3 次ベッセル LC フィルターの設計　　　　２０２０年１１月１５日　　　　目次へ戻る

2021.1.4　2021.4.22　　訂正

「はしご型 LC フィルターの設計」の章、3、R－R 型フィルターの設計の項を参照して下さい。

問：R－R 型の R_1＝1[Ω]、R_2＝1[Ω]、$\frac{R_1}{R_2}=1$ で、3 次ベッセル LC フィルターを設計して下さい。ただし 1[rad/sec]での利得を－3.01[dB]とします。

答：3 次ベッセルフィルターの伝達関数は、

$$\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}$$

ですが、この伝達関数の利得は 1[rad/sec]の時－3.01[dB]ではありません。新しい伝達関数を作る必要があります。

元の伝達関数の利得が、－3.01[dB]になる角周波数を求めます。

伝達関数を周波数伝達関数の絶対値に直します。

元の伝達関数に jω を代入します。

$$\left[\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}\right]_{s=j\omega}=\frac{15}{(j\omega)^3+6(j\omega)^2+15(j\omega)+15}$$
$$=\frac{15}{-j\omega^3-6\omega^2+j15\omega+15}$$
$$=\frac{15}{(-6\omega^2+15)+j(-\omega^3+15\omega)}$$

元の伝達関数に－jω を代入します。

$$\left[\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}\right]_{s=-j\omega}=\frac{15}{(-j\omega)^3+6(-j\omega)^2+15(-j\omega)+15}$$
$$=\frac{15}{j\omega^3-6\omega^2-j15\omega+15}$$
$$=\frac{15}{(-6\omega^2+15)-j(-\omega^3+15\omega)}$$

jω 代入式と－jω 代入式とを掛け合わせ平方根にすることにより、周波数伝達関数の絶対

値になります。

$$\sqrt{\frac{15}{(-6\omega^2+15)+j(-\omega^3+15\omega)}\bullet\frac{15}{(-6\omega^2+15)-j(-\omega^3+15\omega)}}$$

$$=\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}$$

この周波数伝達関数絶対値のデシベル値が、−3.01[dB]になる場合、

$$20\mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}=-3.01$$

と言う式になります。計算を続けますと、

$$\mathrm{Log}_{10}\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}=\frac{-3.01}{20}$$

$$\sqrt{\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}}=10^{\frac{-3.01}{20}}$$

です。両辺を２乗して、

$$\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}=\left(10^{\frac{-3.01}{20}}\right)^2$$

$$\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}=10^{\frac{-3.01}{20}\times 2}$$

$$\frac{15^2}{(-6\omega^2+15)^2+(-\omega^3+15\omega)^2}=10^{\frac{-3.01}{10}}$$

$$\frac{225}{\omega^6+6\omega^4+45\omega^2+225}=\frac{1}{10^{\frac{3.01}{10}}}$$

$$\omega^6+6\omega^4+45\omega^2+225=225\bullet 10^{\frac{3.01}{10}}$$

$$\omega^6+6\omega^4+45\omega^2-224.9689207=0$$

と言う方程式が出来ました。ベアストウ・ヒッチコック法による数値計算で因数分解しますと、（ベアストウ・ヒッチコック法については「ベアストウ・ヒッチコック法について」の章をご参照下さい。）

$$(\omega^2-3.082104174)(\omega^2+2.829304849\omega+8.543535052)$$
$$(\omega^2-2.829304849\omega+8.543535052)=0$$

になります。さらに根（解）の公式で各2次式を因数分解しますと、

$$(\omega+1.755592257)(\omega-1.755592257)$$
$$(\omega+1.4146524245+j2.5577907595924)(\omega+1.4146524245-j2.5577907595924)$$
$$(\omega-1.4146524245+j2.5577907595924)(\omega-1.4146524245-j2.5577907595924)$$
$$=0$$

になります。6個ある括弧内を0にする根（解）の中で、正の実数は1.755592257だけです。ω＝1.755592257[rad/sec] が、元の伝達関数の利得をー3.01[dB]にする角周波数です。

元の伝達関数のsを1.755592257sにすることにより、1[rad/sec]入力時に1.755592257 [rad/sec]が入力されたことになり、1[rad/sec]での利得がー3.01[dB]になります。

新しい伝達関数は、

$$\frac{15}{(1.755592257s)^3+6(1.755592257s)^2+15(1.755592257s)+15}$$
$$=\frac{15}{5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15}$$

となります。R_1ーR_2回路の$\frac{R_1}{R_2}=1$では、角周波数0において必然的に$\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{2}$の減衰が起こります。$R_1$、$R_2$を含めた伝達関数は、この値を掛け、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{15}{5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15}$$

です。R_1、R_2を含めた伝達関数の逆数は、

$$\frac{2(5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15)}{15}$$

$$=0.721455762s^3+2.465683339s^2+3.511184515s+2$$

となります。R_1、R_2を含めた伝達関数の逆数のsに$j\omega$を代入しますと。

$$[0.721455762s^3 + 2.465683339s^2 + 3.511184515s + 2]_{s=j\omega}$$

$$= 0.721455762\,(j\omega)^3 + 2.465683339\,(j\omega)^2 + 3.511184515\,(j\omega) + 2$$

$$= -j0.721455762\,\omega^3 - 2.465683339\,\omega^2 + j3.511184515\,\omega + 2$$

$$= -2.465683339\ \omega^2 + 2 + j(-0.721455762\ \omega^3 + 3.511184515\ \omega)$$

になり $g(\omega) = -2.465683339\ \omega^2 + 2$ と $u(\omega) = -0.721455762\ \omega^3 + 3.511184515\ \omega$ が求まりました。$g(\omega)$と $u(\omega)$については「はしご型 LC フィルターの設計」の章、3、R－R 型フィルターの設計の項をご参照下さい。R_1、R_2 を含めた伝達関数の逆数の s に－$j\omega$ を代入しますと、

$$[0.721455762s^3 + 2.465683339s^2 + 3.511184515s + 2]_{s=-j\omega}$$

$$= 0.721455762\,(-j\omega)^3 + 2.465683339\,(-j\omega)^2 + 3.511184515\,(-j\omega) + 2$$

$$= j0.721455762\,\omega^3 - 2.465683339\,\omega^2 - j3.511184515\,\omega + 2$$

$$= -2.465683339\ \omega^2 + 2 - j(-0.721455762\ \omega^3 + 3.511184515\ \omega)$$

になります。$j\omega$ 代入式と－$j\omega$ 代入式を掛け合わせることにより、R_1、R_2 を含めた周波数伝達関数の逆数の絶対値の 2 乗を求めますと、

$$\{-2.465683339\ \omega^2 + 2 + j(-0.721455762\ \omega^3 + 3.511184515\ \omega)\} \times$$

$$\{-2.465683339\ \omega^2 + 2 - j(-0.721455762\ \omega^3 + 3.511184515\ \omega)\}$$

$$= (-2.465683339\ \omega^2 + 2)^2 + (-0.721455762\ \omega^3 + 3.511184515\ \omega)^2$$

$$= 6.079594328\,\omega^4 - 9.862733356\,\omega^2 + 4 + 0.520498416\,\omega^6 - 5.0663286\,\omega^4 + 12.3284167\,\omega^2$$

$$= 0.520498416\ \omega^6 + 1.013265728\ \omega^4 + 2.465683344\ \omega^2 + 4$$

になります。$P^2(\omega)+Q^2(\omega)$は、ここから$\frac{4R_1}{R_2}=4$を引いたものですから、

$$P^2(\omega)+Q^2(\omega)=0.520498416\ \omega^6+1.013265728\ \omega^4+2.465683344\ \omega^2$$

となります。$P^2(\omega)+Q^2(\omega)$のことも「はしご型 LC フィルターの設計」の章、3、R−R 型フィルターの設計の項をご参照下さい。

上式の右辺を変形し、偶関数の 2 乗である $P^2(\omega)$と、奇関数の 2 乗である $Q^2(\omega)$との和の形にしなくてはいけません。

$P^2(\omega)$の形にするには、ω の 4 乗の項の係数を a とした場合、$a\omega^4=(\sqrt{a}\omega^2)^2$にします。

$Q^2(\omega)$の形にするには、ω の 6 乗の項の係数を b、ω の 2 乗の項の係数を c とした場合、ω の 4 乗の項も必要になり、$b\omega^6\pm2\sqrt{b}\sqrt{c}\omega^4+c\omega^2=(\sqrt{b}\omega^3\pm\sqrt{c}\omega)^2$になります。

$Q^2(\omega)$になる$0.520498416\ \omega^6+2.465683344\ \omega^2$には、＋または−の ω の 4 乗項、$2\cdot\sqrt{0.520498416}\cdot\sqrt{2.465683344}\cdot\omega^4=2.265731028\ \omega^4$を付け加える必要があります。現状の$1.013265728\omega^4$を $P^2(\omega)$の分と、$Q^2(\omega)$に必要な分に分けなくてはなりません。

$Q^2(\omega)$に必要な$2.265731028\omega^4$を＋の数にしますと、$P^2(\omega)$の分が、$1.013265728\omega^4-2.265731028\omega^4=-1.2524653\omega^4$となり、−の数になります。$P^2(\omega)$は$(\sqrt{-1.2524653}\omega^2)^2$になり、虚数の係数は実現できず NG です。$2.265731028\omega^4$は−です。$1.013265728\omega^4-(-2.265731028\omega^4)=3.278996756\omega^4$になりますので、$1.013265728\omega^4$を、$P^2(\omega)$用の$3.278996756\omega^4$と、$Q^2(\omega)$用の$-2.265731028\omega^4$に分けます。$P^2(\omega)$ ＋$Q^2(\omega)$の式は、

$$\begin{aligned}P^2(\omega)+Q^2(\omega)&=0.520498416\ \omega^6+1.013265728\ \omega^4+2.465683344\ \omega^2\\&=3.278996756\ \omega^4+0.520498416\ \omega^6-2.265731028\ \omega^4+2.465683344\ \omega^2\\&=(\sqrt{3.278996756}\ \omega^2)^2+(\sqrt{0.520498416}\ \omega^3-\sqrt{2.465683344}\ \omega)^2\\&=(1.810800032\ \omega^2)^2+(0.721455761\ \omega^3-1.570249453\ \omega)^2\end{aligned}$$

になります。$P^2(\omega)+Q^2(\omega)$を分析しますと、

(1) 偶関数の 2 乗は、$P^2=(1.810800032\,\omega^2)^2$となります。

(2) 奇関数の 2 乗は、$Q^2 = (0.721455761\,\omega^3 - 1.570249453\,\omega)^2$ となります。

(3) 2 乗をはずして $P = \pm 1.810800032\,\omega^2$ 、

$$Q = \pm(0.721455761\,\omega^3 - 1.570249453\,\omega)$$ が求まります。

①、

$P = +1.810800032\,\omega^2$ 、$Q = 0.721455761\omega^3 - 1.570249453\omega$ を採用します。

R_1＝R_2＝1Ω で、$g(\omega) = -2.465683339\,\omega^2 + 2$ と

$u(\omega) = -0.721455762\,\omega^3 + 3.511184515\,\omega$ ですから、R_1、R_2 を含まない、交流理論での

リアクタンスだけの四端子定数 $a(\omega)$、$jb(\omega)$、$jc(\omega)$、$d(\omega)$は、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega)-P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega)-Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega)+Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega)+P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-2.465683339\omega^2+2-1.810800032\omega^2}{2} & j\dfrac{-0.721455762\omega^3+3.511184515\omega-0.721455761\omega^3+1.570249453\omega}{2} \\ j\dfrac{-0.721455762\omega^3+3.511184515\omega+0.721455761\omega^3-1.570249453\omega}{2} & \dfrac{-2.465683339\omega^2+2+1.810800032\omega^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4.276483371\,\omega^2+2}{2} & j\dfrac{-1.442911523\,\omega^3+5.081433968\,\omega}{2} \\ j\dfrac{1.940935062\,\omega}{2} & \dfrac{-0.654883307\,\omega^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.138241686\,\omega^2+1 & j(-0.721455761\omega^3+2.540716984\,\omega) \\ j0.970467531\,\omega & -0.327441653\,\omega^2+1 \end{bmatrix}$$

となります。$\omega = \dfrac{s}{j} = -js$ で $a(\omega)$、$jb(\omega)$、$jc(\omega)$、$d(\omega)$をラプラスの世界での四端子定数、A、

B、C、D に移しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.138241686\omega^2+1 & j(-0.721455761\omega^3+2.540716984\omega) \\ j0.970467531\omega & -0.327441653\omega^2+1 \end{bmatrix}_{\omega=-js}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.138241686(-js)^2+1 & j\{-0.721455761(-js)^3+2.540716984(-js)\} \\ j0.970467531(-js) & -0.327441653(-js)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 2.138241686s^2+1 & 0.721455761s^3+2.540716984s \\ 0.970467531s & 0.327441653s^2+1 \end{bmatrix}
$$

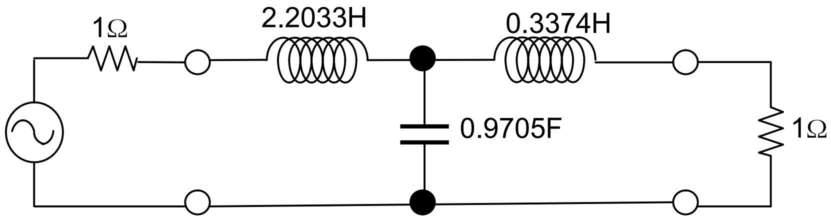
になります。R_1、R_2を含まない、リアクタンス回路のラプラスの世界での四端子定数です。
　R_1の右から右を見る、四端子回路の入力インピーダンスを求める式、

$$
Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{(AR_2+B)I_2}{(CR_2+D)I_2}=\frac{AR_2+B}{CR_2+D}
$$

に代入し、さらに入力インピーダンスを連分数に直しますと、

$$
\begin{aligned}
Z_{in}&=\frac{2.138241686s^2+1+0.721455761s^3+2.540716984s}{0.970467531s+0.327441653s^2+1}\\
&=\frac{0.721455761s^3+2.138241686s^2+2.540716984s+1}{0.327441653s^2+0.970467531s+1}\\
&=2.203310893\,s+\frac{0.337406091\,s+1}{0.327441653\,s^2+0.970467531\,s+1}\\
&=2.203310893\,s+\cfrac{1}{\cfrac{0.327441653\,s^2+0.970467531\,s+1}{0.337406091\,s+1}}\\
&=2.203310893\,s+\cfrac{1}{0.970467521\,s+\cfrac{1}{0.337406091\,s+1}}\\
&=2.203310893\,s+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.970467521\,s}}+\cfrac{1}{0.337406091\,s+1}}
\end{aligned}
$$

になります。$2.203310893s$のリアクタンスがあり、その後ろに$\dfrac{1}{0.970467521s}$のリアクタンスと$0.337406091s+1$のインピーダンスが並列接続されている事が分ります。
　つまり 2.2033[H]のコイルの後に、0.9705[F]のコンデンサと並列に、0.3374[H]のコイルと 1[Ω]の抵抗 R_2の直列回路が入ったものになります。
　R_1も含めた総合的な回路図は、



となります。素子の順番が逆と思われるかもしれませんが、受動回路ですので相反の定理（可逆の定理とも呼ばれる）が成り立ち、入力を出力とし、出力を入力としても同じ特性です。

②、

$$P=-1.810800032\ \omega^2$$

$$Q=-(0.721455761\omega^3-1.570249453\omega)=-0.721455761\omega^3+1.570249453\omega$$

を採用し、$R_1=R_2=1\Omega$

$g(\omega)=-2.465683339\ \omega^2+2$ と $u(\omega)=-0.721455762\ \omega^3+3.511184515\ \omega$ の時は、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega)-P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega)-Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega)+Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega)+P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-2.465683339\omega^2+2+1.810800032\omega^2}{2} & j\dfrac{-0.721455762\omega^3+3.511184515\omega+0.721455761\omega^3-1.570249453\omega}{2} \\ j\dfrac{-0.721455762\omega^3+3.511184515\omega-0.721455761\omega^3+1.570249453\omega}{2} & \dfrac{-2.465683339\omega^2+2-1.810800032\omega^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-0.654883307\ \omega^2+2}{2} & j\dfrac{1.940935062\ \omega}{2} \\ j\dfrac{-1.442911523\ \omega^3+5.081433968\ \omega}{2} & \dfrac{-4.276483371\ \omega^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -0.327441653\omega^2+1 & j0.970467531\omega \\ j(-0.721455761\omega^3+2.540716984\omega) & -2.138241686\omega^2+1 \end{bmatrix}$$

となります。$\omega=\dfrac{s}{j}=-js$ で a(ω)、jb(ω)、jc(ω)、d(ω)を、ラプラスの世界のリアクタンス A、B、C、D に移しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.327441653\ \omega^2+1 & j0.970467531\ \omega \\ j(-0.72145576\ 1\omega^3+2.540716984\ \omega) & -2.138241686\ \omega^2+1 \end{bmatrix}_{\omega=-js}$$

$$=\begin{bmatrix} -0.327441653(-js)^2+1 & j0.970467531(-js) \\ j\{-0.721455761(-js)^3+2.540716984(-js)\} & -2.138241686(-js)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.327441653s^2+1 & 0.970467531s \\ 0.721455761s^3+2.540716984s & 2.138241686s^2+1 \end{bmatrix}$$

になります。R_1、R_2 を含まない、リアクタンス回路のラプラスの世界での四端子定数です。

R_1 の右から右を見る、四端子定数から入力インピーダンスを求める式、

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{(AR_2+B)I_2}{(CR_2+D)I_2}=\frac{AR_2+B}{CR_2+D}$$

に代入し、さらに入力インピーダンスを連分数に直しますと、

$$Z_{in}=\frac{0.327441653\ s^2+1+0.970467531\ s}{0.72145576\ 1s^3+2.540716984\ s+2.138241686\ s^2+1}$$

$$=\frac{0.327441653\ s^2+0.970467531\ s+1}{0.72145576\ 1s^3+2.138241686\ s^2+2.540716984\ s+1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{0.72145576\ 1s^3+2.138241686\ s^2+2.540716984\ s+1}{0.327441653\ s^2+0.970467531\ s+1}}$$

$$=\frac{1}{2.203310893\ s+\dfrac{0.337406091\ s+1}{0.327441653\ s^2+0.970467531\ s+1}}$$

$$=\frac{1}{2.203310893\ s+\dfrac{1}{\dfrac{0.327441653\ s^2+0.970467531\ s+1}{0.337406091\ s+1}}}$$

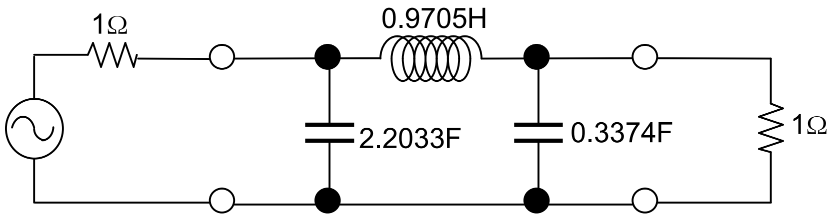
$$= \cfrac{1}{2.203310893\ s + \cfrac{1}{0.970467521\ s + \cfrac{1}{0.337406091\ s + 1}}}$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{2.203310893\ s}} + \cfrac{1}{0.970467521\ s + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.337406091\ s}} + \cfrac{1}{1}}}}$$

になります。連分数を後ろから見て行きます。

$\dfrac{1}{0.337406091s}$ のリアクタンスと 1[Ω]が並列になり、その並列に0.970467521s のリアクタンスが直列につながっています。それらが、$\dfrac{1}{2.203310893s}$ のリアクタンスと並列になっています。

　つまり入力から見ますと、2.2033[F]のコンデンサが並列に入り、0.9705[H]コイルが直列に入った後に、0.3374[F]コンデンサと 1[Ω]が並列に入ったものになります。R_1 も含めた総合的な回路図は、



となります。素子の順番が逆と思われるかもしれませんが、受動回路ですので相反の定理（可逆の定理とも呼ばれる）が成り立ち、入力を出力とし、出力を入力としても同じ特性です。

目次へ戻る