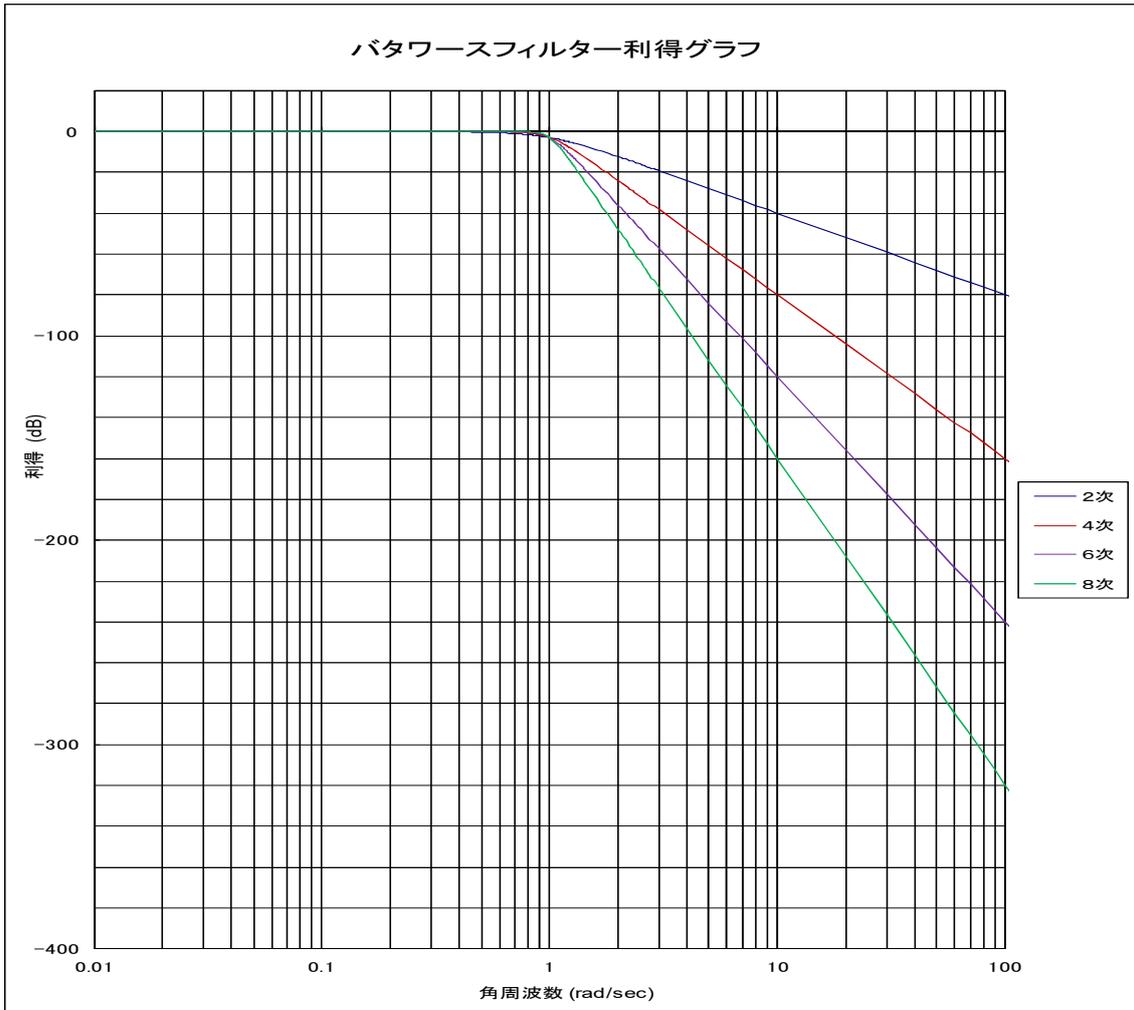


## 1、バターズフィルタと方形波

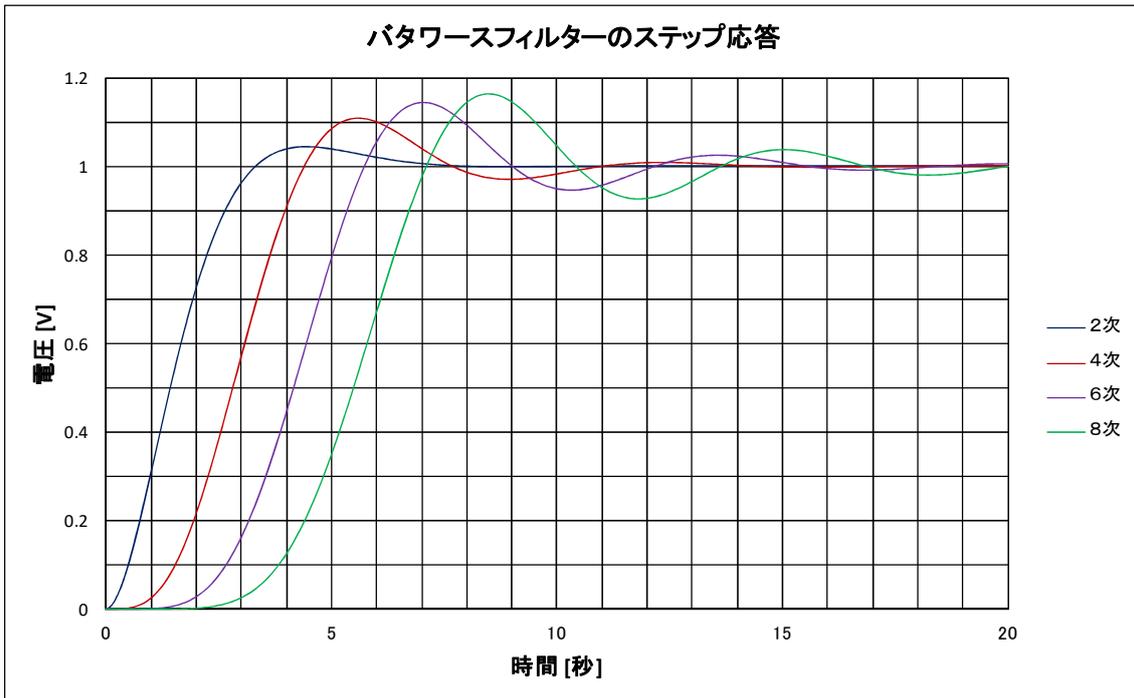
バターズフィルタの正規化角周波数での利得グラフを提示します。正規化については、スケーリングの章をご参照下さい。



バターズフィルタは、通過域にも阻止域にもうねりが無いので、通過域平坦阻止域無極のフィルタです。利得が-3dBになる角周波数を、遮断角周波数と呼びます。正規化されたバターズフィルタでは、遮断角周波数が1[rad/sec]になります。

通過域は平らで、遮断角周波数を過ぎ阻止域に入ってから減衰もまっすぐです。ステップ波を入力に加えてみます。なめらかな性質ですので、出力される波形は肩の部分に多少丸みが出る程度と予想したところ、結果は次のステップ応答のグラフになりました。

バターズフィルタの伝達関数に、ステップ波のラプラス変換 $\frac{1}{s}$ を掛け、ラプラス逆変換を行いました。

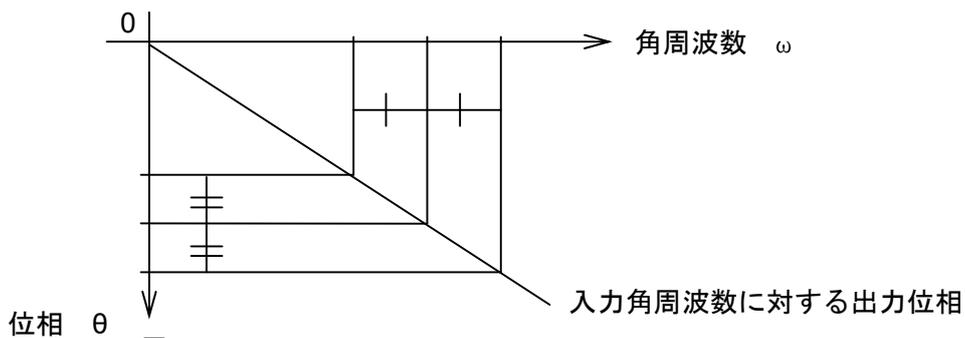


オーバーシュートの後にリングングがあります。フィルターの次数が大きくなるにしたがって激しくなっています。バターズフィルターは、ステップ応答が良くないです。

フィルターを通ることで位相の遅れが生じます。位相の遅れに、角周波数に対する非直線性がある為に、波形にオーバーシュートやリングングを生じます。例えば、方形波をフーリエ級数展開しますと、次式の様 basic wave and its high-order harmonics are decomposed.

$$\frac{4E}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$$

方形波を構成する全部の sin 波が、同じ時間遅れで出て来れば、波形は崩れません。同じ時間遅れで出て来るとはどういうことですか。フィルター通過後、基本波が 0.4 波長遅れた場合、3 倍高調波は 0.4×3 の 1.2 波長遅れでなければなりません。5 倍高調波は 0.4×5 の 2.0 波長遅れでなければなりません。このことを位相の遅れで言い換えますと、基本波が 144 度遅れたら、3 倍高調波は 432 度、5 倍高調波は 720 度遅れなければなりません。入力する角周波数と、出力の位相遅れは比例する必要があります。下図の様に傾きが一定と言う事です。

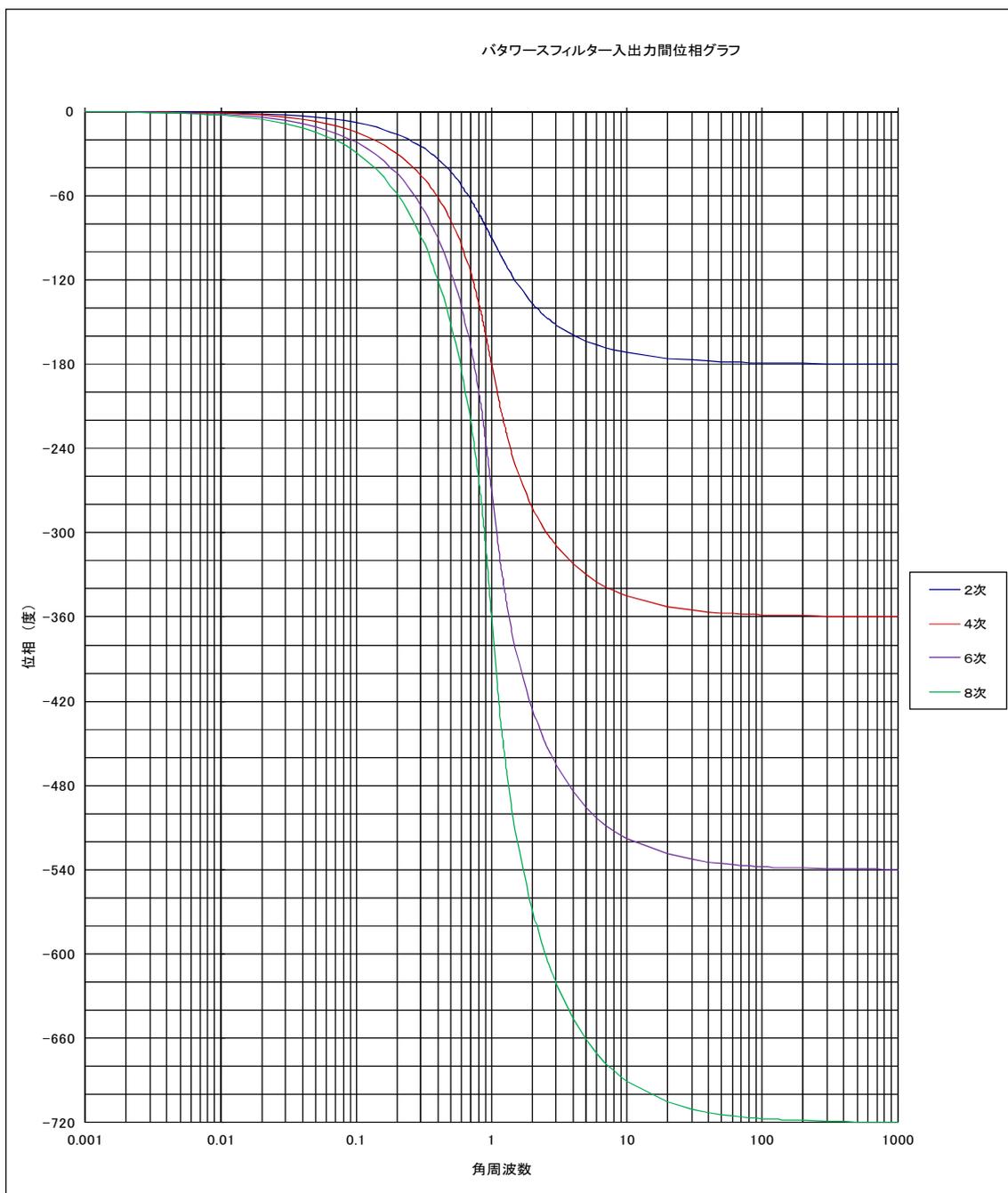


入力の角周波数に対する出力位相のグラフを描いた時、角周波数と位相が比例する関係が必要です。入力の角周波数と出力の位相遅れが、上図の様に直線の関係になっていれば、どの角周波数においても入ってから出るまでの時間が同じです。

ただし縦横方眼目盛りの場合です。角周波数軸を広範囲にする為、横軸を対数目盛にしたグラフでは比例関係は良く分かりません。

## 2、バターズフィルターの位相遅れ

下のグラフが、角周波数軸を対数にした、バターズフィルターの位相遅れグラフです。



求め方は、バターースフィルターの伝達関数の  $s$  に  $j\omega$  ( $\omega$  は角周波数) を代入した後、分母の共役 (きょうやく) 複素数を分子分母に掛け、実数部と虚数部に分けます。アークタンジェント  $\frac{\text{虚数部}}{\text{実数部}}$  で位相遅れの角度を求めます。計算は弧度法の rad で行い、結果を度数法の度に直しました。高次フィルターでは伝達関数の因数分解を行い、2 次フィルターのブロックに分けます。2 次のブロックごとに位相遅れの計算を行い、最後に全ブロックの位相遅れを足し算します。

普通のアークタンジェントは  $-90$  度 ( $-\frac{\pi}{2}$  rad) から  $90$  度 ( $\frac{\pi}{2}$  rad) にしか対応しません。2 次フィルターの出力位相は最大  $180$  度遅れます。このグラフの計算では、 $-180$  度 ( $-\pi$  rad) から  $180$  度 ( $\pi$  rad) に対応している、エクセルの ATAN2 関数を使いました。この章の 4、の前半 (5 ページ) をご覧下さい。

### 3、バターースフィルターの位相微分

2、のグラフでは入力の角周波数と、位相遅れの比例関係が良く分かりません。そこで、  
 ①、各々の角周波数で、フィルター通過による位相遅れの傾きを微分計算で求める。  
 ②、角周波数軸を広範囲にする為、角周波数軸を対数にし、各々の傾きをしるす。  
 グラフが考えられました。こうすれば傾きが一定の場合は横にまっすぐな水平線となり、傾きが変化した場合は上昇下降が出ます。微分はその地点での傾きを求めることです。位相を角周波数で微分します。  $\omega = 2\pi f$ 、  $f = \frac{1}{t}$  ( $t$  は周期、単位は秒) ですから、

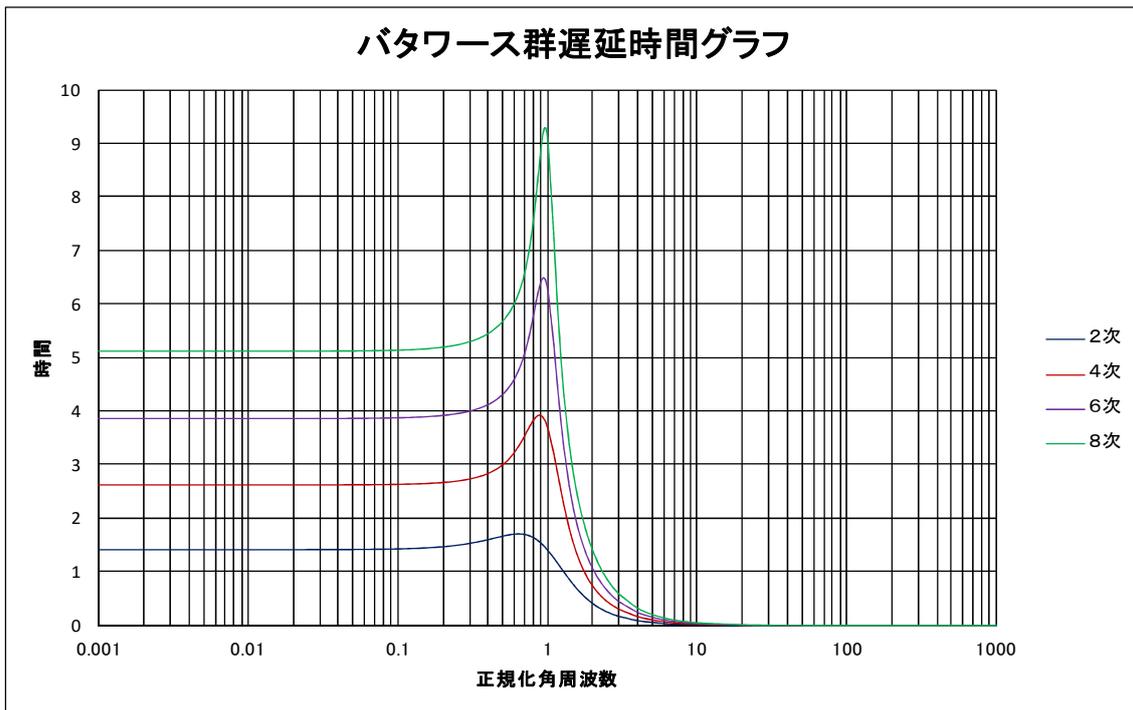
$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{\text{rad}}{\text{rad / sec}} = \text{rad} \times \frac{\text{sec}}{\text{rad}} = \text{sec}$$

になり、答えは時間 (秒) です。この時間を群遅延時間と呼んでいます。群遅延時間  $\tau$  (タウ) の正式な定義は、

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega}$$

です。頭にマイナスが付いていますから、フィルター通過による位相  $\theta$  がマイナス、つまり遅れ位相の時、群遅延時間  $\tau$  はプラスで出ます。

下のグラフがバターースフィルターの群遅延時間と角周波数の関係です。高次フィルターでは 2 次フィルターのブロックごとに群遅延時間を求め、最後に全ブロックの群遅延時間を合計しました。この章の 4、の後半 (6 ページ) をご覧下さい。



上のグラフを見て頂ければ分りますが、バターワースでは高次フィルターになればなる程、角周波数が増大した時の位相遅れの傾き具合、つまり群遅延時間が初めの値から大きく、ずれ、ピークを持っています。したがって角周波数と位相遅れとが比例せず、方形波を構成する各 sin 波の、出力への到達時間がばらばらになり、出力波形の乱れが生じます。方形波だけに限らず、高調波を含む波形の場合、群遅延時間が角周波数によって変化する為、波形を構成する基本波と各高調波での位相遅れが異なり、波形が乱れます。途中のピークが原因ですので、2次バターワースフィルターについて、途中のピークを消す方法を順次考えて行きます。

#### 4、出力位相と群遅延時間

2次フィルターの伝達関数で位相遅れの傾き、群遅延時間を求める微分計算を紹介します。

##### (1)位相の計算

伝達関数は、複素平面左半面の共役（きょうやく）根  $-a+jb$  と  $-a-jb$  を用いて、

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{a^2 + b^2}{\{s - (-a + jb)\}\{s - (-a - jb)\}} \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{(s + a - jb)(s + a + jb)} \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{s^2 + as + jbs + as + a^2 + jab - jbs - jab + b^2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{s^2 + 2as + a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

となります。複素平面の左半面の根を使う理由は、「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご覧ください。伝達関数分子の定数項  $a^2 + b^2$  は、角周波数  $\omega = 0$  (直流) の  $s = j\omega = 0$  または  $s = -j\omega = 0$  で  $G(s)$  の利得を 1 (筒抜け) にするために必要です。分母の  $a^2 + b^2$  と分子の  $a^2 + b^2$  が約分され、 $G(s) = 1$  になります。この伝達関数の  $s$  に  $j\omega$  を代入し、周波数伝達関数  $G(j\omega)$  にします。なぜ  $s$  に  $j\omega$  を代入するのかは、「 $s = j\omega$  とは何か」の章をご覧ください。

$$G(j\omega) = \left[ \frac{a^2 + b^2}{s^2 + 2as + a^2 + b^2} \right]_{s=j\omega} = \frac{a^2 + b^2}{(j\omega)^2 + 2aj\omega + a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - \omega^2 + j2a\omega}$$

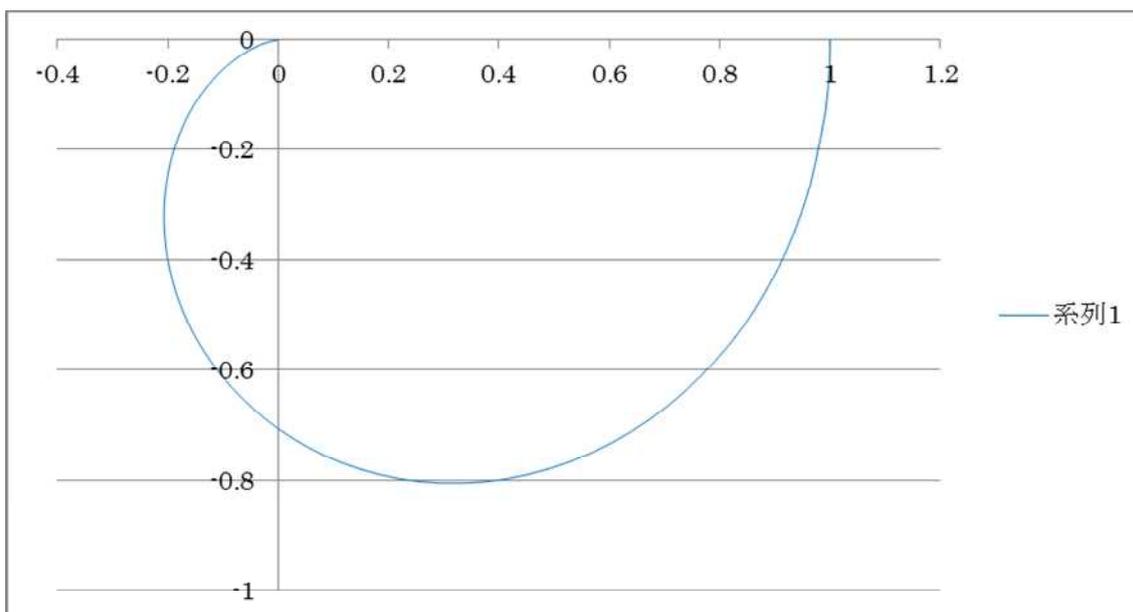
になります。分母の共役複素数を分子と分母に掛け、実数部と虚数部に分けると、

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - \omega^2 + j2a\omega} \cdot \frac{a^2 + b^2 - \omega^2 - j2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2 - j2a\omega}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2} - j \frac{(a^2 + b^2)2a\omega}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}$$

になります。

下は、ナイキスト線図やベクトル軌跡と呼ばれているグラフです。  $G(s)$  として 2 次バタワースフィルターの伝達関数を使用しました。  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  です。  $j\omega$  を  $j0$  から  $j\infty$  まで変化させ、  $s$  に代入して行きます。最大値 1 の正弦波の角周波数を 0 から  $\infty$  まで変化させ回路に入力することと同じです。  $G(j\omega)$  を計算し、答え (出力) の複素数を複素平面上に点打ちして行った時の軌跡です。横軸は  $G(j\omega)$  の実数部の値、縦軸は  $G(j\omega)$  の虚数部の値を表します。スタート位置は  $G(j0)$  で虚数部無しの実軸上の 1 です。最後は  $G(j\infty)$  で 0 です。



本章 1 ページの 2 次バターズフィルター、正規化角周波数での利得グラフをご覧ください。利得は 0[dB]=1 から出発し、1[rad/sec]の遮断角周波数での利得が-3[dB]=0.7071 になっています。1 ページのグラフではフィルター出力の振幅のみに注目しています。

ナイキスト線図では出力の複素数  $G(j0)$  から  $G(j\infty)$  までをつなげています。グラフ上の 1 点までの、原点からの距離が出力の絶対値、正の実軸からの偏角が出力の位相です。振幅の絶対値が 0.7071 になる時、その点は負の虚軸上にあります。ここが  $G(j1)$  です。位相は  $-90$  度 ( $-\frac{\pi}{2}$  rad) であることが分ります。その先では振幅がさらに減少し、位相もさらに遅れています。2 次バターズフィルター伝達関数の  $G(s)$  に、 $s=j0$  から  $s=j\infty$  までを代入し  $G(j\omega)$  を行いますと、最後に振幅は 0、位相は  $-180$  度 ( $-\pi$  rad) になります。

本題に戻りまして、 $G(j\omega)$  の実数部、虚数部から位相  $\theta$  を求めますと、

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1} \frac{\frac{(a^2 + b^2)2a\omega}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}}{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}} \\ &= \tan^{-1} \frac{(a^2 + b^2)2a\omega}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \omega^2)} \\ &= \tan^{-1} \frac{2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2} \\ &= -\tan^{-1} \frac{2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2} \quad (\tan \text{ は奇関数の為})\end{aligned}$$

になります。

$\tan^{-1}$  の主値は  $-90$  度 ( $-\frac{\pi}{2}$  rad) から  $90$  度 ( $\frac{\pi}{2}$  rad) までです。エクセルの ATAN 関数の範囲です。

2 次フィルターでは前ページのナイキスト線図の様に、 $0$  度 ( $0$  rad) から  $-180$  度 ( $-\pi$  rad) までの位相変化があります。  $\tan^{-1}$  で計算する場合注意が必要です。

2 次バターズフィルターにおいて  $-\tan^{-1}$  の変数の分母にある  $a^2 + b^2$  は、 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ですので 1 です。角周波数  $\omega^2$  が 1 に近づきますと変数の分母が小さくなりますが、変数全体は正の大きな値になり、 $\tan^{-1}$  は  $90$  度 ( $\frac{\pi}{2}$  rad) に近づきます。したがって  $-\tan^{-1}$  は  $-90$  度 ( $-\frac{\pi}{2}$  rad) に近づきます。  $\omega^2=1$  で変数の分母が 0 になってしまいます。ATAN

関数の答え無しになります。

$\omega^2$  が 1 を超えた時、変数全体は負の大きな値になります。 $\tan^{-1}$  は  $-90$  度 ( $-\frac{\pi}{2}$  rad) 弱

に飛びますので、 $-\tan^{-1}$  は  $+90$  度 ( $+\frac{\pi}{2}$  rad) 弱に飛びます。ナイキスト線図で分ります

様に、この時本当は  $-90$  度 ( $-\frac{\pi}{2}$  rad) の先、マイナス九十何度です。したがって  $-\tan^{-1}$  が

＋の値になった時、その値に  $-180$  度 ( $-\pi$  rad) を加えなければいけません。

その後変数全体は負で小さな値になって行き、 $\tan^{-1}$  は負の小さな値になって行き、 $-\tan^{-1}$  は正の小さな値になって行きます。

$-180$  度 ( $-\pi$  rad) を加えた  $-\tan^{-1}$  の最後は、 $-180$  度 ( $-\pi$  rad) です。エクセル等で ATAN 関数を使用する場合には、上記注意が必要です。 $\frac{\text{虚数部}}{\text{実数部}}$  を行わず実数部の値と虚数部の値を引数にし、正の実軸からの偏角を求める ATAN2 関数を使用すると安心です。

## (2) 群遅延時間の計算

この位相  $\theta = -\tan^{-1} \frac{2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2}$  を角周波数  $\omega$  で微分し、各々の角周波数での位相遅れの傾きである群遅延時間を求めます。

関数の変数が関数になっている合成関数の微分ですので、 $\theta = -\tan^{-1} u$ 、

$u = \frac{2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2}$  と置きますと群遅延時間  $\tau$  の定義 (4 ページ) から、

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{d\theta}{d\omega} = -\left(\frac{d\theta}{du} \cdot \frac{du}{d\omega}\right) = -\frac{d}{du}(-\tan^{-1} u) \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2}\right) \\ &= \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{2a(a^2 + b^2 - \omega^2) - 2a\omega(-2\omega)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{2a\omega}{a^2 + b^2 - \omega^2}\right)^2} \cdot \frac{2a(a^2 + b^2 - \omega^2) + 4a\omega^2}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{4a^2\omega^2}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2}} \cdot \frac{2a(a^2 + b^2) - 2a\omega^2 + 4a\omega^2}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2}} \cdot \frac{2a(a^2 + b^2) + 2a\omega^2}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \cdot \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2} \\
&= \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}
\end{aligned}$$

になりました。出力の位相を角周波数で微分し、群遅延時間を求める為の式です。微分して出来た式は、分母が0になることが無く上手く行きます。

バタワース群遅延時間グラフ（5 ページ）は、2 次のブロックごとに上式で群遅延時間を計算し、最後に合計したものです。

## 5、更に微分

この微分の式を更に角周波数で微分します。群遅延時間の極大または極小時（途中の凸凹の最大または最小時）の角周波数を求めたいのです。

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \right\}$$

を求めます。分数関数の微分です。分子の微分は、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\omega} \{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)\} \\
&= \frac{d}{d\omega} (2a^3 + 2ab^2 + 2a\omega^2) \\
&= 4a\omega^2
\end{aligned}$$

です。分母の第1項、

$$(a^2 + b^2 - \omega^2)^2$$

の微分は、

$$\begin{aligned}
y &= u^2 \\
u &= a^2 + b^2 - \omega^2
\end{aligned}$$

と置けば、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\omega} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{d\omega} = \frac{d}{du} (u^2) \frac{d}{d\omega} (a^2 + b^2 - \omega^2) \\
&= 2u(-2\omega) \\
&= 2(a^2 + b^2 - \omega^2)(-2\omega) \\
&= -4\omega(a^2 + b^2 - \omega^2)
\end{aligned}$$

です。合成関数の微分ですから最後に u を戻しています。分母全部の微分は、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\omega} \{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\} \\
&= -4\omega(a^2 + b^2 - \omega^2) + 8a^2\omega
\end{aligned}$$

です。分数全体の微分は、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\omega} \left( \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \right) \\ &= \frac{\left\{ \frac{d}{d\omega} 2a(a^2 + b^2 + \omega^2) \right\} \{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\} - \{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)\} \left[ \frac{d}{d\omega} \{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\} \right]}{\{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^2} \\ &= \frac{4a\omega \{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\} - \{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)\} \{-4\omega(a^2 + b^2 - \omega^2) + 8a^2\omega\}}{\{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^2} \end{aligned}$$

となります。

分子の第1項は、

$$\begin{aligned} & 4a\omega \{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\} \\ &= 4a\omega \{(a^2 + b^2 - \omega^2)(a^2 + b^2 - \omega^2) + 4a^2\omega^2\} \\ &= 4a\omega (a^4 + a^2b^2 - a^2\omega^2 + a^2b^2 + b^4 - b^2\omega^2 - a^2\omega^2 - b^2\omega^2 + \omega^4 + 4a^2\omega^2) \\ &= 4a\omega (a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2\omega^2 - 2b^2\omega^2 + \omega^4) \\ &= 4a^5\omega + 8a^3b^2\omega + 4ab^4\omega + 8a^3\omega^3 - 8ab^2\omega^3 + 4a\omega^5 \end{aligned}$$

となります。

分子の第2項は、

$$\begin{aligned} & \{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)\} \{-4\omega(a^2 + b^2 - \omega^2) + 8a^2\omega\} \\ &= (2a^3 + 2ab^2 + 2a\omega^2)(-4a^2\omega - 4b^2\omega + 4\omega^3 + 8a^2\omega) \\ &= (2a^3 + 2ab^2 + 2a\omega^2)(4a^2\omega - 4b^2\omega + 4\omega^3) \\ &= 2a^3(4a^2\omega - 4b^2\omega + 4\omega^3) + 2ab^2(4a^2\omega - 4b^2\omega + 4\omega^3) + 2a\omega^2(4a^2\omega - 4b^2\omega + 4\omega^3) \\ &= 8a^5\omega - 8a^3b^2\omega + 8a^3\omega^3 + 8a^3b^2\omega - 8ab^4\omega + 8ab^2\omega^3 + 8a^3\omega^3 - 8ab^2\omega^3 + 8a\omega^5 \\ &= 8a^5\omega - 8ab^4\omega + 16a^3\omega^3 + 8a\omega^5 \end{aligned}$$

となります。

分子の第1項－第2項は、

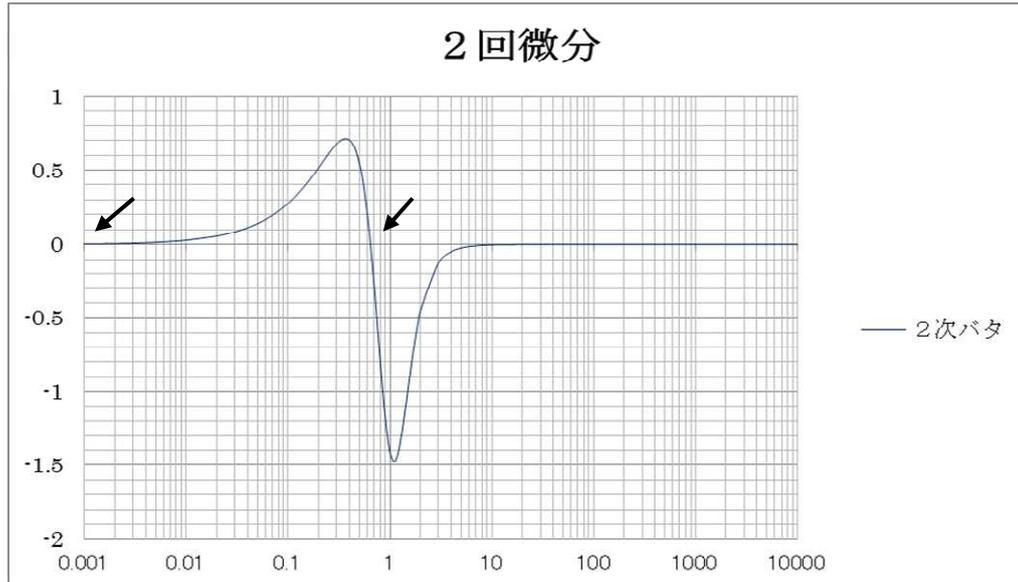
$$\begin{aligned} & 4a^5\omega + 8a^3b^2\omega + 4ab^4\omega + 8a^3\omega^3 - 8ab^2\omega^3 + 4a\omega^5 - (8a^5\omega - 8ab^4\omega + 16a^3\omega^3 + 8a\omega^5) \\ &= 4a^5\omega + 8a^3b^2\omega + 4ab^4\omega + 8a^3\omega^3 - 8ab^2\omega^3 + 4a\omega^5 - 8a^5\omega + 8ab^4\omega - 16a^3\omega^3 - 8a\omega^5 \\ &= -4a^5\omega + 8a^3b^2\omega + 12ab^4\omega - 8a^3\omega^3 - 8ab^2\omega^3 - 4a\omega^5 \\ &= -4a\omega (a^4 - 2a^2b^2 - 3b^4 + 2a^2\omega^2 + 2b^2\omega^2 + \omega^4) \\ &= -4a\omega \{\omega^4 + (2a^2 + 2b^2)\omega^2 + (a^4 - 2a^2b^2 - 3b^4)\} \\ &= -4a\omega \{\omega^4 + 2(a^2 + b^2)\omega^2 + (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)\} \end{aligned}$$

となります。

したがって位相遅れを角周波数で2回微分（群遅延時間を角周波数で1回微分したことと同じ）しますと、

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \right\} = \frac{-4a\omega\{\omega^4 + 2(a^2 + b^2)\omega^2 + (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)\}}{\{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^2}$$

になります。下図がこの式の  $a$  と  $b$  に、2 次のバターワースの  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  を代入した時のグラフです。



この 2 回微分式が、 $=0$  になる角周波数が群遅延時間の極大または極小時です。分数を 0 にするには分子を 0 にすることが必要十分条件ですから、分子を 0 にする角周波数を探しますと、

$$-4a\omega=0、つまり \omega=0$$

の時と、

$$\omega^4 + 2(a^2 + b^2)\omega^2 + (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2) = 0$$

の時です。その  $\omega$  が 2 回微分式の分母を 0 にしないことを確認する必要があります。 $\omega=0$  の時は 2 回微分式の分母を 0 にしませんので有効です。 $\omega=0$  が一つの答えです。

次にもう一つの答え、 $\omega^4 + 2(a^2 + b^2)\omega^2 + (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2) = 0$  を解きます。 $\omega^2$  を  $\Omega$  と置きますと、

$$\Omega^2 + 2(a^2 + b^2)\Omega + (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2) = 0$$

と言う複 2 次方程式になります。根 (解) の公式により、

$$\Omega = \frac{-2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{\{2(a^2 + b^2)\}^2 - 4(a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)}}{2}$$

$$\Omega = \frac{-2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)}}{2}$$

$$\Omega = \frac{-2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4\{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)\}}}{2}$$

$$\Omega = \frac{-2(a^2 + b^2) \pm 2\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)}}{2}$$

$$\Omega = -(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)}$$

となりました。これが位相遅れを角周波数で 2 回微分した式の分子を 0 にする、もう一つの角周波数です。

#### 6、2 次バターースフィルターの時

この式により、2 次バターースの群遅延時間の極値（5 ページグラフ、途中の凸頂点）の角周波数を求めます。2 次バターースの  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ですから、

$$\Omega = -\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2 - \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}}$$

$$\Omega = -(0.5 + 0.5) \pm \sqrt{(0.5 + 0.5)^2 - (0.5 + 0.5)(0.5 - 1.5)}$$

$$\Omega = -1 \pm \sqrt{1 - (-1)}$$

$$\Omega = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Omega = -1 \pm 1.414213562$$

となります。 $\omega^2 = \Omega$  ですから、 $\omega = \pm\sqrt{\Omega}$  です。

$$\Omega = -1 + 1.414213562 = 0.414213562 \text{ の時、}$$

$$\omega = \pm\sqrt{0.414213562}$$

$$\omega = \pm 0.643594$$

$$\Omega = -1 - 1.414213562 = -2.414213562 \text{ の時、}$$

$$\omega = \pm\sqrt{-2.414213562}$$

$$\omega = \pm j1.553774$$

となります。

虚数やマイナスの角周波数はフィルターに入力されませんので、もう一つの  $\omega$  は 0.643594[rad/sec]になります。この値は、2 回微分式の分母を 0 にしないので有効です。計算結果を下の表にまとめます。2 回微分グラフが 0 になるのは 2 ヶ所だけです。他の個所には、わずかですが + または - の値があります。11 ページの 2 回微分のグラフを描く計算を行いますと分ります。

## 2次バターースフィルター

正規化角周波数	0	→	0.643594	→	∞
群遅延時間の微分値	0	+	0	-	-

表から分ります様に、群遅延時間の微分値が0になるのは、正規化角周波数が0[rad/sec]の時と0.643594[rad/sec]の時です。また0[rad/sec]から0.643594[rad/sec]までの微分値は+、0.643594[rad/sec]から∞[rad/sec]までの微分値は-になっています。2次バターースの群遅延時間グラフ（5 ページ）を見ましても、正規化角周波数0.643594[rad/sec]付近が極大値になっております。したがって $\omega=0$ [rad/sec]における極値は極小値となります。

### 7、2次ベッセルフィルター

2次ベッセルフィルターまたは2次トムソンフィルターと呼ばれるフィルターは、2次バターースにある0.643594[rad/sec]の極値を無くしたフィルターです。

群遅延時間で途中の極値を表す $\Omega$ の式、

$$\Omega = -(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)}$$

において、 $b^2 = \frac{a^2}{3}$ と置きます。するとルート内の第2項が消え、

$$\Omega = -\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right) \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right)^2}$$

となります。aは実数ですから、 $a^2 + \frac{a^2}{3}$ は必ずプラスになります。ルートを外しますと、

$$\Omega = -\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right) \pm \left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right)$$

です。 $\Omega$ は、

$$\begin{aligned} \Omega &= -\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right) + \left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

または、

$$\Omega = -\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right) - \left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -a^2 - \frac{a^2}{3} - a^2 - \frac{a^2}{3} \\
&= -\frac{3a^2}{3} - \frac{a^2}{3} - \frac{3a^2}{3} - \frac{a^2}{3} \\
&= \frac{-8a^2}{3}
\end{aligned}$$

となります。ω<sup>2</sup>=Ω ですから、ω = ±√Ω ですので、

$$\omega = 0$$

または、

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{-8a^2}{3}}$$

となります。これは、b<sup>2</sup> =  $\frac{a^2}{3}$  と置いた時のフィルターの極値です。虚数やマイナスの角

周波数がフィルターに入力されることは考えられませんので、ω = ±√ $\frac{-8a^2}{3}$  は無いと考え

ます。b<sup>2</sup> =  $\frac{a^2}{3}$  と置くことにより、群遅延時間で途中の極値を表す式も、ω = 0 になりまし

た。

フィルター通過後の位相遅れを、角周波数で 2 回微分した 2 回微分の式、

$$\frac{-4a\omega\{\omega^4 + 2(a^2 + b^2)\omega^2 + (a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)\}}{\{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^2}$$

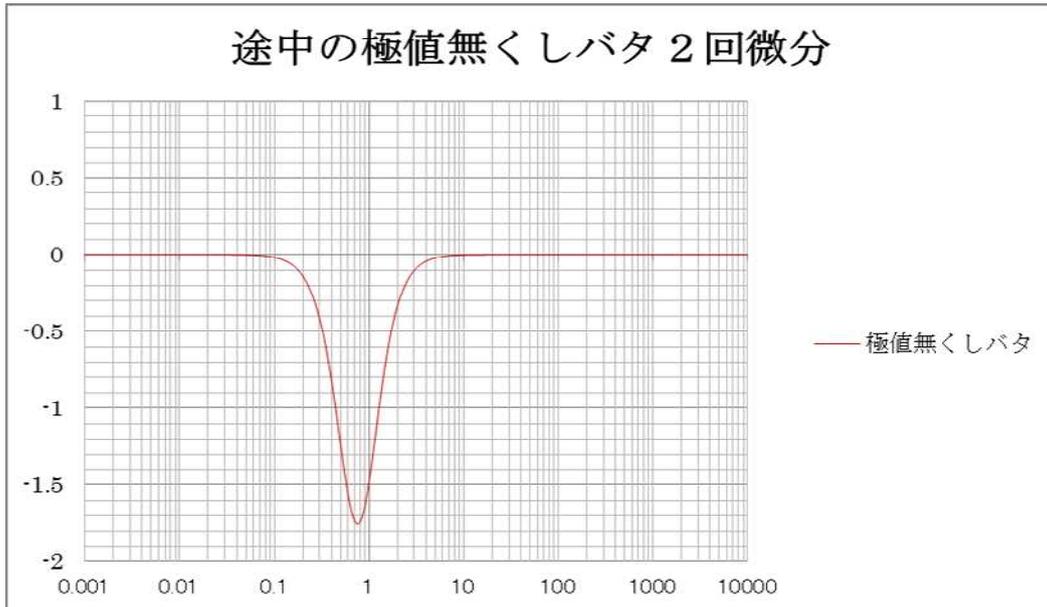
を=0 とする極値の角周波数は、この式の分子を 0 にすることが必要十分条件でした。-4aω

=0 つまり ω=0 の時に分子を 0 にすることは、既に分かっています。更に b<sup>2</sup> =  $\frac{a^2}{3}$  と置く

ことにより、中括弧内の式、ω<sup>4</sup> + 2(a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup>)ω<sup>2</sup> + (a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup>)(a<sup>2</sup> - 3b<sup>2</sup>) を=0 にする角周波

数が、ω=0 だけになることが分かりました。途中の極値が無くなります。b<sup>2</sup> =  $\frac{a^2}{3}$  は 2 回

微分式の分母を 0 にしないので有効です。



上図が2回微分の式のaに2次のバターワースの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、bに $\sqrt{\frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$ を代入した時の

グラフです。計算結果を下の表にまとめます。微分値の-は、グラフを描く時の計算で分ります。

途中の極値を無くした2次フィルター

正規化角周波数	0	→	0.643594	→	∞
群遅延時間の微分値	0	-	-	-	-

こうして群遅延時間の途中にピークが無い、群遅延時間の極値が $\omega=0$ だけにある、2次フィルターの伝達関数は、

$$G(s) = \frac{a^2 + \frac{a^2}{3}}{s^2 + 2as + a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{\frac{4a^2}{3}}{s^2 + 2as + \frac{4a^2}{3}}$$

であることが分りました。これが、2次ベッセルフィルターまたは2次トムソンフィルターと呼ばれるフィルターの伝達関数です。

群遅延時間の微分値が0になるのは、正規化角周波数が0[rad/sec]の時だけです。また0から∞の微分値は-になっています。後ほどベッセルフィルターの群遅延時間グラフを見て頂ければ分りますが、 $\omega=0$ の極値は極大値になります。

#### 8、2次ベッセルフィルターのaとbの値

2次フィルターの群遅延時間は4、にあります様に、

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}$$

でした。 $\omega=0$ [rad/sec]での群遅延時間を求めますと、

$$\left[ \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{(a^2 + b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \right]_{\omega=0} = \frac{2a(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{2a}{a^2 + b^2}$$

です。 $b^2 = \frac{a^2}{3}$  ですから、 $a^2 + b^2$  に  $a^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{4a^2}{3}$  を代入しますと、

$$= \frac{2a}{\frac{4a^2}{3}} = 2a \times \frac{3}{4a^2} = \frac{3}{2a}$$

となりました。ここで a、b の数値を決定する為、群遅延時間を 1 秒と決め付けますと、

$$\frac{3}{2a} = 1$$

$$2a = 3$$

$$a = 1.5$$

になります。 $b^2 = \frac{a^2}{3}$  ですから、

$$b^2 = \frac{(1.5)^2}{3} = 0.75$$

$$b = \pm\sqrt{0.75}$$

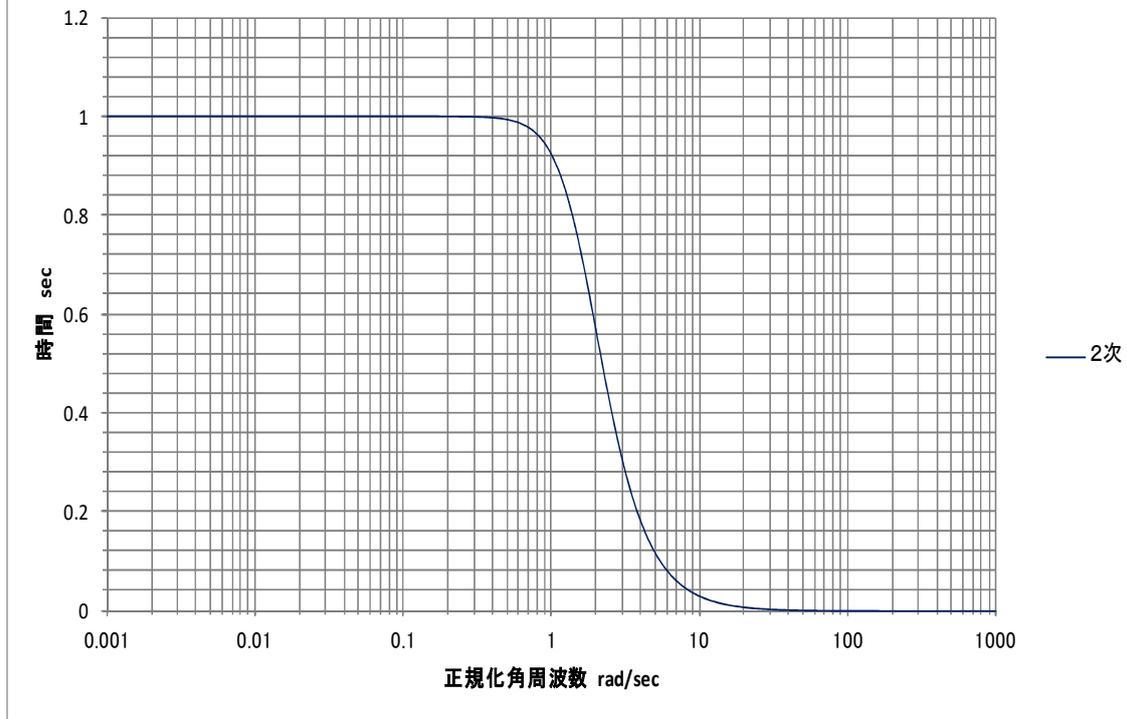
となりました。こうしてベッセルフィルタまたはトムソンフィルタと呼ばれるフィルタ、つまり群遅延時間の途中にピークが無い、極大値が  $\omega=0$  だけにある 2 次フィルタの伝達関数は、 $-a \pm j b = -1.5 \pm j\sqrt{0.75}$  を根として、

$$G(s) = \frac{1.5^2 + 0.75}{\{s - (-1.5 + j\sqrt{0.75})\}\{s - (-1.5 - j\sqrt{0.75})\}} = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

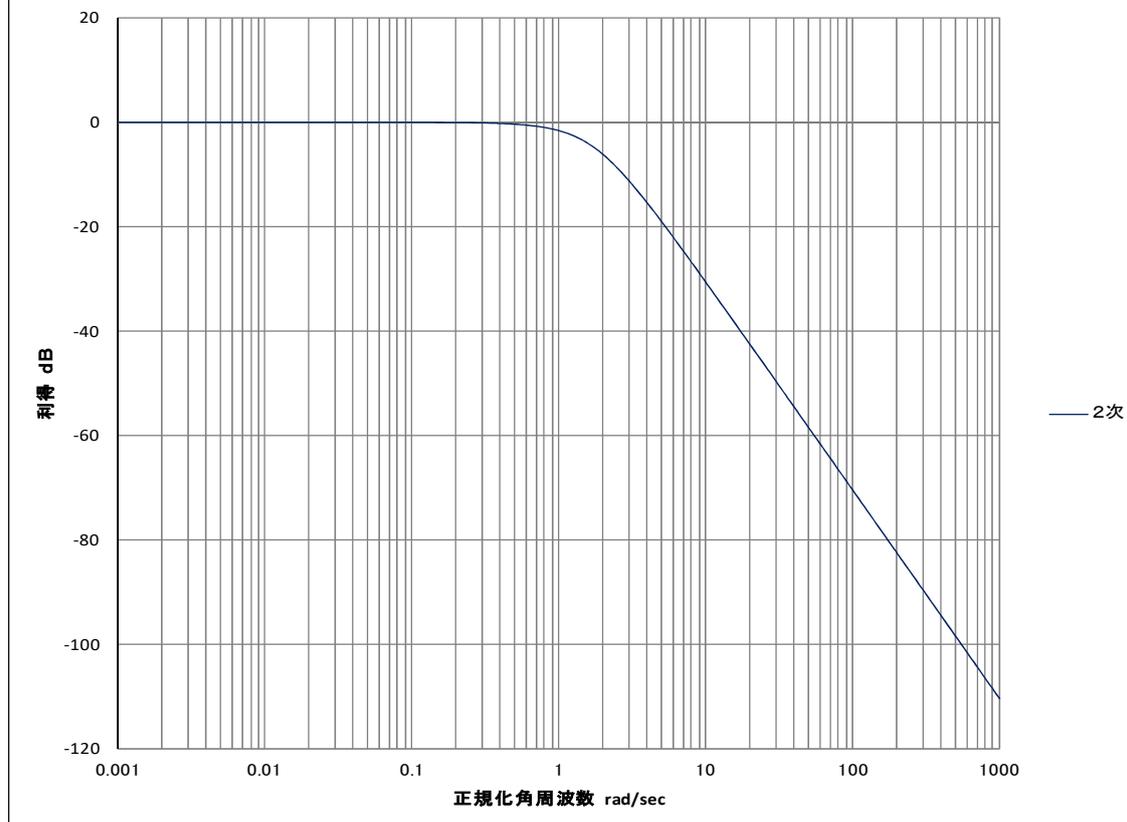
になりました。

このフィルタの群遅延時間と利得のグラフを提示致します。利得が変化しない部分での群遅延時間は、ほぼ水平です。a、b の数値を決定する為、群遅延時間を 1 秒と決めましたが、これは自由に変更出来ます。その時、利得グラフの折れ曲がり地点の角周波数も変化します。「高次ベッセルフィルタ」の章でまとめて説明致します。

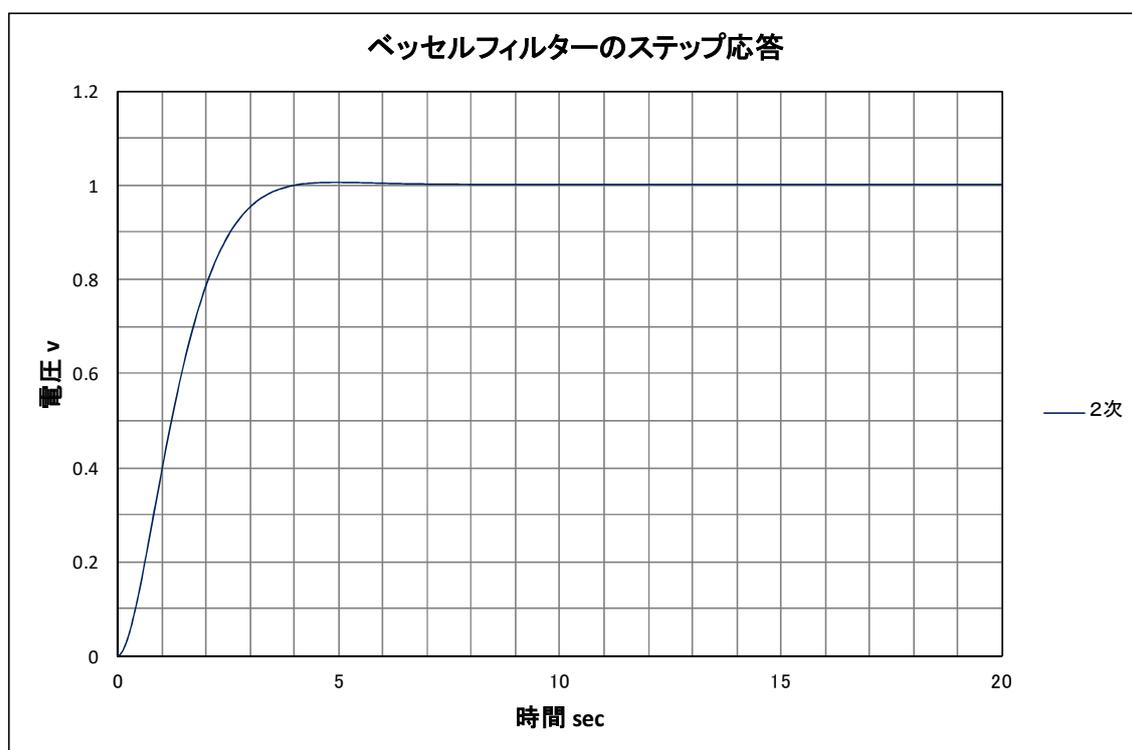
## 2次ベッセル群遅延時間



## 2次ベッセル利得グラフ



ステップ応答の波形も下に提示致します。



ベッセルフィルターまたはトムソンフィルターは、最大平坦群遅延時間のフィルターです。このフィルターは線形位相遅れを持つために、ステップ応答が優秀です。オーバーシュートとリングングが最小限になります。

その分、減衰はバタワースフィルターの様な最大平坦にはならず、だらだらと減衰します。

バタワースフィルターに近い減衰を得るには、使用するベッセルフィルターの次数を高くする必要があります。ベッセルフィルターのステップ応答の優秀さを考慮すれば、次数の追加により部品数が増加しても、ベッセルフィルターを設計する価値はあると思われます。高次ベッセルフィルターの章でまとめて説明致します。

[目次に戻る](#)