部分分数分解について（特に分母に多重因数がある場合）2021 年 5 月 28 日　目次へ戻る

2022.4.6　2024.3.3　2024.11.20　2024.11.22

2024.11.26　2024.12.4　2025.2.17　訂正

1、ヘビサイドの目隠し法

分数関数の分母が 1 次因数の積に分解出来、分子の次数が分母より小さい時、

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{A}{s+b}+\frac{B}{s+c}+\frac{C}{s+d}$$

と置き、部分分数分解を行います。分子の次数が分母と同じまたは大きい時は、分子÷分母を行い、分子の次数を分母より小さくしておきます。

A を求めるには、両辺に A の分母 $(s+b)$ を掛け、

$$\frac{(s+b)(ps^2+qs+r)}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{(s+b)A}{s+b}+\frac{(s+b)B}{s+c}+\frac{(s+b)C}{s+d}$$

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+c)(s+d)}=A+\frac{(s+b)B}{s+c}+\frac{(s+b)C}{s+d}$$

ーb を全ての s に代入しますと、

$$\frac{p(-b)^2+q(-b)+r}{a(-b+c)(-b+d)}=A+\frac{(-b+b)B}{-b+c}+\frac{(-b+b)C}{-b+d}$$

$$\frac{pb^2-qb+r}{a(c-b)(d-b)}=A$$

になります。右辺の第 2 項、第 3 項は分子が 0 になるため消滅し、左辺が A の値になります。B を求めるには、両辺に B の分母 $(s+c)$ を掛け、

$$\frac{(s+c)(ps^2+qs+r)}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{(s+c)A}{s+b}+\frac{(s+c)B}{s+c}+\frac{(s+c)C}{s+d}$$

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+b)(s+d)}=\frac{(s+c)A}{s+b}+B+\frac{(s+c)C}{s+d}$$

ーc を全ての s に代入しますと、

$$\frac{p(-c)^2+q(-c)+r}{a(-c+b)(-c+d)}=\frac{(-c+c)A}{-c+b}+B+\frac{(-c+c)C}{-c+d}$$

$$\frac{pc^2-qc+r}{a(b-c)(d-c)}=B$$

になります。A の時と同様に左辺が B の値になります。

C を求めるには、両辺に C の分母 $(s+d)$ を掛け、

$$\frac{(s+d)(ps^2+qs+r)}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{(s+d)A}{s+b}+\frac{(s+d)B}{s+c}+\frac{(s+d)C}{s+d}$$

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+b)(s+c)}=\frac{(s+d)A}{s+b}+\frac{(s+d)B}{s+c}+C$$

ーd を全ての s に代入しますと、

$$\frac{p(-d)^2+q(-d)+r}{a(-d+b)(-d+c)}=\frac{(-d+d)A}{-d+b}+\frac{(-d+d)B}{-d+c}+C$$

$$\frac{pd^2-qd+r}{a(b-d)(c-d)}=C$$

になります。部分分数分解後の分子 A、B、C の値を求めることが出来ました。この部分分数分解の方法を、ヘビサイドの目隠し法と呼びます。

2、分母に 2 重因数が在る場合の失敗例その 1（分子が 1 次式の時）

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+2)^2}$$

と置きました。ヘビサイドの目隠し法で行います。

A を求めるには、両辺に$(s+1)$を掛け、

$$\frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+1)A}{s+1}+\frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s+4}{(s+2)^2}=A+\frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

全ての s にー1 を代入しますと、

$$\frac{-1+4}{(-1+2)^2}=A+\frac{(-1+1)B}{(-1+2)^2}$$

$$3=A$$

になります。B を求めるには、両辺に$(s+2)^2$を掛け、

$$\frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+2)^2A}{s+1}+\frac{(s+2)^2B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s+4}{s+1}=\frac{(s+2)^2A}{s+1}+B$$

全ての s にー2 を代入しますと、

$$\frac{-2+4}{-2+1}=\frac{(-2+2)^2A}{-2+1}+B$$

$$-2=B$$

になります。元の式は、

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{(s+2)^2}$$

と部分分数分解されました。検算のため右辺を通分しますと、

$$\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(-2)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2} + \frac{-2s-2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{3s^2+12s+12-2s-2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{3s^2+10s+10}{(s+1)(s+2)^2}$$

になり元の式の左辺、$\dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}$ とは全く違う分数になってしまいました。

3、分母に２重因数が在る場合の失敗例その２（分子が２次式の時）

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

と置きました。ヘビサイドの目隠し法で行います。

A を求めるには、両辺に$(s+1)$を掛け、

$$\frac{(s+1)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+1)A}{s+1} + \frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+2)^2} = A + \frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

全ての s にー1 を代入しますと、

$$\frac{(-1)^2+2(-1)+4}{(-1+2)^2} = A + \frac{(-1+1)B}{(-1+2)^2}$$

$$3 = A$$

になります。B を求めるには、両辺に$(s+2)^2$を掛け、

$$\frac{(s+2)^2(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + \frac{(s+2)^2B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{s+1} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + B$$

全ての s にー2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+2(-2)+4}{-2+1} = \frac{(-2+2)^2A}{-2+1} + B$$

$$-4 = B$$

になります。元の式は、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{3}{s+1} + \frac{-4}{(s+2)^2}$$

と部分分数分解されました。検算のため右辺を通分しますと、

$$\frac{3}{s+1}+\frac{-4}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(-4)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{-4s-4}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3s^2+12s+12-4s-4}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3s^2+8s+8}{(s+1)(s+2)^2}$$

になり元の式の左辺、$\dfrac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$とは全く違う分数になってしまいました。

4、分母に2重因数が在る3と同じ問題での成功例

右辺で分母が2重因数の場合、分子の正しい置き方は、sの1次式Bs＋Cと置きます。分母より1次だけ次数を下げます。

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{(s+2)^2}$$

これはヘビサイドの目隠し法では解けませんので、通分する方法で解きます。

$$=\frac{A(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(Bs+C)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{A(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(Bs+C)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{As^2+4As+4A}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{Bs^2+Cs+Bs+C}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{(A+B)s^2+(4A+B+C)s+4A+C}{(s+1)(s+2)^2}$$

左辺の分子と比較して、

A＋B＝1・・・4－①

4A＋B＋C＝2・・・4－②

4A＋C＝4・・・4－③

です。4－①式から、

B＝1－A・・・4－④

です。4－③式から、

C＝4－4A・・・4－⑤

です。4－④式と4－⑤式を4－②式に代入し、

4A＋1－A＋4－4A＝2

1－A＋4＝2

1＋4－2＝A

3＝A・・・4－⑥

です。4－⑥式を 4－④式に代入し、

B＝1－3＝－2

です。4－⑥式を 4－⑤式に代入し、

C＝4－4×3＝－8

です。したがって、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{-2s-8}{(s+2)^2}\quad\cdot\cdot\cdot 4-⑦$$

と部分分数分解されました。検算のため右辺を通分しますと、

$$\frac{3}{s+1}+\frac{-2s-8}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(-2s-8)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{-2s^2-8s-2s-8}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3s^2+12s+12-2s^2-8s-2s-8}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

になり 4－⑦式の左辺と同じです。部分分数分解は成功しました。

5、分母に 2 重因数のある場合の右辺の正しい置き方

4－⑦式の右辺第 2 項に次の様な加工を行い、項を 2 つに分けますと、

$$\frac{-2s-8}{(s+2)^2}=\frac{-2s-4-4}{(s+2)^2}$$

$$=\frac{-2(s+2)-4}{(s+2)^2}$$

$$=\frac{-2(s+2)}{(s+2)^2}+\frac{-4}{(s+1)^2}$$

$$=\frac{-2}{s+2}+\frac{-4}{(s+2)^2}$$

になり分子は全て 0 次の定数になります。この結果を使いますと初めに置いた式、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{(s+2)^2}$$

の右辺第 2 項を、

$$=\frac{A}{s+1}+\frac{B(s+2)+C-2B}{(s+2)^2}$$

の様に2つに分け、

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B(s+2)}{(s+2)^2} + \frac{C-2B}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C-2B}{(s+2)^2}$$

と置くことが出来ます。B も C も未知数なので、C−2B を改めて C と置けば、

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \quad \cdots 5-①$$

になります。これが分母に 2 重因数が在る場合、部分分数分解後の分子を全て 0 次の定数にする正しい置き方になります。3 重因数以上でも同じ考え方です。べきが 1 になるまで因数を並べます。

6、5ー①式の解き方

通常左辺分母に多重因数がある場合、ヘビサイドの目隠し法だけで解くことが出来ず、微分を使う方法が一般的です。ここでご紹介する方法は、「参考文献」の「ラプラス変換入門　プログラム学習による」コロナ社（絶版）に載っている方法です。ヘビサイドの目隠し法と移項を併用し、微分を使いません。5ー①式、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

の A、B、C を求めます。

ヘビサイドの目隠し法で A を求めます。5ー①式両辺に$(s+1)$を掛け、

$$\frac{(s+1)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+1)A}{s+1} + \frac{(s+1)B}{s+2} + \frac{(s+1)C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+2)^2} = A + \frac{(s+1)B}{s+2} + \frac{(s+1)C}{(s+2)^2}$$

全ての s にー1 を代入しますと、

$$\frac{(-1)^2+2(-1)+4}{(-1+2)^2} = A + \frac{(-1+1)B}{-1+2} + \frac{(-1+1)C}{(-1+2)^2}$$

$$\frac{1-2+4}{1} = A + 0 + 0$$

$$3 = A$$

になります。

ヘビサイドの目隠し法で C を求めます。C を求めるには、5ー①式両辺に$(s+2)^2$を掛け、

$$\frac{(s+2)^2(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + \frac{(s+2)^2B}{s+2} + \frac{(s+2)^2C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{s+1}=\frac{(s+2)^2A}{s+1}+(s+2)B+C$$

全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+2(-2)+4}{-2+1}=\frac{(-2+2)^2A}{-2+1}+(-2+2)B+C$$

$$\frac{4-4+4}{-1}=0+0+C$$

$$-4=C$$

になります。

B を求める為、5－①式両辺に$(s+2)$を掛けますと、

$$\frac{(s+2)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+2)A}{s+1}+\frac{(s+2)B}{s+2}+\frac{(s+2)C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B+\frac{C}{s+2} \quad \cdots\cdots 6－①$$

になります。左辺と右辺第 3 項の分母に$(s+2)$が残っています。全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+2(-2)+4}{(-2+1)(-2+2)}=0+B+\frac{C}{-2+2}$$

になります。左辺分母と右辺第 3 項の分母が 0 になり無効です。B の求め方にテクニックが必要です。移項する方法です。

6－①式に、ヘビサイドの目隠し法で求めた C の値を入れますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B-\frac{4}{s+2}$$

になります。C の値を入れた右辺第 3 項を移項しますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}+\frac{4}{s+2}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B$$

になります。左辺を通分し、分子を計算しますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}+\frac{(s+1)4}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B$$

$$\frac{s^2+2s+4+4s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B$$

$$\frac{s^2+6s+8}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B$$

になります。左辺分子は因数分解出来、

$$\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B \quad \cdots\cdots 6－②$$

になります。分子に出てきた$(s+2)$で左辺を約分しますと、

$$\frac{s+4}{s+1}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B$$

になります。ここで全ての s にー2 を代入しますと、

$$\frac{-2+4}{-2+1}=\frac{(-2+2)A}{-2+1}+B$$

$$\frac{2}{-1}=0+B$$

$$-2=B$$

になり上手く行きます。B がー2 と分りました。左辺を$(s+2)$で約分した後、全ての s にー2 を代入していますので、分母が 0 になる項が生じません。A、C、B の順に求めて行くのがテクニックです。5ー①式は部分分数分解され、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}-\frac{2}{s+2}-\frac{4}{(s+2)^2}$$

になりました。検算を行いますと、

$$\begin{aligned}\frac{3}{s+1}-\frac{2}{s+2}-\frac{4}{(s+2)^2}&=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}-\frac{(s+1)(s+2)2}{(s+1)(s+2)^2}-\frac{(s+1)4}{(s+1)(s+2)^2}\\&=\frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}-\frac{(s^2+3s+2)2}{(s+1)(s+2)^2}-\frac{(s+1)4}{(s+1)(s+2)^2}\\&=\frac{3s^2+12s+12-2s^2-6s-4-4s-4}{(s+1)(s+2)^2}\\&=\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}\end{aligned}$$

になり、合っています。

6ー②式左辺分子に都合よく$(s+2)$が出て来る理由は、次の通りです。

5ー①式を再掲しますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$$

です。A と C は既に求まり、B を求める時です。両辺に$(s+2)$を掛けますと、

$$\frac{(s+2)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+2)A}{s+1}+\frac{(s+2)B}{s+2}+\frac{(s+2)C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B+\frac{C}{s+2}$$

になります。右辺第 3 項を移項しますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}-\frac{C}{s+2}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B$$

になります。ここで左辺、右辺共に通分しますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}-\frac{(s+1)C}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)^2A}{(s+1)(s+2)}+\frac{(s+1)(s+2)B}{(s+1)(s+2)}$$

になります。この式の左辺はCの数値が入らないだけで、6ー②式左辺と同じです。左辺右辺とも分子の計算を行いますと、

$$\frac{s^2+2s+4-Cs-C}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)\{(s+2)A+(s+1)B\}}{(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{s^2+(2-C)s+(4-C)}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)\{(A+B)s+(2A+B)\}}{(s+1)(s+2)}$$

になります。この式は、分母が同じですから分子も同じです。左辺分子が右辺分子の様に因数分解出来ることを表しています。Cの値は分っておりますので、左辺分子はたすき掛けによる因数分解が出来、右辺分子の様に $(s+2)$ が出て来ます。これが 6ー②式左辺分子に都合よく $(s+2)$ が出て来る理由です。

7、3 重因数の場合

3 重因数の有る分数の部分分数分解の例です。A、D、C、B の順に求めて行くのがテクニックです。

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+3)^2}+\frac{D}{(s+3)^3} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot 7ー①$$

と置きます。

ヘビサイドの目隠し法で A を求めます。7ー①式両辺に $(s+2)$ を掛けますと、

$$\frac{(s+2)(s^2+3s-2)}{(s+2)(s+3)^3}=\frac{(s+2)A}{s+2}+\frac{(s+2)B}{s+3}+\frac{(s+2)C}{(s+3)^2}+\frac{(s+2)D}{(s+3)^3}$$

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+3)^3}=A+\frac{(s+2)B}{s+3}+\frac{(s+2)C}{(s+3)^2}+\frac{(s+2)D}{(s+3)^3}$$

になります。全ての s にー2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+3(-2)-2}{(-2+3)^3}=A+\frac{(-2+2)B}{-2+3}+\frac{(-2+2)C}{(-2+3)^2}+\frac{(-2+2)D}{(-2+3)^3}$$

$$\frac{4-6-2}{1}=A+0+0+0$$

$$-4=A$$

になります。

ヘビサイドの目隠し法で D を求めます。7ー①式両辺に $(s+3)^3$ を掛けますと、

$$\frac{(s+3)^3(s^2+3s-2)}{(s+2)(s+3)^3}=\frac{(s+3)^3A}{s+2}+\frac{(s+3)^3B}{s+3}+\frac{(s+3)^3C}{(s+3)^2}+\frac{(s+3)^3D}{(s+3)^3}$$

$$\frac{s^2+3s-2}{s+2}=\frac{(s+3)^3A}{s+2}+(s+3)^2B+(s+3)C+D$$

になります。全てのｓに－3 を代入しますと、

$$\frac{(-3)^2+3(-3)-2}{-3+2}=\frac{(-3+3)^3A}{-3+2}+(-3+3)^2B+(-3+3)C+D$$

$$\frac{9-9-2}{-1}=0+0+0+D$$

$$2=D$$

になりＤが決定します。

Ｃを求める為、7－①式両辺に$(s+3)^2$を掛けますと、

$$\frac{(s+3)^2(s^2+3s-2)}{(s+2)(s+3)^3}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+\frac{(s+3)^2B}{s+3}+\frac{(s+3)^2C}{(s+3)^2}+\frac{(s+3)^2D}{(s+3)^3}$$

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C+\frac{D}{s+3}$$

になり、左辺の分母と右辺第 4 項の分母に$(s+3)$が残りますので、6 の例と同様に右辺第 4 項にＤの値を代入し移項します。

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C+\frac{2}{s+3}$$

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)}-\frac{2}{s+3}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C$$

左辺の通分と分子の計算を行います。

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)}-\frac{(s+2)2}{(s+2)(s+3)}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C$$

$$\frac{s^2+3s-2-2s-4}{(s+2)(s+3)}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C$$

$$\frac{s^2+s-6}{(s+2)(s+3)}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C$$

左辺分子は因数分解出来、

$$\frac{(s+3)(s-2)}{(s+2)(s+3)}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C$$

になります。分子に出てきた$(s+3)$で左辺を約分しますと、

$$\frac{s-2}{s+2}=\frac{(s+3)^2A}{s+2}+(s+3)B+C$$

になります。ここで全てのｓに－3 を代入しますと、

$$\frac{-3-2}{-3+2}=\frac{(-3+3)^2A}{-3+2}+(-3+3)B+C$$

$$\frac{-5}{-1} = 0 + 0 + C$$

$$5 = C$$

になり、C が 5 と分りました。

B を求める為、7ー①式両辺に $(s+3)$ を掛けますと、

$$\frac{(s+3)(s^2+3s-2)}{(s+2)(s+3)^3} = \frac{(s+3)A}{s+2} + \frac{(s+3)B}{s+3} + \frac{(s+3)C}{(s+3)^2} + \frac{(s+3)D}{(s+3)^3}$$

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{(s+3)^2}$$

になり、左辺の分母と右辺第 3 項及び第 4 項の分母に $(s+3)$ が残りますので、6 の例と同様に、右辺第 3 項に C の値、右辺第 4 項に D の値を代入し移項します。

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B + \frac{5}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2}$$

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^2} - \frac{5}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B$$

左辺の通分と分子の計算を行います。

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^2} - \frac{(s+2)(s+3)5}{(s+2)(s+3)^2} - \frac{(s+2)2}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B$$

$$\frac{s^2+3s-2-5s^2-25s-30-2s-4}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B$$

$$\frac{-4s^2-24s-36}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B$$

$$\frac{-4(s^2+6s+9)}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B$$

左辺分子括弧内は因数分解出来、

$$\frac{-4(s+3)^2}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B \quad ・・・・7ー②$$

になります。分子に出てきた $(s+3)^2$ で左辺を約分しますと、

$$\frac{-4}{s+2} = \frac{(s+3)A}{s+2} + B$$

になります。ここで全ての s にー3 を代入しますと、

$$\frac{-4}{-3+2} = \frac{(-3+3)A}{-3+2} + B$$

$$\frac{-4}{-1} = 0 + B$$

$$4 = B$$

になり、B が 4 と分りました。7ー①式は、

$$\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^3}=\frac{-4}{s+2}+\frac{4}{s+3}+\frac{5}{(s+3)^2}+\frac{2}{(s+3)^3}$$

と部分分数分解されました。検算を行いますと、

$$\frac{-4}{s+2}+\frac{4}{s+3}+\frac{5}{(s+3)^2}+\frac{2}{(s+3)^3}=\frac{(s+3)^3(-4)}{(s+2)(s+3)^3}+\frac{(s+2)(s+3)^2 4}{(s+2)(s+3)^3}$$

$$+\frac{(s+2)(s+3)5}{(s+2)(s+3)^3}+\frac{(s+2)2}{(s+2)(s+3)^3}$$

$$=\frac{-4s^3-36s^2-108s-108+4s^3+32s^2+84s+72+5s^2+25s+30+2s+4}{(s+2)(s+3)^3}$$

$$=\frac{s^2+3s-2}{(s+2)(s+3)^3}$$

になり、合っています。

7ー②式左辺分子に都合よく $(s+3)^2$ が出て来る理由は、6 の後半に書いたことと同じ原理です。

8、5ー①式の別の解き方その 2

B について次のような解き方も有力です。この方法も微分を使いません。

5ー①式に、計算で求めた A と C の値を入れますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{-4}{(s+2)^2}$$

です。部分分数分解は恒等式ですから、分母を 0 にする値でなければ s の値は自由です。s に 0 を代入してみますと、

$$\frac{0^2+2\times 0+4}{(0+1)(0+2)^2}=\frac{3}{0+1}+\frac{B}{0+2}+\frac{-4}{(0+2)^2}$$

$$\frac{4}{4}=\frac{3}{1}+\frac{B}{2}+\frac{-4}{4}$$

$$1=3+\frac{B}{2}-1$$

という方程式になりました。これを解けば、

$$B=-2$$

となります。ヘビサイトの目隠し法が使えない項が 1 つだけの、左辺分母に 2 重因数がある場合に使えます。それ以上の多重因数がある場合は、未知数が多くなりすぎてだめです。

目次へ戻る