことが出来れば、偶多項式と $j\times$ 奇多項式とを合体させたもの、つまり偶多項式＋$j\times$ 奇多項式が、周波数伝達関数の分母になります。分子には偶多項式中の定数と同じ値を載せます。

$\tan$ は $\dfrac{\sin}{\cos}$ です。$\sin$ は奇関数、$\cos$ は偶関数ですから必ず出来ます。ここで、$\tan x$ に対するランベルト氏の連分数展開を紹介致します。

$\sin x$ のマクローリン展開が、$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \bullet\bullet\bullet$、

$\cos x$ のマクローリン展開が、$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \bullet\bullet\bullet$、

分数のかけ算が、$3 \times \dfrac{2}{3} = 3 \times \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = 3 \times \dfrac{2}{3}$ になることを使います。計算は、

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \bullet\bullet\bullet}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \bullet\bullet\bullet} = \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} \bullet\bullet\bullet}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} \bullet\bullet\bullet}$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\bullet\bullet\bullet}=x\bullet\frac{1}{\dfrac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}=\frac{x}{\dfrac{1-\frac{3x^2}{6}+\frac{5x^4}{120}-\frac{7x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet\right)-\frac{2x^2}{6}+\frac{4x^4}{120}-\frac{6x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}-\dfrac{\frac{2x^2}{6}-\frac{4x^4}{120}+\frac{6x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}$$

$$=\frac{x}{1-\dfrac{\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{30}+\frac{x^6}{840}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}=\frac{x}{1-\dfrac{x^2\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet\right)}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\bullet\bullet\bullet}}$$

$$=\frac{x}{1-x^2\bullet\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\bullet\bullet\bullet}}=\frac{x}{1-\dfrac{x^2}{\dfrac{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{\frac{3}{3}-\frac{5x^2}{30}+\frac{7x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{\left(\frac{3}{3}-\frac{3x^2}{30}+\frac{3x^4}{840}\bullet\bullet\bullet\right)-\frac{2x^2}{30}+\frac{4x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{\frac{3}{3}-\frac{3x^2}{30}+\frac{3x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}-\cfrac{\frac{2x^2}{30}-\frac{4x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2\left(\frac{2}{30}-\frac{4x^2}{840}\bullet\bullet\bullet\right)}{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-x^2\bullet\cfrac{1}{\cfrac{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+\frac{x^4}{840}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{\left(\frac{5}{15}-\frac{5x^2}{210}\bullet\bullet\bullet\right)-\frac{2x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{\frac{5}{15}-\frac{5x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}-\cfrac{\frac{2x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2\left(\frac{1}{105}\bullet\bullet\bullet\right)}{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-x^2\bullet\cfrac{1}{\cfrac{\frac{1}{15}-\frac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}{\frac{1}{105}\bullet\bullet\bullet}}}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{\cfrac{\cfrac{1}{15}-\cfrac{x^2}{210}\bullet\bullet\bullet}{\cfrac{1}{105}\bullet\bullet\bullet}}}}}$$

となります。これを続けていけば、

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9\bullet\bullet\bullet}}}}}$$

です。この連分数を各々のマイナス記号の先を切り捨て、普通の分数に書き換えますと、

$$\tan x_1=\frac{x}{1}$$

$$\tan x_2=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3}}=\cfrac{x}{\cfrac{3-x^2}{3}}=\frac{3x}{3-x^2}$$

$$\tan x_3=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{15-x^2}{5}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{5x^2}{15-x^2}}$$

$$=\cfrac{x}{\cfrac{15-x^2-5x^2}{15-x^2}}=\frac{(15-x^2)x}{15-x^2-5x^2}=\frac{15x-x^3}{15-6x^2}$$

$$\tan x_4=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{35-x^2}{7}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{7x^2}{35-x^2}}}$$

$$= \frac{x}{1-\frac{x^2}{\frac{105-3x^2-7x^2}{35-x^2}}} = \frac{x}{1-\frac{(35-x^2)x^2}{105-3x^2-7x^2}}$$

$$= \frac{x}{\frac{105-3x^2-7x^2-(35-x^2)x^2}{105-3x^2-7x^2}} = \frac{(105-3x^2-7x^2)x}{105-3x^2-7x^2-(35-x^2)x^2}$$

$$= \frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4}$$

$$\tan x_5 = \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{7-\frac{x^2}{9}}}}} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{\frac{63-x^2}{9}}}}}$$

$$= \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{9x^2}{63-x^2}}}} \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{\frac{5(63-x^2)-9x^2}{63-x^2}}}}$$

$$= \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{(63-x^2)x^2}{5(63-x^2)-9x^2}}} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{3-\frac{63x^2-x^4}{315-14x^2}}}$$

$$= \frac{x}{1-\frac{(315-14x^2)x^2}{3(315-14x^2)-63x^2+x^4}} = \frac{x}{1-\frac{315x^2-14x^4}{945-105x^2+x^4}}$$

$$= \frac{x}{\frac{945-105x^2+x^4-315x^2+14x^4}{945-105x^2+x^4}}$$

$$= \frac{(945-105x^2+x^4)x}{945-105x^2+x^4-315x^2+14x^4}$$

$$= \frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}$$

$$\tan x_6 = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cfrac{x^2}{11}}}}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{\cfrac{99-x^2}{11}}}}}}$$

$$= \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{11x^2}{99-x^2}}}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{\cfrac{7(99-x^2)-11x^2}{99-x^2}}}}}$$

$$= \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{(99-x^2)x^2}{7(99-x^2)-11x^2}}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{99x^2-x^4}{693-18x^2}}}}$$

$$= \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{5(693-18x^2)-99x^2+x^4}{693-18x^2}}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{3465-189x^2+x^4}{693-18x^2}}}}$$

$$= \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{(693-18x^2)x^2}{3465-189x^2+x^4}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{3(3465-189x^2+x^4)-(693-18x^2)x^2}{3465-189x^2+x^4}}}$$

$$= \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{10395-1260x^2+21x^4}{3465-189x^2+x^4}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{(3465-189x^2+x^4)x^2}{10395-1260x^2+21x^4}}$$

$$= \cfrac{x}{1-\cfrac{3465x^2-189x^4+x^6}{10395-1260x^2+21x^4}} = \cfrac{x}{\cfrac{10395-1260x^2+21x^4-3465x^2+189x^4-x^6}{10395-1260x^2+21x^4}}$$

$$= \frac{x}{\dfrac{10395-4725x^2+210x^4-x^6}{10395-1260x^2+21x^4}} = \frac{(10395-1260x^2+21x^4)x}{10395-4725x^2+210x^4-x^6}$$

$$= \frac{10395x-1260x^3+21x^5}{10395-4725x^2+210x^4-x^6}$$

$$\tan x_7 = \frac{135135x-17325x^3+378x^5-x^7}{135135-62370x^2+3150x^4-28x^6}$$

$$\tan x_8 = \frac{2027025x-270270x^3+6930x^5-36x^7}{2027025-945945x^2+51975x^4-630x^6+x^8}$$

·
·
·

になります。この tan x は、全て「奇多項式÷偶多項式」になっています。

周波数伝達関数の分母には、この分数を使います。x を ω に換え、分母の偶多項式そのままと、分子の奇多項式に j を掛けたものとを足し算します。足し算したものを分母とし、角周波数 0（直流）での利得を 1 にする為、分母の定数項と同じものを分子に載せた、周波数伝達関数 G(jω)を作りますと、

$$G(j\omega)_1 = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$G(j\omega)_2 = \frac{3}{3-\omega^2+j3\omega}$$

$$G(j\omega)_3 = \frac{15}{15-6\omega^2+j15\omega-j\omega^3}$$

$$G(j\omega)_4 = \frac{105}{105-45\omega^2+\omega^4+j105\omega-j10\omega^3}$$

$$G(j\omega)_5 = \frac{945}{945-420\omega^2+15\omega^4+j945\omega-j105\omega^3+j\omega^5}$$

$$G(j\omega)_6 = \frac{10395}{10395-4725\omega^2+210\omega^4-\omega^6+j10395\omega-j1260\omega^3+j21\omega^5}$$

$$G(j\omega)_7 = \frac{135135}{135135-62370\omega^2+3150\omega^4-28\omega^6+j135135\omega-j17325\omega^3+j378\omega^5-j\omega^7}$$

$$G(j\omega)_8 = \frac{2027025}{2027025-945945\omega^2+51975\omega^4-630\omega^6+\omega^8+j2027025\omega-j270270\omega^3+j6930\omega^5-j36\omega^7}$$

.
.
.

になります。これらの式は周波数伝達関数 G(jω)です。伝達関数の s に jω を代入したものが周波数伝達関数 G(jω)ですから、s＝jω の逆、$\omega = \dfrac{s}{j} = -js$ で伝達関数 G(s)に戻しますと、

$$G(s)_1 = \left[\frac{1}{1+j\omega}\right]_{\omega=-js} = \frac{1}{1+j(-js)} = \frac{1}{s+1}$$

$$G(s)_2 = \left[\frac{3}{3-\omega^2+j3\omega}\right]_{\omega=-js} = \frac{3}{3-(-js)^2+j3(-js)} = \frac{3}{s^2+3s+3}$$

$$G(s)_3 = \left[\frac{15}{15-6\omega^2+j15\omega-j\omega^3}\right]_{\omega=-js} = \frac{15}{15-6(-js)^2+j15(-js)-j(-js)^3}$$

$$= \frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}$$

$$G(s)_4 = \left[\frac{105}{105-45\omega^2+\omega^4+j105\omega-j10\omega^3}\right]_{\omega=-js}$$

$$= \frac{105}{105-45(-js)^2+(-js)^4+j105(-js)-j10(-js)^3}$$

$$= \frac{105}{s^4+10s^3+45s^2+105s+105}$$

$$G(s)_5 = \left[\frac{945}{945-420\omega^2+15\omega^4+j945\omega-j105\omega^3+j\omega^5}\right]_{\omega=-js}$$

$$= \frac{945}{945-420(-js)^2+15(-js)^4+j945(-js)-j105(-js)^3+j(-js)^5}$$

$$= \frac{945}{s^5+15s^4+105s^3+420s^2+945s+945}$$

$$G(s)_6 = \left[\frac{10395}{10395-4725\omega^2+210\omega^4-\omega^6+j10395\omega-j1260\omega^3+j21\omega^5}\right]_{\omega=-js}$$

$$= \frac{10395}{10395-4725(-js)^2+210(-js)^4-(-js)^6+j10395(-js)-j1260(-js)^3+j21(-js)^5}$$

$$=\frac{10395}{s^6+21s^5+210s^4+1260s^3+4725s^2+10395s+10395}$$

$$G(s)_7=\left[\frac{135135}{135135-62370\omega^2+3150\omega^4-28\omega^6+j135135\omega-j17325\omega^3+j378\omega^5-j\omega^7}\right]_{\omega=-js}$$

$$=\frac{135135}{135135\ -62370\,(-js)^2+3150\,(-js)^4-28(-js)^6+j135135\,(-js)-j17325\,(-js)^3+j378\,(-js)^5-j(-js)^7}$$

$$=\frac{135135}{s^7+28s^6+378s^5+3150s^4+17325s^3+62370s^2+135135s+135135}$$

$$G(s)_8=\left[\frac{2027025}{2027025-945945\omega^2+51975\omega^4-630\omega^6+\omega^8+j2027025\omega-j270270\omega^3+j6930\omega^5-j36\omega^7}\right]_{s=-js}$$

$$=\frac{2027025}{2027025-945945(-js)^2+51975(-js)^4-630(-js)^6+(-js)^8+j2027025(-js)-j270270(-js)^3+j6930(-js)^5-j36(-js)^7}$$

$$=\frac{2027025}{s^8+36s^7+630s^6+6930s^5+51975s^4+270270s^3+945945s^2+2027025s+2027025}$$

・

・

・

になります。次の項で紹介致します様に、これらの式の分母は 1 次式と 2 次式に因数分解されます。2 ページにあります様に、ベッセルフィルターの出発点が既に伝達関数ですので、その 1 次式を＝0 と置いた時の根（解）は負の実数、2 次式を＝0 と置いた時の根（解）は、複素平面左半面の共役複素数根になります。1 次遅れ要素や 2 次遅れ要素と呼ぶ回路の直列接続となります。入ってから出るまでの遅延時間が 1 秒の伝達関数を作りますと、高次の遅れ要素になり、そのまま低域通過フィルターになります。

3、ベッセルフィルターの根

この伝達関数の分母多項式は、これまでの伝達関数とは違い、因数分解する解法がありません。コンピューターを使用して、数値計算で因数分解を行います。例えばベアストウ・ヒッチコック法を使います。ベアストウ・ヒッチコック法については「ベアストウ・ヒッチコック法について」の章をご参照下さい。

伝達関数分母が偶数次の場合は、いくつかの 2 次式に因数分解します。奇数次の場合は一つの 1 次式と、いくつかの 2 次式に因数分解します。2 次式は更に根（解）の公式により因数分解します。

数値計算で分母を因数分解した結果を下表に示します。奇数次の一番前の値は 1 次式の根です。奇数次の 2 番目以降の値と偶数次の値は共役複素数根を表しています。; が根の区切りです。実数部±j 虚数部です。根は全て複素平面左半面の値ですので安定です。

奇数次の場合は、(sー根)･{ sー(実数部＋j 虚数部) }･{ sー(実数部ーj 虚数部) }・・・と因数分解されます。共役複素数根の因数は、掛け算により実数係数の 2 次式となります。

偶数次の場合は、{ sー(実数部＋j 虚数部) }･{ sー(実数部ーj 虚数部) }・・・と因数分解されます。共役複素数根の因数は、掛け算により実数係数の 2 次式となります。

それぞれの分子に分母の定数項と同じ値を載せ､s＝jω＝0 での利得を1＝0[dB]にします。

ベッセルフィルターの根

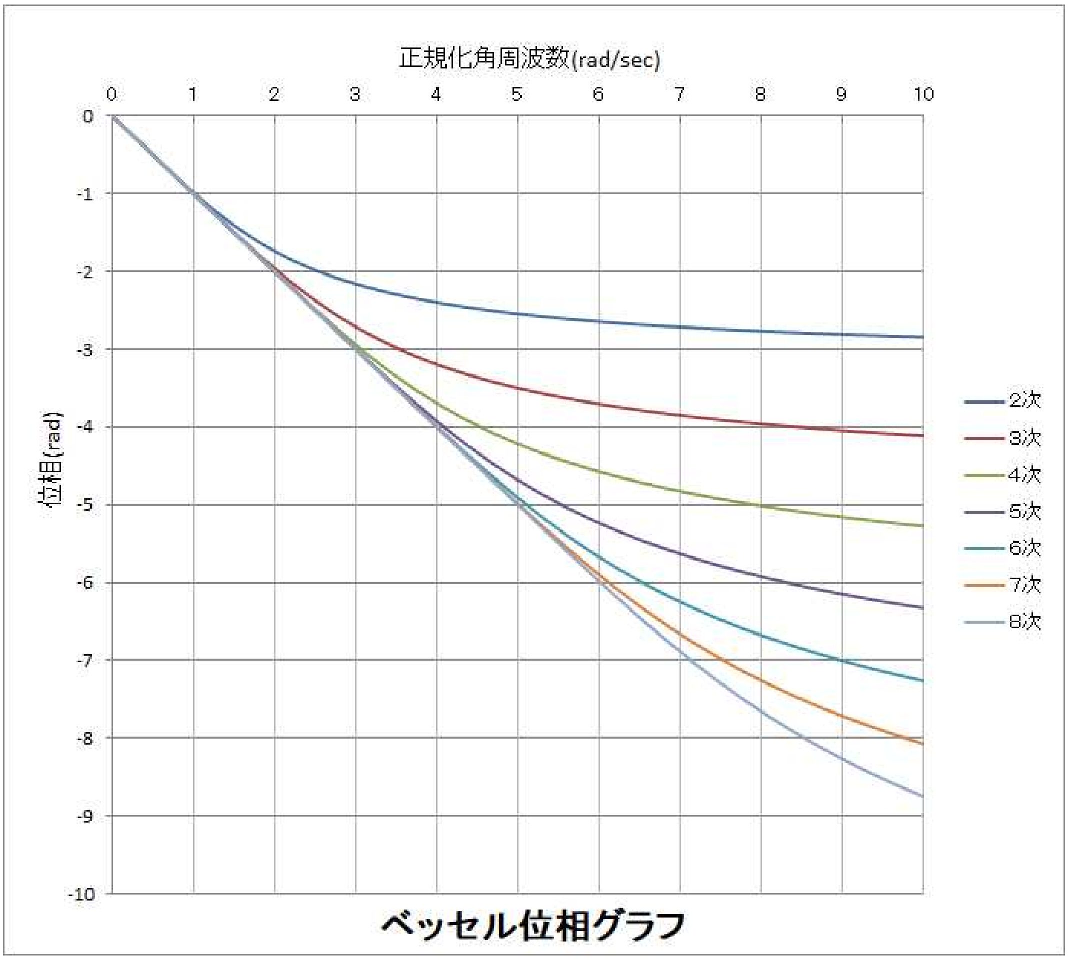
n	
1	-1.0000000;
2	-1.5000000±j0.8660254
3	-2.3221854 ; -1.8389073±j1.7543810
4	-2.8962106±j0.8672341 ; -2.1037894±j2.6574180
5	-3.6467386 ; -3.3519564±j1.7426614 ; -2.3246743±j3.5710229
6	-4.2483594±j0.8675097 ; -3.7357084±j2.6262723 ; -2.5159322±j4.4926730
7	-4.9717869 ; -4.7582905±j1.7392861 ; -4.0701392±j3.5171740 ; -2.6856769±j5.4206941
8	-5.5878860±j0.8676144 ; -2.8389840±j6.3539113 ; -4.3682892±j4.4144425 ; -5.2048408±j2.6161751

4、ベッセルフィルターの入出力位相

入力の角周波数に対する出力位相のグラフを描きました。グラフの横軸は角周波数 ω [rad/sec]、縦軸は位相θ[rad]です。方眼目盛りを使用しました。

位相グラフは、上表のベッセルフィルター伝達関数の 1 次遅れ要素または 2 次遅れ要素ごとに、出力の位相をエクセルの ATAN2 関数で計算し、最後に合計したものです。

1 ページに描きましたグラフの様に、入力の角周波数と出力の位相遅れが直線の関係になっています。次数が増えるほど近似が良くなり、直線区間が長くなります。高い角周波数まで出力位相が比例しています。

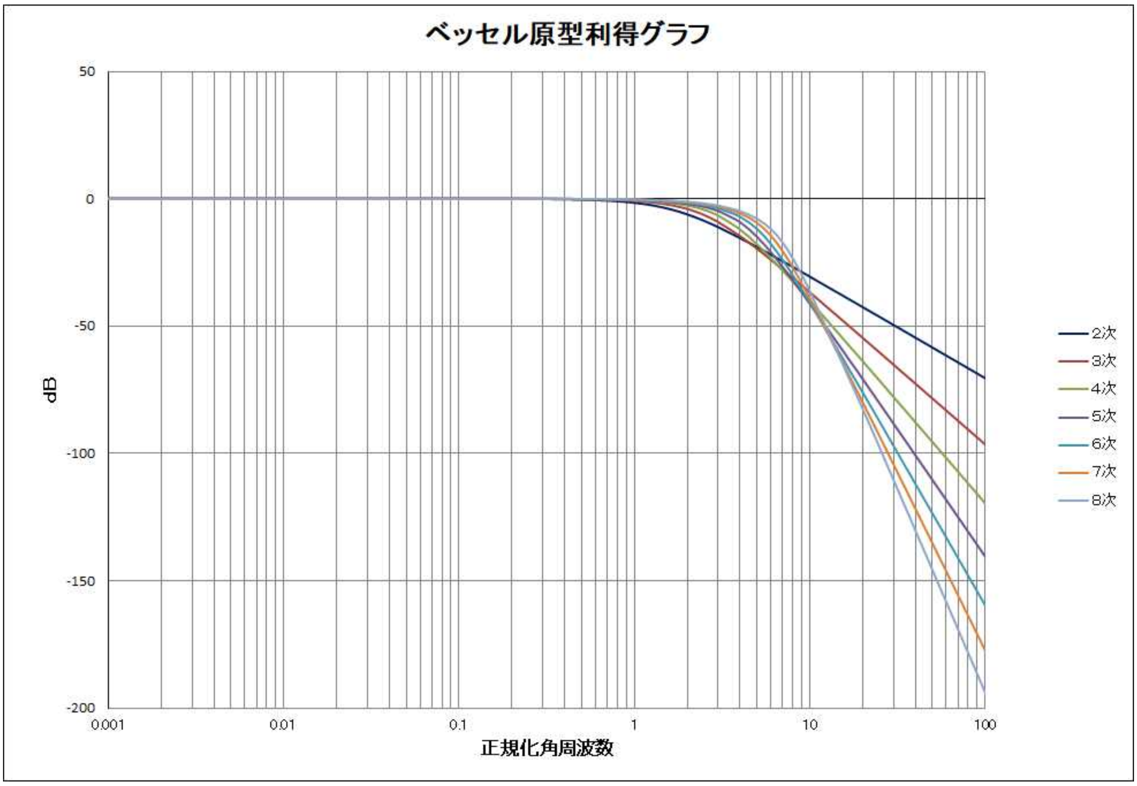


5、ベッセルフィルターの利得

ベッセルフィルターの利得を求めてみます。

伝達関数から利得を求めるには、伝達関数の s に＋jω とーjω を代入し、掛け合わせ、平方根にすれば良いです。更に dB 値にするには、常用対数にしてから 20 を掛けます。19～20 ページ付近に、もっと詳しい説明があります。

次の利得グラフは、前頁の表のベッセルフィルター伝達関数の 1 次または 2 次の因数ごとに、利得を dB で計算し、最後に合計したものです。



6、ベッセルフィルターの群遅延時間

ベッセルフィルターの群遅延時間を求めます。2 次ベッセルフィルターの章の 4、2 次フィルターの位相微分のところで紹介致しましたが、位相遅れの傾きである群遅延時間を求める微分計算は、複素共役根がーa±jb の時、

$$\frac{d\theta}{d\omega}=\frac{-2a(a^2+b^2+\omega^2)}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$$

でした。位相遅れを角周波数で微分し、2 次フィルターの群遅延時間を求める為の式です。

ここで奇数次のフィルターで使う、1 次フィルターの群遅延時間を求めます。1 次部分の根をーa とします。位相遅れを求める為、伝達関数に $j\omega$ を代入し、共役複素数を掛け、実数部と虚数部に分けます。分子にも a が乗っていますが、角周波数 0 で利得を 1 にする為です。

$$\left[\frac{a}{s+a}\right]_{s=j\omega}=\frac{a}{a+j\omega}=\frac{a(a-j\omega)}{(a+j\omega)(a-j\omega)}=\frac{a^2-ja\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{a^2}{a^2+\omega^2}-j\frac{a\omega}{a^2+\omega^2}$$

次に位相遅れ θ を求める為、アークタンジェント $\dfrac{\text{虚数部}}{\text{実数部}}$ を求めますと、

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\dfrac{-a\omega}{a^2+\omega^2}}{\dfrac{a^2}{a^2+\omega^2}} = \tan^{-1}\frac{-a\omega}{a^2+\omega^2} \bullet \frac{a^2+\omega^2}{a^2} = \tan^{-1}\frac{-\omega}{a}$$

になります。この値を微分します。$\tan^{-1}$ の変数 $\dfrac{-\omega}{a}$ も ω の関数である、合成関数の微分ですから、$\theta = \tan^{-1} u$ 、$u = -\dfrac{1}{a}\cdot\omega$ と置き、

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{d\theta}{du}\cdot\frac{du}{d\omega} = \frac{d(\tan^{-1} u)}{du}\cdot\frac{d\left(-\dfrac{1}{a}\cdot\omega\right)}{d\omega} = \frac{1}{1+u^2}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)$$

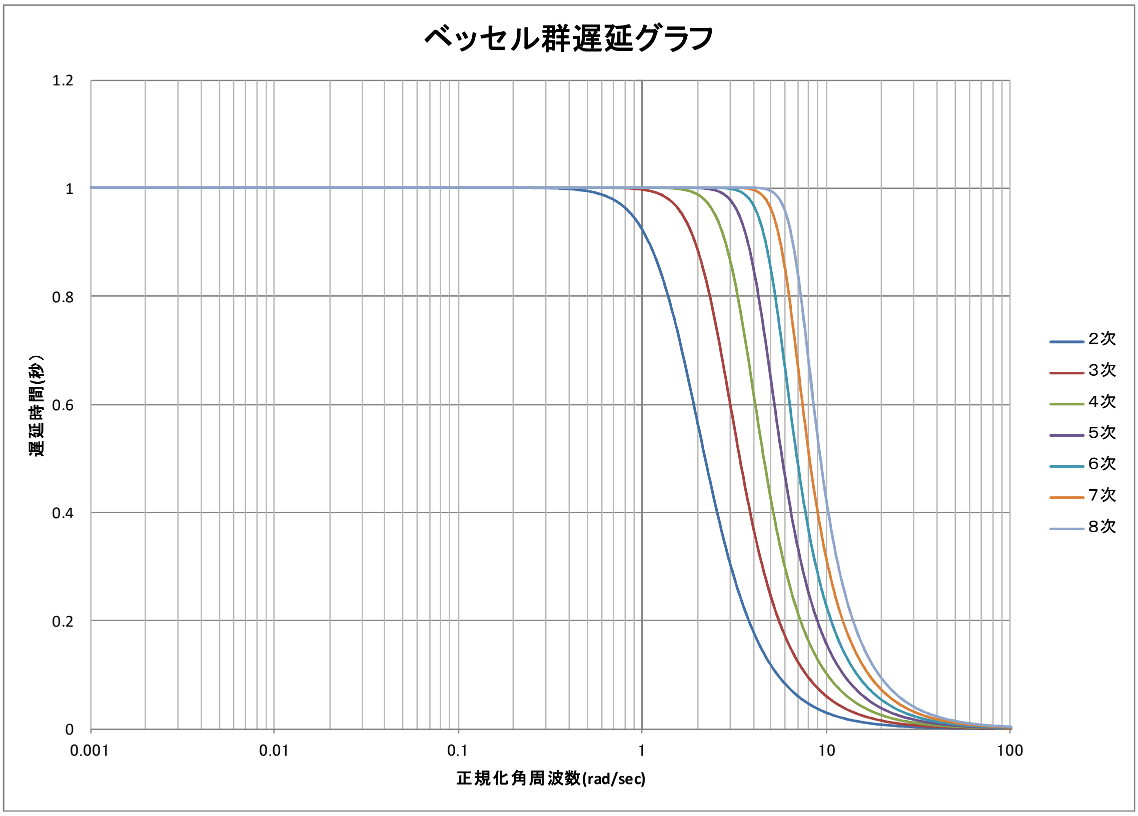
u をもとに戻し、

$$= \frac{-\dfrac{1}{a}}{1+\left(-\dfrac{\omega}{a}\right)^2} = \frac{-\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{\omega^2}{a^2}} = \frac{-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a^2+\omega^2}{a^2}} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2+\omega^2} = \frac{-a}{a^2+\omega^2}$$

になります。これが 1 次フィルターの位相遅れを角周波数で微分した、群遅延時間を求める式です。

次頁のグラフは、先程のベッセルフィルターの根の表の値で、1 次または 2 次の要素ごとに群遅延時間を計算し、最後に合計したものです。

高次になるほど遅延時間 1 秒が高い角周波数まで伸びています。理想の遅延平坦に近づきます。



例えば ω=0 での群遅延時間を求めますと、1 次フィルターでは、

$$\left[\frac{-a}{a^2+\omega^2}\right]_{\omega=0}=\frac{-a}{a^2}=\frac{-1}{a}$$

になります。2 次フィルターでは、

$$\left[\frac{-2a(a^2+b^2+\omega^2)}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}\right]_{\omega=0}=\frac{-2a(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{-2a}{a^2+b^2}$$

になります。

1 次の式中の a に任意の数 k を掛けますと、

$$\frac{-1}{ka}=\frac{1}{k}\bullet\frac{-1}{a}$$

になります。

2 次の式中の a と b に、任意の数 k を掛けますと、

$$\frac{-2ka}{(ka)^2+(kb)^2}=\frac{-2ka}{k^2a^2+k^2b^2}=\frac{-2ka}{k^2(a^2+b^2)}=\frac{-2a}{k(a^2+b^2)}=\frac{1}{k}\bullet\frac{-2a}{a^2+b^2}$$

になります。両方とも群遅延時間が$\frac{1}{k}$になります。本章の 1 で述べた、群遅延時間を自由に設定出来ると言うのはこのことです。

「スケーリングと伝達関数」の章で見ました様に、回路の C や L を$\frac{1}{k}$倍しますと、伝達関数の根、1 次の場合の a、2 次の場合の a と b は k 倍されます。すると、そのフィルターの角周波数軸は k 倍され、今まで α[rad/sec]で起きることが、kα[rad/sec]で起きることになるのでした。それと同時に、群遅延時間は$\frac{1}{k}$倍されると言うことです。

C や L を減らせば、遮断周波数は高くなり、時間軸は縮まり遅延が小さくなると言うのは直感的に理解出来ることです。

群遅延時間が 1 秒で設計されたベッセル正規化フィルターの群遅延時間を、$\frac{1}{k}$にする時は、正規化角周波数を k 倍するときと同じスケーリングを行えば良いです。

群遅延時間は$\frac{1}{k}$秒になり、角周波数軸は k 倍されます。

元の群遅延グラフあるいは利得グラフの角周波数が、全部 k 倍されます。

7、ベッセルフィルターの設計

ベッセルフィルターの応用には大きく 2 種類あります。波形が崩れないフィルターとして使う場合と、信号を歪無く遅延させる目的で使う場合です。フィルターとして使う場合は減衰特性が問題となります。遅延目的で使う場合は減衰しない範囲が問題になります。

(1)ローパスフィルター

ベッセルフィルターの群遅延特性の良さに着目し、ローパスフィルターとして使いたい場合があります。

フィルターの基本であるバタワースフィルターでは普通、利得がー3.01[dB]になる地点を正規化角周波数 1[rad/sec]に置いています。利得がー3.01[dB]になる実周波数を遮断周波数と呼んでいます。出力が入力の$\frac{1}{\sqrt{2}}$になる周波数です。

13 ページの表の値で作った 15 ページのベッセルフィルターでは、正規化角周波数 1[rad/sec]での利得がー3.01[dB]になっていません。全部ばらばらです。

バタワースフィルターと比較する為には、ベッセルフィルターのー3.01[dB]地点を正規化角周波数 1[rad/sec]に持って来る必要があります。

3 次ベッセルフィルターの正規化角周波数 1[rad/sec]での利得を、ー3.01[dB]にする方法を提示します。この方法を応用すれば、1[rad/sec]やー3.01[dB]にこだわらず、任意の正規

化角周波数で、任意の負の利得を実現できます。

3 次ベッセルフィルターの伝達関数は、

$$\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}$$

でした。この伝達関数の 1[rad/sec]での利得を求めてみます。

その為に周波数伝達関数の絶対値を求めます。周波数伝達関数とは伝達関数の s に s＝jω を行ったもので、入力正弦波の大きさを変えひねりを加える（位相を変化させる）複素数です。交流理論のインピーダンスのことです。また周波数伝達関数の絶対値とは、伝達関数の s に s＝jω を行ったものと、伝達関数の s に s＝－jω を行ったものを掛け合わせ、平方根にしたもので実数です。出力正弦波を極形式の、大きさと位相で表した時の、大きさの方です。詳しいことは、「s＝jω とは何か」の章や「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

1[rad/sec]での周波数伝達関数の絶対値を求めめます。伝達関数の s に j1＝j と－j1＝－j を代入し、

$$\left[\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}\right]_{s=j}=\frac{15}{(j)^3+6(j)^2+j15+15}$$
$$=\frac{15}{-j-6+j15+15}$$
$$=\frac{15}{9+j14}$$

$$\left[\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}\right]_{s=-j}=\frac{15}{(-j)^3+6(-j)^2-j15+15}$$
$$=\frac{15}{j-6-j15+15}$$
$$=\frac{15}{9-j14}$$

両者を掛け合わせ平方根にすることにより、1[rad/sec]での出力の大きさになります。

$$\sqrt{\frac{15}{9+j14}\bullet\frac{15}{9-j14}}=\sqrt{\frac{15^2}{9^2+14^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{225}{277}}$$

この大きさをデシベル値に直しますと、

$$20 \cdot \mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{225}{277}} = -1.80595[\mathrm{dB}]$$

になりました。元の伝達関数の 1[rad/sec]での利得は、この値です。もちろんー3.01[dB]ではありません。元の伝達関数の利得が、ー3.01[dB]になる角周波数を求めます。

元の伝達関数に jω を代入し、

$$\left[\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}\right]_{s=j\omega} = \frac{15}{(j\omega)^3+6(j\omega)^2+15(j\omega)+15}$$

$$= \frac{15}{-j\omega^3-6\omega^2+j15\omega+15}$$

$$= \frac{15}{(-6\omega^2+15)+j(-\omega^3+15\omega)}$$

となります。元の伝達関数にーjω を代入しますと、

$$\left[\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}\right]_{s=-j\omega} = \frac{15}{(-j\omega)^3+6(-j\omega)^2+15(-j\omega)+15}$$

$$= \frac{15}{j\omega^3-6\omega^2-j15\omega+15}$$

$$= \frac{15}{(-6\omega^2+15)-j(-\omega^3+15\omega)}$$

になります。jω 代入式とーjω 代入式とを掛け合わせ平方根にすることにより、周波数伝達関数の絶対値になります。

$$\sqrt{\frac{15}{(-6\omega^2+15)+j(-\omega^3+15\omega)} \bullet \frac{15}{(-6\omega^2+15)-j(-\omega^3+15\omega)}}$$

$$= \sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}$$

この周波数伝達関数絶対値のデシベル値が、ー3.01[dB]になる場合、

$$20\mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}} = -3.01$$

と言う式になります。計算を続けますと、

$$\mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}=\frac{-3.01}{20}$$

$$\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}=10^{\frac{-3.01}{20}}$$

です。両辺を 2 乗して、

$$\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}=\left(10^{\frac{-3.01}{20}}\right)^2$$

$$\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}=10^{\frac{-3.01}{20}\times 2}$$

$$\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}=10^{\frac{-3.01}{10}}$$

$$\frac{225}{\omega^6+6\omega^4+45\omega^2+225}=\frac{1}{10^{\frac{3.01}{10}}}$$

$$\omega^6+6\omega^4+45\omega^2+225=225\bullet 10^{\frac{3.01}{10}}$$

$$\omega^6+6\omega^4+45\omega^2-224.9689207=0$$

と言う方程式が出来ました。左辺をベアストウ・ヒッチコック法による数値計算で因数分解しますと、(ベアストウ・ヒッチコック法については「ベアストウ・ヒッチコック法について」の章をご参照下さい)

$$(\omega^2-3.082104174)(\omega^2+2.829304849\omega+8.543535052)$$
$$(\omega^2-2.829304849\ \omega+8.543535052\ )=0$$

になります。さらに根（解）の公式で、各 2 次式を因数分解しますと、

$$(\omega+1.755592257)(\omega-1.755592257)$$
$$(\omega+1.4146524245+j2.5577907595924)(\omega+1.4146524245-j2.5577907595924)$$
$$(\omega-1.4146524245+j2.5577907595924)(\omega-1.4146524245-j2.5577907595924)$$
$$=0$$

になります。6 個ある括弧内を 0 にする方程式の根（解）の中で、正の実数は 1.755592257 だけです。ω＝1.755592257[rad/sec] が、元の伝達関数の利得を－3.01[dB]にする角周波数

です。

元の伝達関数の s を 1.755592257s にすることにより、1[rad/sec]入力時に 1.755592257 [rad/sec]が入力されたことになり、1[rad/sec]での利得がー3.01[dB]になります。

修正された伝達関数は、

$$\frac{15}{(1.755592257s)^3+6\cdot(1.755592257s)^2+15\cdot(1.755592257s)+15}$$

$$=\frac{15}{5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15}$$

となります。分子分母に$\frac{1}{5.410918221}$を掛けますと、

$$\frac{\frac{1}{5.410918221}\cdot 15}{\frac{1}{5.410918221}\cdot(5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15)}$$

$$=\frac{2.77217274}{s^3+3.41765007s^2+4.86680500s+2.77217274}$$

になります。分母をベアストウ・ヒッチコック法による数値計算で因数分解し、1 次と 2 次の多項式の積の形にしますと、

$$=\frac{2.77217274}{(s+1.32273616)\cdot(s^2+2.09491391s+2.09578662)}$$

$$=\frac{1.32273616}{s+1.32273616}\cdot\frac{2.09578662}{s^2+2.09491391s+2.09578662}$$

になります。この様な計算を、11 ページから 13 ページにありますベッセルフィルターの伝達関数分母に行う事により、正規化角周波数 1[rad/sec]での利得をー3.01[dB]にする事が出来ます。

次頁の表は、そうして求めたベッセルフィルターの分母の根です。2 次式は更に因数分解して共役複素数の根になっています。

奇数次の一番前の値は 1 次式の実根です。奇数次の 2 番目以降の値と偶数次の値は共役複素根を表しています。; が根の区切りです。実数部±j 虚数部です。根は全て複素平面左半面の値ですので安定です。

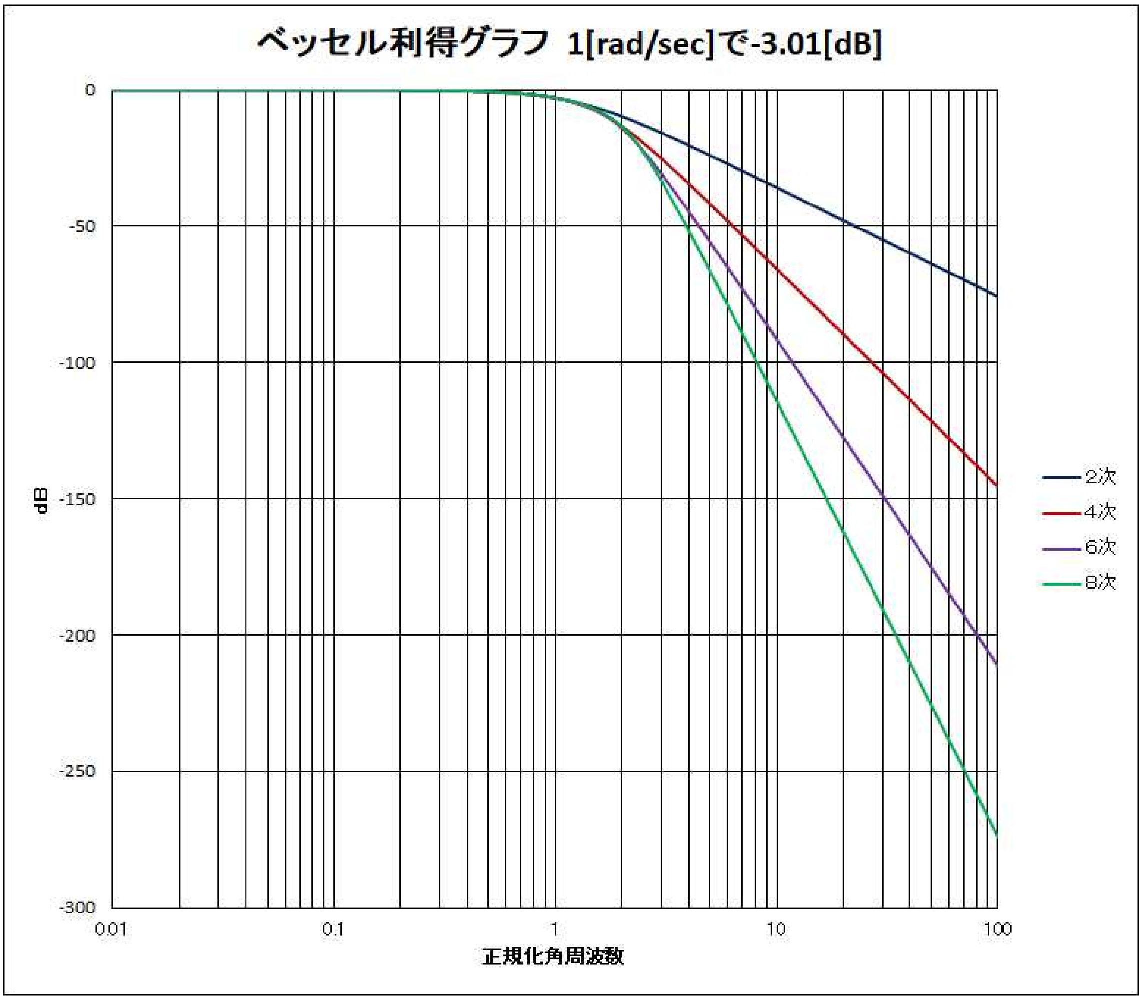
奇数次の場合は、(sー根)･{ sー(実数部＋j 虚数部) }･{ sー(実数部ーj 虚数部) }・・・と因数分解されます。共役複素数根の因数は、掛け算により実数係数の 2 次式となります。

偶数次の場合は、{ s－(実数部＋j 虚数部) }･{ s－(実数部－j 虚数部 }・・・と因数分解されます。共役複素数根の因数は、掛け算により実数係数の 2 次式となります。

それぞれの分子に分母の定数項と同じ値を載せ､s＝jω＝0 での利得を 1＝0[dB]にします。

1[rad/sec]での利得が－3.01[dB]のベッセルフィルターの根

n	
1	-1.0000000;
2	-1.1016013±j0.6360098
3	-1.3226758 ; -1.0474091±j0.9992645
4	-1.3700678±j0.4102497 ; -0.9952088±j1.2571057
5	-1.5023163 ; -1.3808773±j0.7179096 ; -0.9576765±j1.4711243
6	-1.5714909±j0.3208964 ; -1.3818581±j0.9714719 ; -0.9306565±j1.6618633
7	-1.6843682 ; -1.6120388±j0.5892445 ; -1.3789032±j1.1915668 ; -0.9098678±j1.8364513
8	-1.7574084±j0.2728676 ; -0.8928697±j1.9983258 ; -1.3738412±j1.3883566 ; -1.6369394±j0.8227956



バタワースやチェビシェフのフィルターでは、通過域の最大減衰量及び阻止域の最小減衰量、及び通過域を抜け阻止域に入るまでの過渡帯域幅により次数が決定されました。各々の値により次数を決定する式が存在しました。ベッセルフィルターにはその様な式がありません。

ある正規化角周波数に於いて、仕様で決められた減衰量になるかどうかは、計算して見なくては分りません。19 ページから 20 ページで行った周波数伝達関数の絶対値を求める計算を行い、カットアンドトライで次数を決めます。

次数が決定されましたら、回路を決め、各素子値に対し周波数スケーリングと数値スケーリングを行い、実用的な素子値にまとめます。

「スケーリング」の章「スケーリングと伝達関数」の章をご参照下さい。

(2)遅延フィルター

ベッセルフィルターの群遅延特性を使う用途です。

群遅延のグラフでは次数が増加する程、遅延時間の一定な角周波数が、高い方へ伸びています。一方、次数が増加する程、回路規模が大きくなります。適切な次数を選択する必要があります。

次の様なカットアンドトライで設計が行われます。

ユーザーの仕様では、遅延時間と、何点かの角周波数での遅延時間、減衰の限界値が指示されるはずです。

遅延時間の指示により、正規化された遅延 1 秒を仕様の値に持って行くための $\frac{1}{k}$ が分ります。ユーザーから指示された生（なま）の角周波数を $\frac{1}{k}$ にすれば、正規化角周波数での角周波数になります。

正規化角周波数に於ける減衰と遅延が、仕様で指示された値に入っているかの検討が行われます。入っていない場合は次数を上げて検討します。

正規化角周波数での設計に成功すれば、伝達関数を k の周波数スケーリングで実周波数に持って行きます。更に数値スケーリングで実用的な素子値にまとめます。

問題：100[μs]の遅延を持つ遅延フィルターを設計する。角周波数 25,000[rad/sec]での遅延の誤差が最大でも 10[μs]、角周波数 10,000[rad/sec]での減衰が 1[dB]以下であること。

答：遅延時間 1 秒のベッセルフィルターを、仕様の値に持って行くための $\frac{1}{k}$ 値を求めますと、

$$\frac{1}{k} = 100 \times 10^{-6} = 0.0001$$

です。角周波数 25,000[rad/sec]を正規化しますと、

25000×0.0001＝2.5

です。次数を 3 と仮定して、正規化角周波数 2.5 での遅延を求めます。1 次の部分の遅延時間は、

$$\frac{-a}{a^2+\omega^2}=\frac{-(-2.3221854)}{(-2.3221854)^2+2.5^2}$$

$$\fallingdotseq 0.19946$$

となります。2 次の部分の遅延時間は、

$$\frac{-2a(a^2+b^2+\omega^2)}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}=\frac{-2\bullet-1.8389073(1.8389073^2+1.754381^2+2.5^2)}{(1.8389073^2+1.754381^2-2.5^2)^2+4\bullet1.8389073^2\bullet2.5^2}$$

$$\fallingdotseq 0.55263$$

となります。正規化角周波数 2.5 での遅延時間を合計しますと、

0.19946＋0.55263＝0.75209

になります。この遅延時間を $\frac{1}{k}$ 倍し、実遅延時間にしますと、

0.75209×0.0001＝0.000075209

になり約 75.2[μs]です。100[μs]からのずれは約 24.8[μs] となり、仕様を満足しません。

したがって次数 4 を選びます。正規化角周波数 2.5 での遅延時間を求めますと、1 段目部分で、

$$\frac{-2a(a^2+b^2+\omega^2)}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}=\frac{-2\bullet-2.8962106(2.8962106^2+0.8672341^2+2.5^2)}{(2.8962106^2+0.8672341^2-2.5^2)^2+4\bullet2.8962106^2\bullet2.5^2}$$

$$\fallingdotseq 0.40883$$

となります。2 段目部分で、

$$\frac{-2a(a^2+b^2+\omega^2)}{(a^2+b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}=\frac{-2\bullet-2.1037894(2.1037894^2+2.657418^2+2.5^2)}{(2.1037894^2+2.657418^2-2.5^2)^2+4\bullet2.1037894^2\bullet2.5^2}$$

$$\fallingdotseq 0.54050$$

となります。遅延時間を合計しますと、

0.40883＋0.54050＝0.94933

になります。この遅延時間を $\frac{1}{k}$ 倍し実遅延時間にしますと、

$0.94933 \times 0.0001 = 0.000094933$

になり約 94.93[μs]です。100[μs]からのずれは約 5.07[μs] となり、仕様を満足しています

　次に次数 4 で角周波数 10,000[rad/sec]での減衰を求めます。角周波数 10,000[rad/sec]を正規化しますと、

$10000 \times 0.0001 = 1$

です。正規化角周波数 1[rad/sec]での減衰を求めます。次数 4 の正規化伝達関数を 2 次 2 段に分解します。複素共役根ーa±jb を持つ 2 次低域通過回路の伝達関数 G(s)は、

$$G(s) = \frac{a^2+b^2}{(s+a+jb)(s+a-jb)} = \frac{a^2+b^2}{s^2+2as+a^2+b^2}$$

です。分子のa^2+b^2は s＝jω＝0 の時、利得を 1 にするために必要でした。正規化角周波数 1[rad/sec]での dB 減衰を求める為、伝達関数の s に＋j1 と、

$$\left[\frac{a^2+b^2}{s^2+2as+a^2+b^2}\right]_{s=j1} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1+j2a}$$

ーj1 を代入し、

$$\left[\frac{a^2+b^2}{s^2+2as+a^2+b^2}\right]_{s=-j1} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1-j2a}$$

掛け算し、

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1+j2a} \bullet \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1-j2a} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2-1)^2+(2a)^2}$$

平方根を求め、Log_{10}に直し、20 を掛けますと、

$$20 \times \mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2-1)^2+(2a)^2}}$$

になります。この式に 1 段目の複素共役根、ー2.8962106±j0.8672341 を代入し、減衰は、

$$20 \times \mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{(2.8962106^2+0.8672341^2)^2}{(2.8962106^2+0.8672341^2-1)^2+(2\times 2.8962106)^2}}$$

$$\fallingdotseq -0.77286$$

です。2 段目の複素共役根、−2.1037894±j2.657418 を代入し、減衰は、

$$20 \times \mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{(2.1037894^2 + 2.657418^2)^2}{(2.1037894^2 + 2.657418^2 - 1)^2 + (2 \times 2.1037894)^2}}$$

$$\fallingdotseq 0.14291$$

です。1 段目の減衰と 2 段目の減衰を合計しますと、

−0.77286＋0.14291＝−0.62995[dB]

になります。仕様にある実角周波数 10,000[rad/sec]での減衰が 1[dB]以下であると言う条件も満足します。

これで次数 n=4 の正規化ベッセルフィルターをスケーリングすれば良いことが分りました。正規化された伝達関数は、1 段目が、

$$G(s) = \frac{2.8962106^2 + 0.8672341^2}{s^2 + 2 \times 2.8962106\,s + 2.8962106^2 + 0.8672341^2}$$

です。2 段目は、

$$G(s) = \frac{2.1037894^2 + 2.657418^2}{s^2 + 2 \times 2.1037894\,s + 2.1037894^2 + 2.657418^2}$$

です。$\frac{1}{k}$ が 0.0001 ですから、周波数スケーリングの倍率 k は 10000 です。周波数スケーリング後、数値スケーリングを行い、実用的な素子値にまとめます。

「スケーリング」の章「スケーリングと伝達関数」の章をご参照下さい。

目次に戻る