バイカッド回路について　　　　　　　　２０１２年８月１５日　　　　　目次へ戻る

1、状態変数型回路

次の様な伝達関数を考えます。

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)}=\frac{es^2+cs+d}{s^2+as+b}\ \cdots ①$$

この伝達関数は、e=0、c=0 のとき低域通過、e=0、d=0 のとき帯域通過、c=0、d=0 のとき高域通過、c=0 のとき零点を持つ伝達関数となります。

①式右辺の分子分母に $\frac{1}{s^2}$ をかけますと、

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)}=\frac{e+\frac{c}{s}+\frac{d}{s^2}}{1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}}\ \cdots ②$$

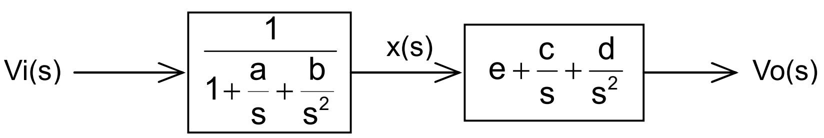
になります。更に、

$$\frac{1}{1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}}\bullet\left(e+\frac{c}{s}+\frac{d}{s^2}\right)=\frac{Vo(s)}{Vi(s)}\ \cdots ③$$

と変形します。両辺に Vi(s)をかけますと、

$$Vi(s)\bullet\frac{1}{1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}}\bullet\left(e+\frac{c}{s}+\frac{d}{s^2}\right)=Vo(s)\ \cdots ④$$

になります。④式でブロック図を作りますと、



になります。前後のブロックをつなぐ矢印に、x(s)という信号名を付けました。このブロック図の入力側では次の式が立ちます。

$$Vi(s)\bullet\frac{1}{1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}}=x(s)$$

$$Vi(s)=x(s)\bullet\left(1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}\right)=x(s)+\frac{ax(s)}{s}+\frac{bx(s)}{s^2}\quad\cdots⑤$$

さらに出力側では、

$$x(s)\bullet\left(e+\frac{c}{s}+\frac{d}{s^2}\right)=Vo(s)$$

$$Vo(s)=ex(s)+\frac{cx(s)}{s}+\frac{dx(s)}{s^2}\quad\cdots⑥$$

が成り立ちます。

⑤式を、

$$x(s)=Vi(s)-\frac{ax(s)}{s}-\frac{bx(s)}{s^2}\quad\cdots⑦$$

と変形し、ブロック図に描きますと、

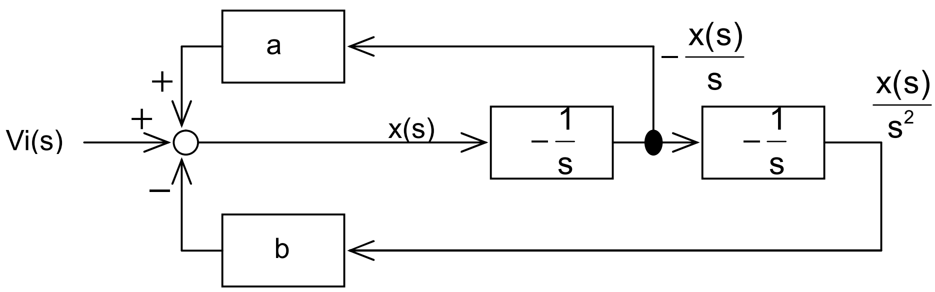


図 1

になります。出力として、⑥式の各項を抽出すれば、

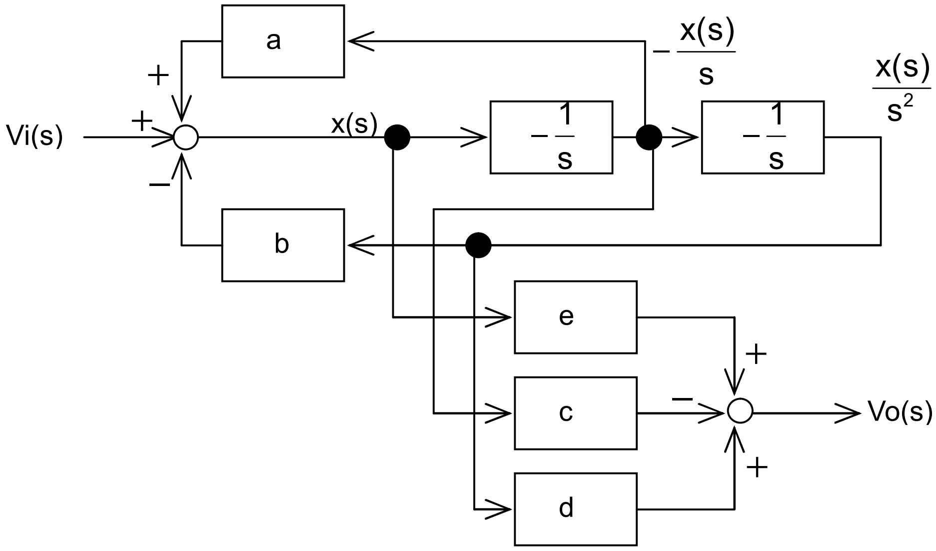
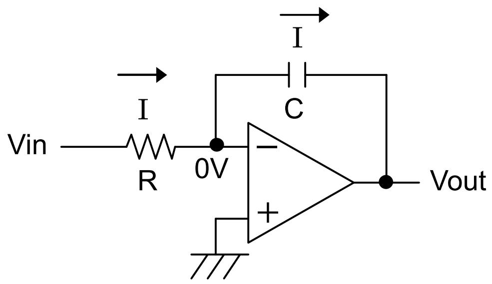


図 2

となり、これが②式＝①式の伝達関数を表す回路のブロック図です。この回路を状態変数型と呼びます。ブロック図を実際の回路に直します。

2、実際の回路

(1)　$-\frac{x(s)}{s}$、$\frac{x(s)}{s^2}$ を作る回路



この回路は積分器です。オペアンプの入力には電流は流れ込みません。また、イマジナルショートが成り立ち、オペアンプの＋入力と－入力は同じ電圧です。この回路では＋入力が接地されて 0V ですので、－入力も常に 0V になる筈です。

また初期状態では、Vin は 0V、Ｉも 0A、電荷がたまっていない為 C の両端電圧は 0V です。したがって、オペアンプの出力電圧 Vout も 0V です。

Vin が入力されますと、オームの法則により、R には $I = \frac{Vin}{R}$ という電流が流れます。オペアンプの入力には電流の出入りは有りませんので、この電流は全て C に向かって流れま

す。すると C には電流を時間で積分した、$Q=\int_0^t \frac{Vin}{R}dt$ の電荷が溜まります。電荷が溜まりますと、C の両端に電流が流れ込む側を＋として $V=\frac{Q}{C}$ の電圧が生じます。

その時、オペアンプの出力 Vout が 0V のままでは、オペアンプのー入力側の電圧が上がり、イマジナルショートが成り立たなくなります。Vout に C の電圧を打ち消す負の電圧が出て、オペアンプのー入力を 0V にします。したがって出力電圧はマイナスが付き、

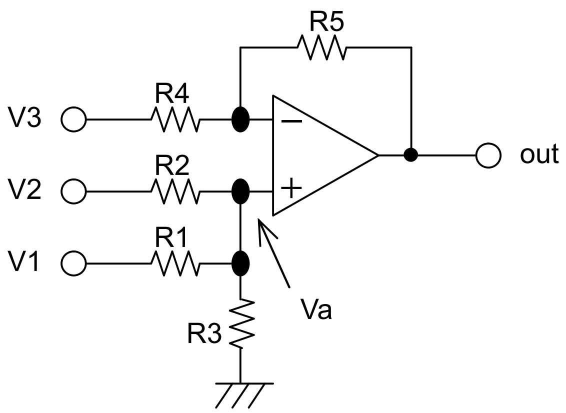
$$Vout=\frac{-\int_0^t \frac{Vin}{R}dt}{C}=\frac{-\frac{1}{R}\int_0^t Vindt}{C}=-\frac{1}{CR}\int_0^t Vindt$$

です。ラプラス変換して、$Vout(s)=-\frac{1}{sCR}Vin(s)$ になります。

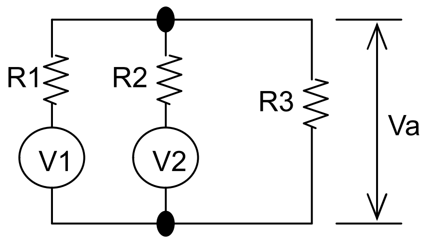
回路の伝達関数は、この式の両辺を Vin(s)で割り、$\frac{Vout(s)}{Vin(s)}=-\frac{1}{sCR}$ です。

(2)　x(s)と Vo(s)を作る為の加減算器

x(s)と Vo(s)を作る為の加減算器は全く同じです。回路は下図の通りです。



＋側入力回路を書き直します。オペアンプの入力に電流の出入りはありませんので、



になります。回路の方程式を作ります。R1 には V1 と Va の差の電圧による電流、R2 には V2 と Va の差の電圧による電流が流れ、和の電流が R3 に Va の電圧を生じさせていますから、

$$
\begin{aligned}
Va &= \left(\frac{V1 - Va}{R1} + \frac{V2 - Va}{R2}\right)R3 \\
&= \frac{R3}{R1}(V1 - Va) + \frac{R3}{R2}(V2 - Va) \\
&= \frac{R3}{R1}V1 - \frac{R3}{R1}Va + \frac{R3}{R2}V2 - \frac{R3}{R2}Va
\end{aligned}
$$

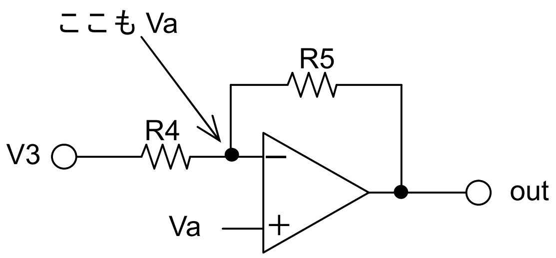
$$Va + \frac{R3}{R1}Va + \frac{R3}{R2}Va = \frac{R3}{R1}V1 + \frac{R3}{R2}V2$$

$$\frac{R1R2 + R2R3 + R3R1}{R1R2}Va = \frac{R3}{R1}V1 + \frac{R3}{R2}V2$$

$$
\begin{aligned}
Va &= \frac{R1R2}{R1R2 + R2R3 + R3R1} \bullet \frac{R3}{R1}V1 + \frac{R1R2}{R1R2 + R2R3 + R3R1} \bullet \frac{R3}{R2}V2 \\
&= \frac{R2R3}{R1R2 + R2R3 + R3R1}V1 + \frac{R1R3}{R1R2 + R2R3 + R3R1}V2
\end{aligned}
$$

となります。

オペアンプの－側入力の電圧もイマジナルショートにより、同じ Va になります。



R4 には V3 と Va の差の電圧による電流が流れます。オペアンプの入力は電流の出入はありません。電流はそのまま R5 に流れ込み、R5 での電圧降下を起こします。このことは、out が Va より低い電圧でなければ起こり得ません。out の電圧は R5 での電圧降下分だけ Va より低い電圧となります。したがって次の式が成り立ちます。

$$out = Va - \frac{V3 - Va}{R4} \bullet R5$$

$$= Va - \frac{R5}{R4}V3 + \frac{R5}{R4}Va$$

$$= \frac{R4 + R5}{R4}Va - \frac{R5}{R4}V3$$

この結果に、先ほどの Va の結果を代入しますと、

$$= \left(\frac{R4 + R5}{R4}\right)\left(\frac{R2R3}{R1R2 + R2R3 + R3R1}V1 + \frac{R1R3}{R1R2 + R2R3 + R3R1}V2\right) - \frac{R5}{R4}V3$$

$$= \frac{R2R3R4 + R2R3R5}{R1R2R4 + R2R3R4 + R4R3R1}V1 + \frac{R1R3R4 + R1R3R5}{R1R2R4 + R2R3R4 + R4R3R1}V2 - \frac{R5}{R4}V3$$

$$= \frac{(R2R3R4 + R2R3R5)V1 + (R1R3R4 + R1R3R5)V2}{R1R2R4 + R2R3R4 + R4R3R1} - \frac{R5}{R4}V3$$

になりました。非常にややこしい式になります。R1＝R2＝R3＝R4＝R5 ならば、

$$\frac{2}{3}V1 + \frac{2}{3}V2 - V3$$

です。しかし図 1、図 2 にある a、b、c、d、e という係数を付けようとすると、全部の抵抗値がからむ、複雑な方程式を解く必要があります。その為、状態変数型そのままの回路は嫌われます。

3、回路の改良

⑦式のブロック図、図 1 を図 3 の様に改良します。図 1 の右端にある積分器の後ろに反転増幅器を置き、符号を反転させてから、左端にある加算器に送り込みます。

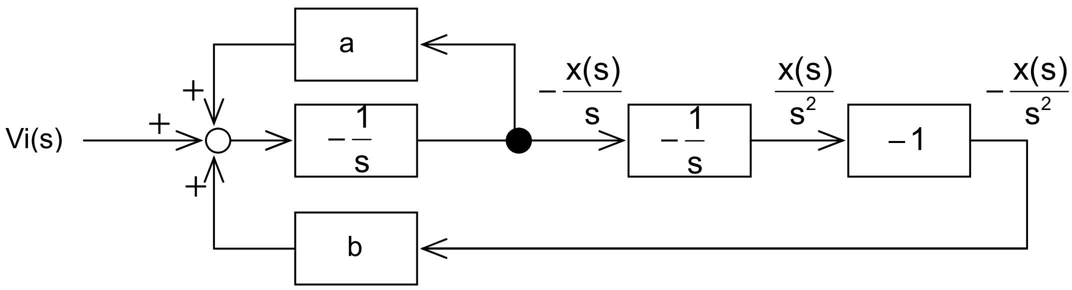


図 3

4、$-\dfrac{x(s)}{s}$ を作る為の加算器と積分器

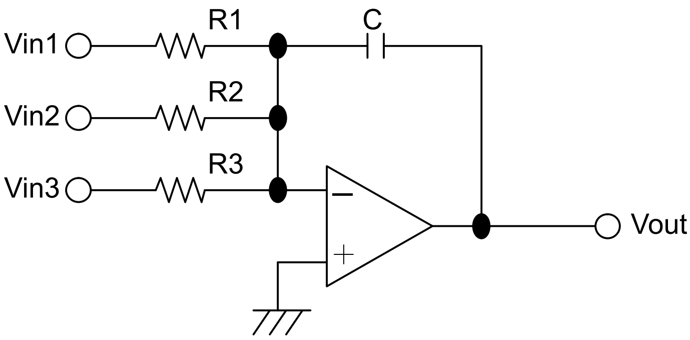


図 3 左端の加算器と積分器は、ひとかたまりです。R1 には Vin1 による電流、R2 には Vin2 による電流、R3 には Vin3 による電流が流れます。イマジナルショートにより、オペアンプの－入力は＋入力と同じ電圧です。＋入力が接地されていて 0V ですので、－入力も常に 0V です。R1、R2、R3 を流れる各電流値は、他の電圧値に全く影響を受けません。例えば Vin2、Vin3 が何 V であろうと、R1 には常に $\dfrac{Vin\,1}{R1}$ の電流が流れます。オペアンプの－入力に電流の出入りは無く、和の電流が C で積分され Q の電荷を生じ、$\dfrac{Q}{C}$ の電圧を生みます。本章 2、(1)と同じ動作です。イマジナルショートを成立させる為、その電圧をキャンセルさせる逆極性の電圧が出力 Vout に出ますから、

$$
\begin{aligned}
Vout &= -\frac{\int_0^t \left(\frac{Vin1}{R1} + \frac{Vin2}{R2} + \frac{Vin3}{R3}\right) dt}{C} \\
&= -\frac{\int_0^t \frac{Vin1}{R1} dt + \int_0^t \frac{Vin2}{R2} dt + \int_0^t \frac{Vin3}{R3} dt}{C} \\
&= -\frac{\frac{1}{R1}\int_0^t Vin1\ dt + \frac{1}{R2}\int_0^t Vin2\ dt + \frac{1}{R3}\int_0^t Vin3\ dt}{C} \\
&= -\left(\frac{1}{CR1}\int_0^t Vin1\ dt + \frac{1}{CR2}\int_0^t Vin2\ dt + \frac{1}{CR3}\int_0^t Vin3\ dt\right)
\end{aligned}
$$

となります。この式をラプラス変換しますと、

$$
Vout\ (s) = -\left\{\frac{1}{sCR\,1} Vin1\,(s) + \frac{1}{sCR\,2} Vin2\ (s) + \frac{1}{sCR\,3} Vin3\ (s)\right\}
$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{\frac{1}{CR\,1}\,Vin1\,(s) + \frac{1}{CR\,2}\,Vin2\ (s) + \frac{1}{CR\,3}\,Vin3\ (s)\right\}$$

になります。したがって、各係数の付いた各電圧を加算し、積分し、符号を反転した出力が出ることが分ります。加減算器＋積分器に比べ、極めて単純明快です。

5、改良回路で出力を取り出す

図 3 の各信号から、⑥式の、

$$Vo\,(s) = ex\,(s) + \frac{cx\,(s)}{s} + \frac{dx\,(s)}{s^2}$$

で出力を取り出さなければなりません。図 3 には、$-\frac{x(s)}{s}$、$\frac{x(s)}{s^2}$、$-\frac{x(s)}{s^2}$という信号はあります。ところが信号 x(s)が消えました。x(s)はオペアンプの内部に隠れました。

x(s)は⑦式、

$$x(s)\ =\ Vi(s) - \frac{ax\,(s)}{s} - \frac{bx\,(s)}{s^2}$$

でした。この⑦式を使います。⑦式を⑥式に代入します。すると、

$$\begin{aligned} Vo\,(s) &= ex\,(s) + \frac{cx\,(s)}{s} + \frac{dx\,(s)}{s^2} \\ &= e\left\{Vi(s) - \frac{ax\,(s)}{s} - \frac{bx\,(s)}{s^2}\right\} + \frac{cx\,(s)}{s} + \frac{dx\,(s)}{s^2} \\ &= eVi(s) - ae\,\frac{x(s)}{s} - be\,\frac{x(s)}{s^2} + c\,\frac{x(s)}{s} + d\,\frac{x(s)}{s^2} \\ &= eVi(s) + (c - ae\,)\frac{x(s)}{s} + (d - be\,)\frac{x(s)}{s^2}\ \cdot\cdot\cdot ⑧ \end{aligned}$$

になります。図 3 上にある信号は⑧式の、$\frac{x(s)}{s}$ではなく、$-\frac{x(s)}{s}$です。また図 3 上には、$\frac{x(s)}{s^2}$と、$-\frac{x(s)}{s^2}$があるのですが、$-\frac{x(s)}{s}$に合わせる為に、$-\frac{x(s)}{s^2}$を使います。⑧式の第 2 項と第 3 項を次の様に変形しますと、

$$= eVi(s) + \{-(ae - c)\}\frac{x(s)}{s} + \{-(be - d)\}\frac{x(s)}{s^2}$$

$$= eVi(s) - (ae - c)\frac{x(s)}{s} - (be - d)\frac{x(s)}{s^2} \quad ・・・⑨$$

になりました。このブロック図が、図 4 です。

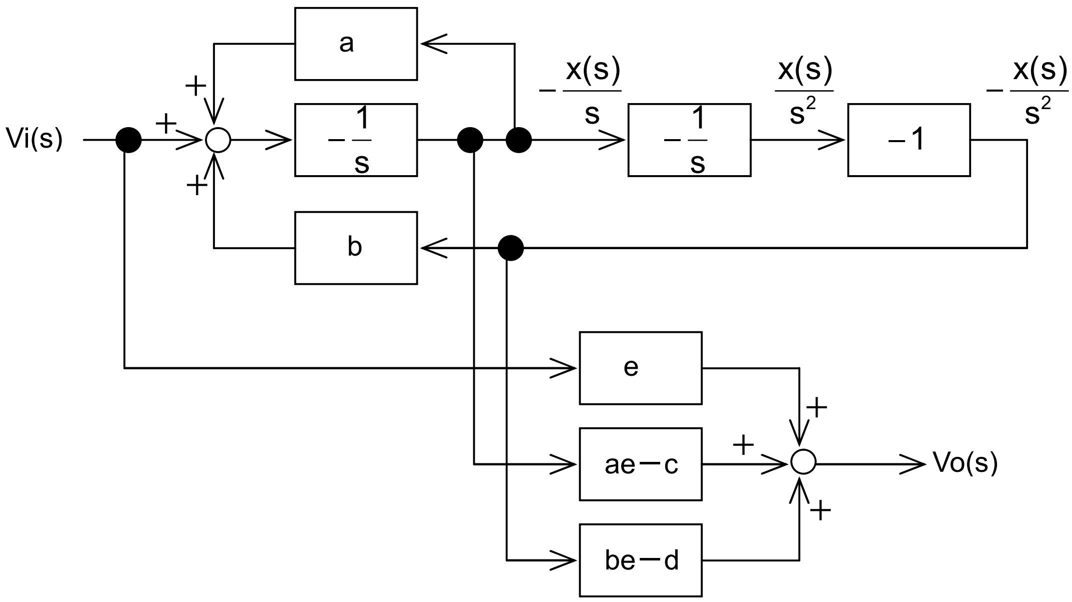
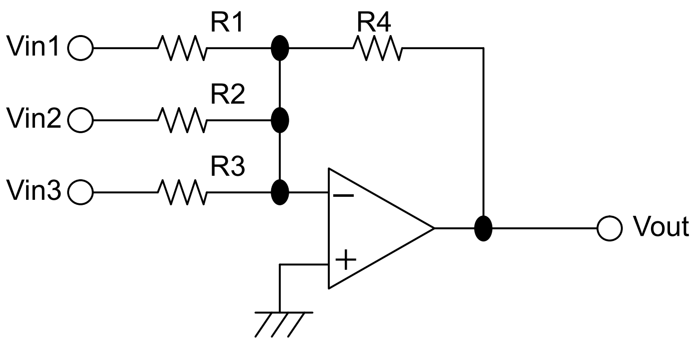


図 4

6、出力用加算器の回路



上図は出力用加算器の回路です。R1 には Vin1 による電流、R2 には Vin2 による電流、R3 には Vin3 による電流が流れます。イマジナルショートにより、オペアンプの－入力は＋入力と同じ電圧です。＋入力が接地されていて 0V ですので、－入力も常に 0V です。R1、 R2、R3 を流れる各電流値は他の電圧値に全く影響を受けません。例えば Vin2、Vin3 が何 V であろうと、R1 には常に $\frac{Vin\,1}{R1}$ の電流が流れます。和の電流、$\frac{Vin\,1}{R1}+\frac{Vin\,2}{R2}+\frac{Vin\,3}{R3}$ が R4 に流れ、流れ込む側をプラスとする電圧を生じます。イマジナルショートを成立させる為、その電圧をキャンセルさせるマイナスの電圧が出力 Vout に出ますから、

$$\begin{aligned} Vout &= -\left(\frac{Vin1}{R1}+\frac{Vin2}{R2}+\frac{Vin3}{R3}\right)R\,4 \\ &= -\left(\frac{R\,4}{R1}Vin1+\frac{R\,4}{R\,2}Vin2+\frac{R\,4}{R\,3}Vin3\right) \end{aligned}$$

になります。各係数の付いた各電圧を加算し、符号を反転した出力が出ることが分ります。

7、最終回路

出力用加算器が反転ですので⑨式は、

$$Vo(s) = -\left\{eVi(s)-(ae-c)\frac{x(s)}{s}-(be-d)\frac{x(s)}{s^2}\right\} \quad ・・・⑩$$

となります。また、①式の伝達関数は、

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\frac{es^2+cs+d}{s^2+as+b}$$

となります。ともに頭にマイナスが付きますが、人間の耳は位相に対して鈍感ですので問題ありません。最終的に改良型回路のブロック図は、

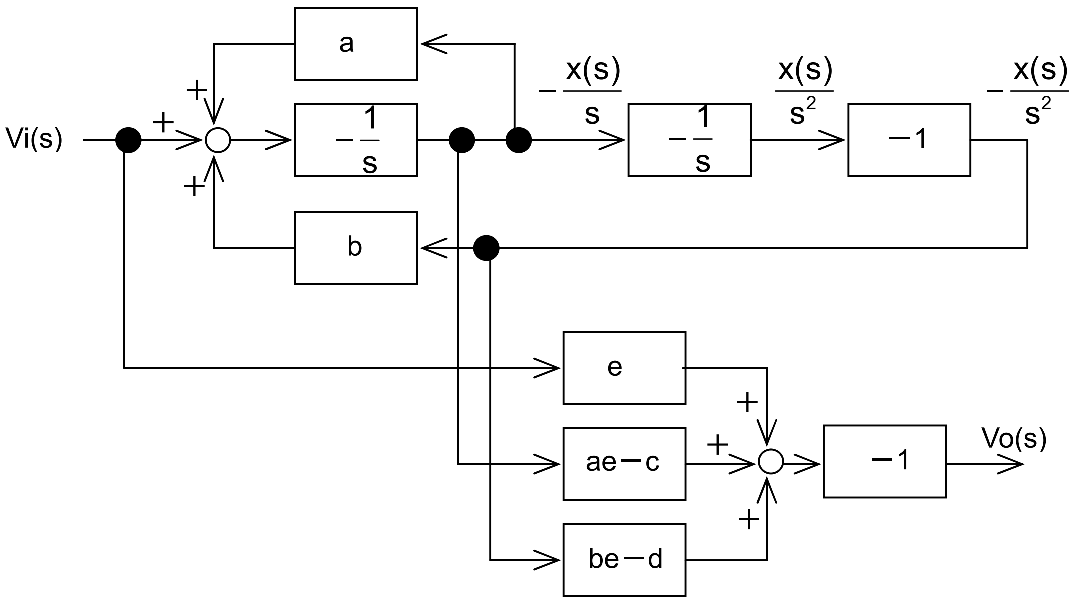


図 5

となります。

8、名前の由来

この改良型の回路をバイカッド回路と呼んでいます。biquadratic function の略です。

biquadratic function とは 2 つの 2 次関数という意味から、4 次関数を表す時と分子分母共に 2 次の分数関数を表す時があるそうです。

改良型の回路の場合は、分子分母共に 2 次の分数関数の意味で使われます。「分子分母共に 2 次の伝達関数がすべて実現できる。」という意味がこもっています。

目次へ戻る