分数関数を作る　　　　　　　　　　　　　　　　2007 年 12 月 24 日　[目次へ戻る]

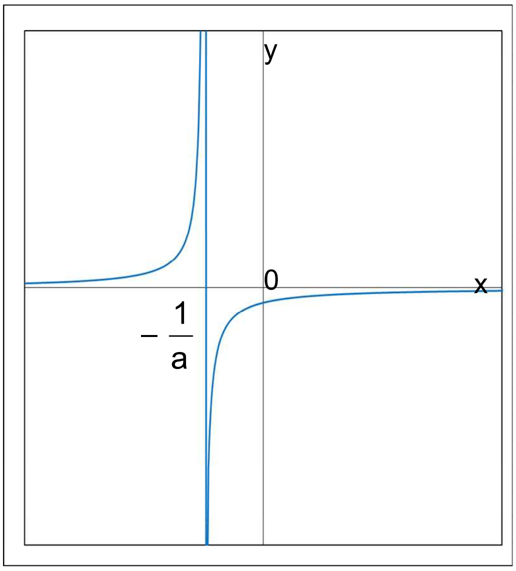
2023.9.5　2023.9.7　2023.9.15　2024.9.17　訂正

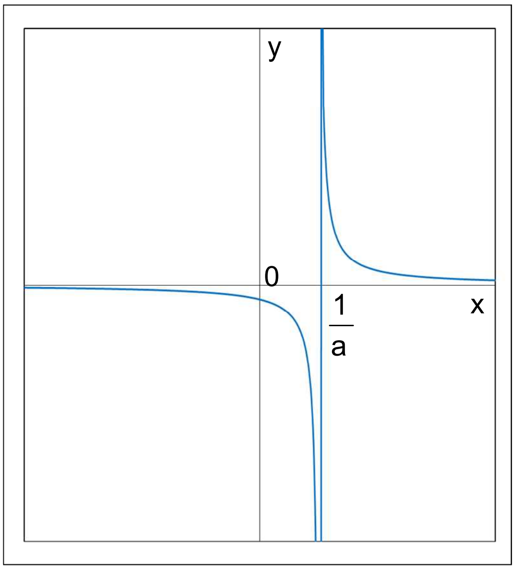
連立チェビシェフフィルターで使用する元関数の最大特徴は、変数が逆数になると関数の値も逆数になるということです。変数を x、関数の値を f(x)とすれば、$f\left(\frac{1}{x}\right)$ が f(x)の逆数になる元関数が必要です。つまり $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ です。

上記の要求に答える、最も簡単な関数の形は $f(x)=x^n$ です。$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{x^n}=\frac{1}{f(x)}$ となりますが、この元関数を使いますとバタワースフィルターになってしまいますので、もう少し高級な関数を使用します。

分数関数式が、その目的にかなっていることが分かっています。a を 1 以下のある定数として、零点が±a で、極が$\pm\frac{1}{a}$である分数関数式を作ることにします。

まず極が$-\frac{1}{a}$および$+\frac{1}{a}$である、2 つの双曲線の足し算を考えます。





上左図の双曲線は x が$-\frac{1}{a}$以下で y が正、$-\frac{1}{a}$以上で負なので、式は$\frac{-P}{x+\frac{1}{a}}$です。

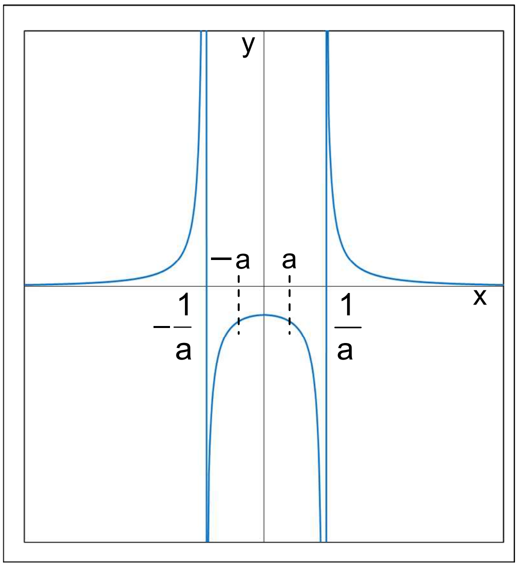
上右図の双曲線は x が$\frac{1}{a}$以上で y が正、$\frac{1}{a}$以下で負なので、式は$\frac{P}{x-\frac{1}{a}}$です。

上の 2 式中、P とは縦横漸近線への、へばり付き具合を決める定数です。両双曲線を足

した式を f(x)としますと、

$$f(x)=\frac{-P}{x+\frac{1}{a}}+\frac{P}{x-\frac{1}{a}}\quad\cdots ①$$

です。



グラフは右図のようになります。極は$\pm\frac{1}{a}$ですが、$\pm\frac{1}{a}$の逆数である±a が零点になっていません。

a および−a での f(x)の値は、f(x) の x にたとえば a を代入して、

$$f(a)=\frac{-P}{a+\frac{1}{a}}+\frac{P}{a-\frac{1}{a}}=\frac{-P\left(a-\frac{1}{a}\right)+P\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)}=\frac{-Pa+\frac{P}{a}+Pa+\frac{P}{a}}{a^2-\frac{1}{a^2}}=\frac{\frac{2P}{a}}{\frac{a^4-1}{a^2}}$$

$$=\frac{2P}{a}\cdot\frac{a^2}{a^4-1}=\frac{2aP}{a^4-1}=\frac{-2aP}{-(a^4-1)}=\frac{-2aP}{1-a^4}$$

です。また−a を代入しても、

$$f(-a)=\frac{-P}{-a+\frac{1}{a}}+\frac{P}{-a-\frac{1}{a}}=\frac{-P\left(-a-\frac{1}{a}\right)+P\left(-a+\frac{1}{a}\right)}{\left(-a+\frac{1}{a}\right)\left(-a-\frac{1}{a}\right)}=\frac{Pa+\frac{P}{a}-Pa+\frac{P}{a}}{a^2-\frac{1}{a^2}}=\frac{\frac{2P}{a}}{\frac{a^4-1}{a^2}}$$

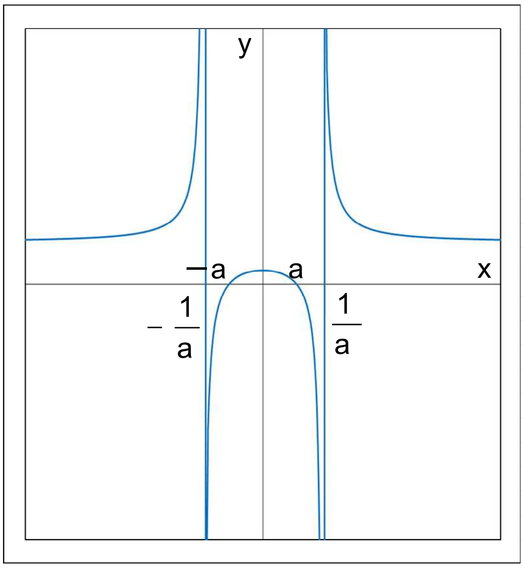
$$=\frac{2P}{a}\cdot\frac{a^2}{a^4-1}=\frac{2aP}{a^4-1}=\frac{-2aP}{-(a^4-1)}=\frac{-2aP}{1-a^4}$$

です。このグラフが a および−a で x 軸（横軸）を切るようにするには、①式が$\left|\frac{-2aP}{1-a^4}\right|$上昇していれば良いです。①式に$\frac{2aP}{1-a^4}$を足しますと、

$$f(x)=\frac{2aP}{1-a^4}+\frac{-P}{x+\frac{1}{a}}+\frac{P}{x-\frac{1}{a}}=\frac{2aP}{1-a^4}+\frac{-P\left(x-\frac{1}{a}\right)+P\left(x+\frac{1}{a}\right)}{\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}=\frac{2aP}{1-a^4}+\frac{\frac{2P}{a}}{x^2-\frac{1}{a^2}}$$

$$=\frac{2aP\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{2P}{a}(1-a^4)}{(1-a^4)\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{2aPx^2-\frac{2P}{a}+\frac{2P}{a}-2a^3P}{(1-a^4)\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{2aP(x^2-a^2)}{(1-a^4)\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)}$$

になります。グラフは右図です。



つまり、零点が±a で、極が$\pm\frac{1}{a}$である分数関数式は、

$$f(x)=\frac{2aP(x^2-a^2)}{(1-a^4)\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{2aP(x+a)(x-a)}{(1-a^4)\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}\quad\cdot\cdot\cdot②$$

です。次に②式中の定数 P の値を決定します。②式が、$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$の性質を持つ時、次の式が成り立つ筈です。

$$\frac{2aP\left(\frac{1}{x}+a\right)\left(\frac{1}{x}-a\right)}{(1-a^4)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{1}{\dfrac{2aP(x+a)(x-a)}{(1-a^4)\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}}$$

右辺を計算しますと、

$$\frac{2aP\left(\frac{1}{x}+a\right)\left(\frac{1}{x}-a\right)}{(1-a^4)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{(1-a^4)\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}{2aP(x+a)(x-a)}$$

になります。

この方程式を解きます。たすき掛けを行い順次計算しますと、

$$(1-a^4)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)=4a^2P^2\left(\frac{1}{x}+a\right)\left(\frac{1}{x}-a\right)(x+a)(x-a)$$

$$\frac{(1-a^4)^2}{4a^2P^2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)=\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)(x^2-a^2)$$

$$\frac{(1-a^4)^2}{4a^2P^2}\left(1-\frac{1}{a^2x^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{a^4}\right)=1-\frac{a^2}{x^2}-a^2x^2+a^4$$

$$\frac{(1-a^4)^2}{4a^2P^2}\left(1-\frac{1}{a^2x^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{a^4}\right)=a^4\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2x^2}-\frac{x^2}{a^2}+1\right)$$

$$\frac{(1-a^4)^2}{4a^2P^2}=a^4$$

$$P^2=\frac{(1-a^4)^2}{4a^6}$$

$$P=\pm\sqrt{\frac{(1-a^4)^2}{4a^6}}=\pm\frac{1-a^4}{2a^3}$$

になります。P をこの値にして、②式の $\frac{2aP}{1-a^4}$ の部分を計算しますと、

$$\frac{2aP}{1-a^4}=\frac{2a\left(\pm\frac{1-a^4}{2a^3}\right)}{1-a^4}=\pm\frac{1-a^4}{a^2}\cdot\frac{1}{1-a^4}=\pm\frac{1}{a^2}$$

になります。したがって②式は、

$$\pm\frac{1}{a^2}\cdot\frac{(x+a)(x-a)}{\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}=\pm\frac{x^2-a^2}{a^2\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)}=\pm\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}$$

となります。零点が±a で極が $\pm\frac{1}{a}$ であり、$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ になる分数関数式は、

$$\pm\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

であることが分かりました。

次に横漸近線の位置を探ります。正号の方の③式を使用して、この分数を部分分数に分解して見ます。分子と分母の次数が同じなので、まず割り算を行います。

$$
\begin{array}{r}
\dfrac{1}{a^2} \\
a^2x^2-1 \overline{\big)\, x^2 \quad -a^2} \\
x^2 \quad -\dfrac{1}{a^2} \\
\hline
-a^2+\dfrac{1}{a^2}
\end{array}
$$

により、

$$
\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}=\frac{1}{a^2}+\frac{-a^2+\dfrac{1}{a^2}}{a^2x^2-1}=\frac{1}{a^2}+\frac{a^2\left(-1+\dfrac{1}{a^4}\right)}{a^2\left(x^2-\dfrac{1}{a^2}\right)}=\frac{1}{a^2}+\frac{-1+\dfrac{1}{a^4}}{x^2-\dfrac{1}{a^2}}
$$

$$
=\frac{1}{a^2}+\frac{-1+\dfrac{1}{a^4}}{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}
$$

です。さらに右辺第 2 項をヘビサイトの目隠し法で、部分分数に分解します。右辺第 2 項を、

$$
\frac{-1+\dfrac{1}{a^4}}{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}=\frac{A}{x+\dfrac{1}{a}}+\frac{B}{x-\dfrac{1}{a}}
$$

と置きます。両辺に $x+\dfrac{1}{a}$ を掛けますと、

$$
\frac{\left(-1+\dfrac{1}{a^4}\right)\cancel{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}}{\cancel{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}=\frac{A\cancel{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}}{\cancel{x+\dfrac{1}{a}}}+\frac{B\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}{x-\dfrac{1}{a}}
$$

$$
\frac{-1+\dfrac{1}{a^4}}{x-\dfrac{1}{a}}=A+\frac{B\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}{x-\dfrac{1}{a}}
$$

になります。$x=-\dfrac{1}{a}$ を代入しますと、

$$\frac{-1+\frac{1}{a^4}}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}} = A + \cancel{\frac{B\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}}$$

$$A = \frac{-1+\frac{1}{a^4}}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{-a^4+1}{a^4}}{\frac{-2}{a}} = \frac{1-a^4}{a^4}\cdot\frac{a}{-2} = -\frac{1-a^4}{2a^3}$$

になりました。両辺に$x-\frac{1}{a}$を掛けますと、

$$\frac{\left(-1+\frac{1}{a^4}\right)\cancel{\left(x-\frac{1}{a}\right)}}{\left(x+\frac{1}{a}\right)\cancel{\left(x-\frac{1}{a}\right)}} = \frac{A\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x+\frac{1}{a}} + \frac{B\cancel{\left(x-\frac{1}{a}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{a}}}$$

$$\frac{-1+\frac{1}{a^4}}{x+\frac{1}{a}} = \frac{A\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x+\frac{1}{a}} + B$$

になります。$x=\frac{1}{a}$を代入しますと、

$$\frac{-1+\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} = \cancel{\frac{A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}} + B$$

$$B = \frac{-1+\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} = \frac{\frac{-a^4+1}{a^4}}{\frac{2}{a}} = \frac{1-a^4}{a^4}\cdot\frac{a}{2} = \frac{1-a^4}{2a^3}$$

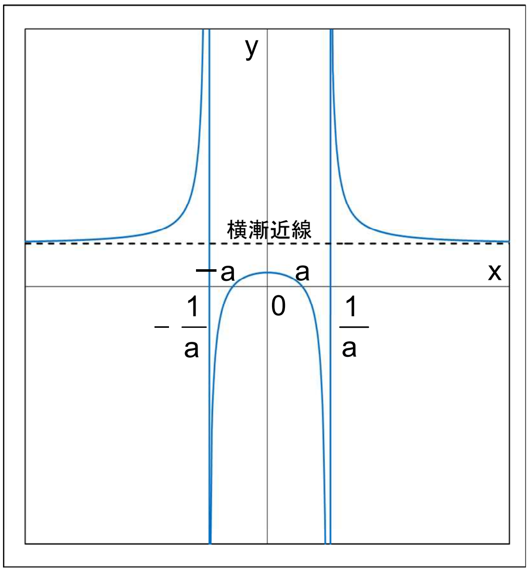
になりました。つまり③式は、

$$\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1} = \frac{1}{a^2} - \frac{\frac{1-a^4}{2a^3}}{x+\frac{1}{a}} + \frac{\frac{1-a^4}{2a^3}}{x-\frac{1}{a}} \quad \cdots ④$$

と部分分数に分解されました。当然ですが④式は２ページの一番下の式中にある、

$$f(x)=\frac{2aP}{1-a^4}+\frac{-P}{x+\frac{1}{a}}+\frac{P}{x-\frac{1}{a}}$$ に、P の値である $\frac{1-a^4}{2a^3}$ を代入したものになります。

④式の右辺第 2 項と第 3 項は分子が定数であり、それぞれ 1 ページの図の様な双曲線の式です。縦の漸近線は 2 本あり、$+\frac{1}{a}$ と $-\frac{1}{a}$ を通る y 軸に平行な直線です。X が十分小さな所又は十分大きな所では、④式の右辺第 2 項と第 3 項の値は非常に小さくなり、右辺第 1 項の値だけが生き残ります。この分数関数の横の漸近線は $\frac{1}{a^2}$ であることが分ります。右図をご参照下さい。



横の漸近線が $\frac{1}{a^2}$ では小さすぎるということで、最初に紹介しました f(x)=x^n を使うことを考えた方がおられました。

一番簡単な n=1 である「x」を③式に掛けてみますと、

$$f(x)=x\cdot\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}\quad・・・⑤$$

になります。この式が $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ を満たしているかを確認しますと、

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}-a^2}{\frac{a^2}{x^2}-1}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1-a^2x^2}{x^2}}{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-a^2x^2}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{-(1-a^2x^2)}{-(a^2-x^2)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{a^2x^2-1}{x^2-a^2}=\frac{1}{x\cdot\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}}=\frac{1}{f(x)}$$

になり、大丈夫です。

次に横の漸近線の位置を探るため、⑤式を部分分数に分解して見ます。分子の次数が分母の次数より大きいので、まず割り算を行います。

$$\begin{array}{r l} & \qquad\qquad \frac{x}{a^2} \\ \cline{2-2} a^2x^2-1 \big) & x^3 \qquad -a^2x \\ & x^3 \qquad -\frac{x}{a^2} \\ \hline & \qquad -a^2x+\frac{x}{a^2} \end{array}$$

により、

$$\frac{x^3-a^2x}{a^2x^2-1}=\frac{x}{a^2}+\frac{-a^2x+\frac{x}{a^2}}{a^2x^2-1}=\frac{x}{a^2}+\frac{a^2x\left(-1+\frac{1}{a^4}\right)}{a^2\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{x}{a^2}+\frac{x\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}$$

です。さらに右辺第２項をヘビサイトの目隠し法で、部分分数に分解します。第２項を、

$$\frac{x\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)}=\frac{A}{x+\frac{1}{a}}+\frac{B}{x-\frac{1}{a}}$$

と置きます。両辺に $x+\frac{1}{a}$ を掛けますと、

$$\frac{x\left(\frac{1}{a^4}-1\right)\cancel{\left(x+\frac{1}{a}\right)}}{\cancel{\left(x+\frac{1}{a}\right)}\left(x-\frac{1}{a}\right)}=\frac{A\cancel{\left(x+\frac{1}{a}\right)}}{\cancel{x+\frac{1}{a}}}+\frac{B\left(x+\frac{1}{a}\right)}{x-\frac{1}{a}}$$

$$\frac{x\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{x-\frac{1}{a}}=A+\frac{B\left(x+\frac{1}{a}\right)}{x-\frac{1}{a}}$$

になります。$x=-\frac{1}{a}$ を代入しますと、

$$\frac{-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}=A+\cancel{\frac{B\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}}$$

$$A=\frac{-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}=\left(-\frac{1}{a^5}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{-2}=\frac{-1+a^4}{a^5}\cdot\frac{a}{-2}=\frac{-(1-a^4)}{-2a^4}=\frac{1-a^4}{2a^4}$$

になりました。両辺に $x-\dfrac{1}{a}$ を掛けますと、

$$\frac{x\left(\frac{1}{a^4}-1\right)\cancel{\left(x-\frac{1}{a}\right)}}{\left(x+\frac{1}{a}\right)\cancel{\left(x-\frac{1}{a}\right)}}=\frac{A\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x+\frac{1}{a}}+\frac{B\cancel{\left(x-\frac{1}{a}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{a}}}$$

$$\frac{x\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{x+\frac{1}{a}}=\frac{A\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x+\frac{1}{a}}+B$$

になります。$x=\dfrac{1}{a}$ を代入しますと、

$$\frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=\cancel{\frac{A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}}+B$$

$$B=\frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^4}-1\right)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=\left(\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{2}=\frac{1-a^4}{a^5}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1-a^4}{2a^4}$$

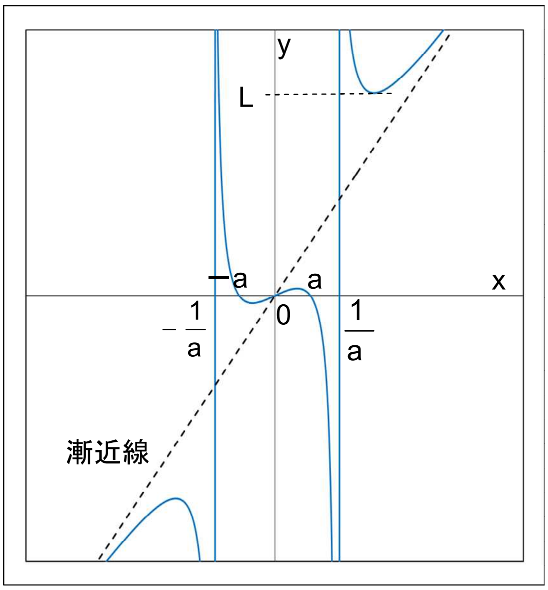
になりました。⑤式は、

$$x\bullet\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}=\frac{x}{a^2}+\frac{\frac{1-a^4}{2a^4}}{x+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1-a^4}{2a^4}}{x-\frac{1}{a}}$$

・・・⑥

と部分分数に分解されました。

⑥式の右辺第２項と第３項は分子が定数であり、それぞれ１ページの図の様な双曲線の式です。縦の漸近線は $+\dfrac{1}{a}$ と $-\dfrac{1}{a}$ を通る、２ 本の y 軸に平行な直線です。X が十分小さな所又は十分大きな所では、⑥式の右辺第２項と第３項の値は非常に小さくなり、右辺第１項だけが有意な値となります。この分数関数は



右のグラフにおいて、阻止域での L の値が

分りません。L の値を知ることは③式と⑤式を比較するためにに必要です。L の値は、簡単には求められません。これこそ連立チェビシェフフィルターの肝と言うべき、楕円関数を使わなければ求められないのです。3 次連立チェビシェフフィルターの章で考察致します。

ここでは、次の方法で数値計算的に求めて見ました。

まず、⑤式を微分します。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-a^2x}{a^2x^2-1}\right)=\frac{(x^3-a^2x)'(a^2x^2-1)-(a^2x^2-1)'(x^3-a^2x)}{(a^2x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2-a^2)(a^2x^2-1)-2a^2x(x^3-a^2x)}{(a^2x^2-1)^2}$$

$$=\frac{3a^2x^4-3x^2-a^4x^2+a^2-2a^2x^4+2a^4x^2}{(a^2x^2-1)^2}$$

$$=\frac{a^2x^4+(a^4-3)x^2+a^2}{(a^2x^2-1)^2}$$

この導関数が 0 になるのは、分子が 0 になることが必要十分条件ですので、

$$a^2x^4+(a^4-3)x^2+a^2=0$$

と言う方程式を解きます。両辺を a^2 で割りますと、

$$x^4+(a^2-\frac{3}{a^2})x^2+1=0$$

になります。これは複 2 次方程式ですので、x^2 を u、$a^2-\frac{3}{a^2}$ を d と置きますと、

$$u^2+du+1=0$$

となります。根（解）の公式により、

$$u=\frac{-d\pm\sqrt{d^2-4}}{2}$$

となります。x^2＝u ですので、x＝±$\sqrt{u}$ ですから、

$$x=\pm\sqrt{\frac{-d\pm\sqrt{d^2-4}}{2}}\quad\cdot\cdot\cdot⑦$$

となりました。x に 4 つの値が出ます。図を見れば分かります様に、正負の周波数について、それぞれ山と谷があるからです。L の値は 4 つの x の内、最も大きな値を④式に代入した値です。つまり⑦式の 4 つの値の内、根号の内外ともに＋の値のものを⑤式に代入します。

$$f(x)=x\cdot\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}=\sqrt{\frac{-d+\sqrt{d^2-4}}{2}}\cdot\frac{\dfrac{-d+\sqrt{d^2-4}}{2}-a^2}{a^2\cdot\dfrac{-d+\sqrt{d^2-4}}{2}-1}$$

$$=\sqrt{\frac{-d+\sqrt{d^2-4}}{2}}\cdot\frac{\dfrac{-d+\sqrt{d^2-4}-2a^2}{2}}{\dfrac{a^2(-d+\sqrt{d^2-4})-2}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{-d+\sqrt{d^2-4}}{2}}\cdot\frac{-d+\sqrt{d^2-4}-2a^2}{a^2(-d+\sqrt{d^2-4})-2}$$

但し、$d=a^2-\dfrac{3}{a^2}$

となり、これが L の値です。簡単な形になりません。具体的な数値で計算して見ます。適当な a を代入して、③式の漸近線の値と比較します。表の数字は丸めてあります。

表 1

a	③式漸近線	L の値
0.4	6.25	40.25
0.5	4.0	20.3
0.6	2.78	11.5

③式に x を掛けるだけで、相当な効果が出ることが一目瞭然です。a が小さいほど斜め漸近線の傾きが急になり、L の値が大きくなります。

更に効果を高める為に、元関数をダブルで使うことが考えられます。③式を 2 つ掛け合わせます。但し、各定数を次の様に定義します。

1、x＝±a と x＝±b でこの関数は零になる。

2、$x=\pm\dfrac{1}{a}$ と $x=\pm\dfrac{1}{b}$ でこの関数は極になる。

です。元関数は次のようになります。

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}\cdot\frac{x^2-b^2}{b^2x^2-1}\quad\cdots⑧$$

この関数の x に、$\dfrac{1}{x}$ を入力してみますと、

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x^2}-a^2}{\frac{a^2}{x^2}-1}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}-b^2}{\frac{b^2}{x^2}-1}=\frac{\frac{1-a^2x^2}{x^2}}{\frac{a^2-x^2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{1-b^2x^2}{x^2}}{\frac{b^2-x^2}{x^2}}$$

$$=\frac{1-a^2x^2}{a^2-x^2}\cdot\frac{1-b^2x^2}{b^2-x^2}=\frac{-(1-a^2x^2)}{-(a^2-x^2)}\cdot\frac{-(1-b^2x^2)}{-(b^2-x^2)}$$

$$=\frac{a^2x^2-1}{x^2-a^2}\cdot\frac{b^2x^2-1}{x^2-b^2}=\frac{1}{\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}}\cdot\frac{1}{\frac{x^2-b^2}{b^2x^2-1}}=\frac{1}{f(x)}$$

になり、$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ を満たしていることが分ります。次に漸近線の位置を探るため、⑦⑧式を部分分数に分解して見ます。まず展開しますと、

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}\cdot\frac{x^2-b^2}{b^2x^2-1}=\frac{x^4-b^2x^2-a^2x^2+a^2b^2}{a^2b^2x^4-a^2x^2-b^2x^2+1}$$

$$=\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{a^2b^2x^4-(a^2+b^2)x^2+1}$$

になります。分子と分母の次数が同じため、部分分数に分解するには割り算を行います。

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad\qquad\qquad\frac{1}{a^2b^2} \\ a^2b^2x^4-(a^2+b^2)x^2+1 & x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2 \\ & x^4-\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2} \\ \hline & -(a^2+b^2)x^2+\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2b^2}+a^2b^2-\frac{1}{a^2b^2} \end{array}$$

により、

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}\bullet\frac{x^2-b^2}{b^2x^2-1}=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{-(a^2+b^2)x^2+\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2b^2}+a^2b^2-\frac{1}{a^2b^2}}{(a^2x^2-1)(b^2x^2-1)}$$

です。右辺第 2 項を部分分数に分解します。右辺第 2 項を展開しますと、

$$\frac{-(a^2+b^2)x^2+\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2b^2}+a^2b^2-\frac{1}{a^2b^2}}{a^2\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)b^2\left(x^2-\frac{1}{b^2}\right)}=\frac{\frac{-(a^2+b^2)a^2b^2x^2+(a^2+b^2)x^2+a^4b^4-1}{a^2b^2}}{a^2b^2\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x+\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{(a^2+b^2)(1-a^2b^2)x^2+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)\left(x+\dfrac{1}{b}\right)\left(x-\dfrac{1}{b}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)x^2+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)\left(x+\dfrac{1}{b}\right)\left(x-\dfrac{1}{b}\right)}$$

になります。ここで、

$$\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)x^2+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)\left(x+\dfrac{1}{b}\right)\left(x-\dfrac{1}{b}\right)}=\frac{A}{x+\dfrac{1}{a}}+\frac{B}{x-\dfrac{1}{a}}+\frac{C}{x+\dfrac{1}{b}}+\frac{D}{x-\dfrac{1}{b}}$$

と置きます。A を求める為、両辺に $x+\dfrac{1}{a}$ を掛け、$x=-\dfrac{1}{a}$ と置きますと、

$$A=\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\right)\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)\dfrac{1}{a^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\dfrac{-2}{a}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)}=\frac{\dfrac{1-a^2b^2-b^4+\dfrac{b^2}{a^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\dfrac{-2}{a}\cdot\left(\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{-a^2b^2-b^4+\dfrac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{a^4b^4}}{\dfrac{-2(-a^2+b^2)}{a^3b^2}}=\frac{\dfrac{-a^2b^2-b^4+\dfrac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{a^4b^4}}{\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^3b^2}}$$

$$=\frac{-a^2b^2-b^4+\dfrac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{a^4b^4}\cdot\frac{a^3b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{-a^2b^2-b^4+\dfrac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{2ab^2(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{-a^4b^2-a^2b^4+b^2+a^6b^4}{2a^3b^2(a^2-b^2)}=\frac{-a^4-a^2b^2+1+a^6b^2}{2a^3(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{a^2(-a^2+a^4b^2-b^2)+1}{2a^3(a^2-b^2)}$$

になります。B を求める為、両辺に$x-\frac{1}{a}$を掛け、$x=\frac{1}{a}$と置きますと、

$$B=\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)\frac{1}{a^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{\dfrac{1-a^2b^2-b^4+\frac{b^2}{a^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{1-a^2b^2-b^4+\frac{b^2}{a^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)}=\frac{\dfrac{-a^2b^2-b^4+\frac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{a^4b^4}}{\dfrac{2(-a^2+b^2)}{a^3b^2}}$$

$$=\frac{-a^2b^2-b^4+\frac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{a^4b^4}\cdot\frac{a^3b^2}{2(-a^2+b^2)}=\frac{-a^2b^2-b^4+\frac{b^2}{a^2}+a^4b^4}{2ab^2(-a^2+b^2)}$$

$$=\frac{-a^4b^2-a^2b^4+b^2+a^6b^4}{2a^3b^2(-a^2+b^2)}=\frac{-a^4-a^2b^2+1+a^6b^2}{2a^3(-a^2+b^2)}$$

$$=\frac{a^2(-a^2+a^4b^2-b^2)+1}{2a^3(-a^2+b^2)}$$

になります。C を求める為、両辺に$x+\frac{1}{b}$を掛け、$x=-\frac{1}{b}$と置きますと、

$$C=\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)\frac{1}{b^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{b}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{\dfrac{\frac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+1+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{-2}{b}}$$

$$=\frac{\dfrac{\frac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{a^4b^4}}{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\cdot\frac{-2}{b}}=\frac{\dfrac{\frac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{a^4b^4}}{\dfrac{-2(a^2-b^2)}{a^2b^3}}$$

$$=\frac{\frac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{a^4b^4}\cdot\frac{a^2b^3}{-2(a^2-b^2)}=\frac{\frac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{-2a^2b(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{a^2-a^4b^2-a^2b^4+a^4b^6}{-2a^2b^3(a^2-b^2)}=\frac{1-a^2b^2-b^4+a^2b^6}{-2b^3(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{b^2(-a^2+a^2b^4-b^2)+1}{2b^3(-a^2+b^2)}$$

になります。D を求める為、両辺に$x-\frac{1}{b}$を掛け、$x=\frac{1}{b}$と置きますと、

$$D=\frac{\dfrac{(a^2-a^4b^2-a^2b^4+b^2)\dfrac{1}{b^2}+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}\right)}=\frac{\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+1+a^4b^4-1}{a^4b^4}}{\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\cdot\dfrac{2}{b}}$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{a^4b^4}}{\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right)\cdot\dfrac{2}{b}}=\frac{\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{a^4b^4}}{\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2b^3}}$$

$$=\frac{\dfrac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{a^4b^4}\cdot\frac{a^2b^3}{2(a^2-b^2)}=\frac{\dfrac{a^2}{b^2}-a^4-a^2b^2+a^4b^4}{2a^2b(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{a^2-a^4b^2-a^2b^4+a^4b^6}{2a^2b^3(a^2-b^2)}=\frac{1-a^2b^2-b^4+a^2b^6}{2b^3(a^2-b^2)}$$

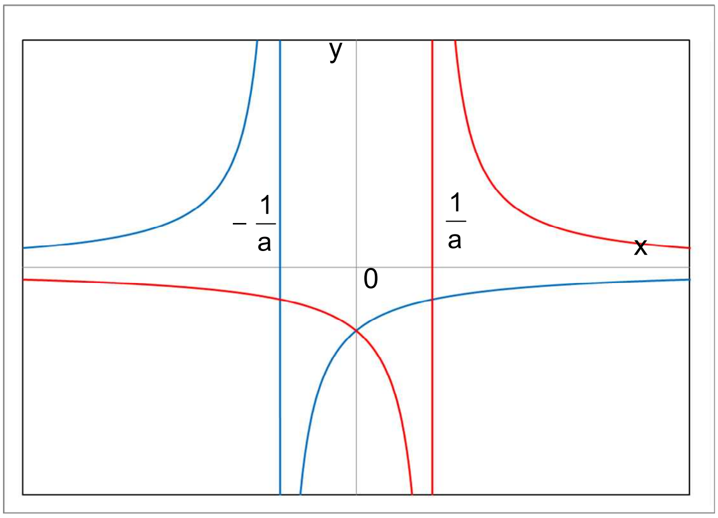
$$=\frac{b^2(-a^2+a^2b^4-b^2)+1}{2b^3(a^2-b^2)}$$

になります。⑧式は、

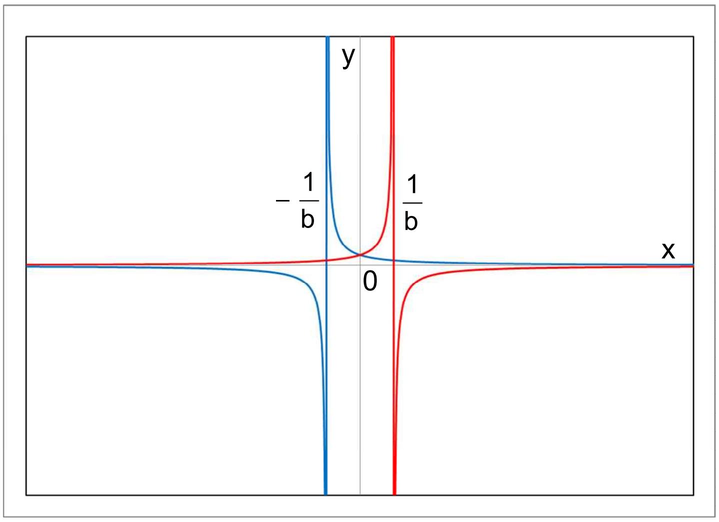
$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{a^2x^2-1}\bullet\frac{x^2-b^2}{b^2x^2-1}=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{\dfrac{a^2(-a^2+a^4b^2-b^2)+1}{2a^3(a^2-b^2)}}{x+\dfrac{1}{a}}+\frac{\dfrac{a^2(-a^2+a^4b^2-b^2)+1}{2a^3(-a^2+b^2)}}{x-\dfrac{1}{a}}$$

$$+\frac{\dfrac{b^2(-a^2+a^2b^4-b^2)+1}{2b^3(-a^2+b^2)}}{x+\dfrac{1}{b}}+\frac{\dfrac{b^2(-a^2+a^2b^4-b^2)+1}{2b^3(a^2-b^2)}}{x-\dfrac{1}{b}}$$

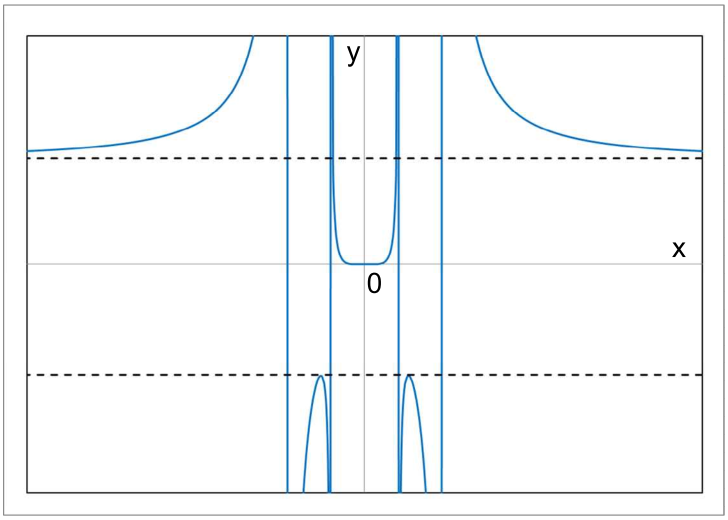
と部分分数に分解されました。下図は、右辺第２項と第３項のグラフです。



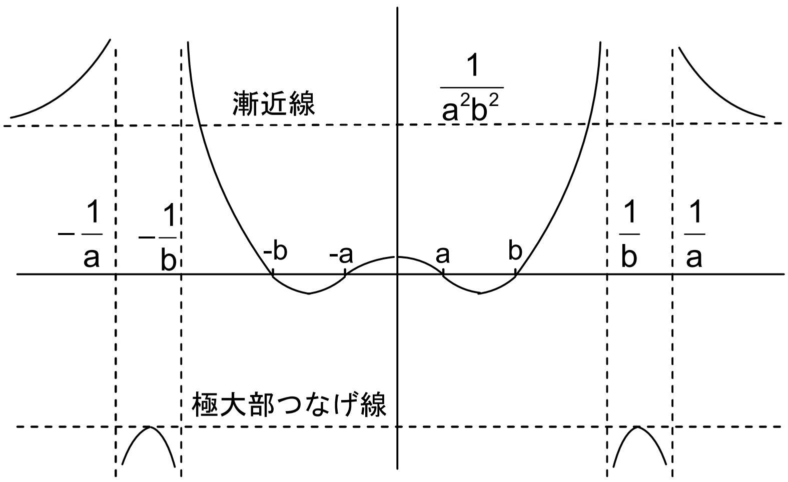
下図は、右辺第４項と第５項のグラフです。



第１項から第５項までを加えますと下のグラフになります。



分かり易くしたグラフは下図です。



　この分数関数は $\frac{1}{a^2b^2}$ を横漸近線としています。元関数をダブルで使うことで漸近線の位置はぐっと上昇します。例えば、

表 2

a	b	⑥式漸近線
0.2	0.6	69.44
0.3	0.6	30.9
0.4	0.6	17.4

となります。しかし、図中の「極大部つなげ線」が $-\frac{1}{a^2b^2}$ を満たしているかは分りません。4 次連立チェビシェフフィルターの章で考察致します。

　更に元関数ダブルに x を掛けることも考えられますし、元関数をトリプルで使うことも考えられます。

目次へ戻る