アドミッタンス(admittance)について　　　　　２０１８年３月６日　　　　目次へ戻る

2023.12.4　2023.12.13　訂正

抵抗 R、コイル L、コンデンサーC で作られた並列回路には、R、L、C に同じ電圧が加わり、個々の R、L、C に別々の電流が流れます。

抵抗 R、コイル L、コンデンサーC で作られた直列回路には、R、L、C に同じ電流が流れ、個々の R、L、C に別々の電圧が生じます。

並列回路では電圧を与えると電流が求まる、コンダクタンス、サセプタンス、アドミッタンスを使うと計算が楽です。

直列回路では電流を与えると電圧が求まる、抵抗（レジスタンス）、リアクタンス、インピーダンスを使うと計算が楽です。

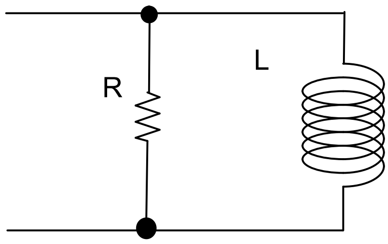
1、並列回路のアドミッタンスとインピーダンス

(1)アドミッタンス Y

並列回路のアドミッタンスは、Y＝G－jB です。G は抵抗の逆数でコンダクタンス、B はリアクタンスの逆数でサセプタンスです。さらに B＝B_L－B_C とおき、$B_L = \frac{1}{\omega L}$ を誘導性サセプタンス、$B_C = \omega C$ を容量性サセプタンスと呼びます。Y、G、B の単位はジーメンス[S]が使われます。

右図で、

$$G = \frac{1}{R} \quad B = \frac{1}{\omega L}$$



ですので、

$$Y = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$$

です。

複素数の絶対値は、「実数部の 2 乗＋虚数部の 2 乗」の平方根ですので、Y の絶対値は、

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{R^2\omega^2 L^2} + \frac{R^2}{R^2\omega^2 L^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 + R^2}{R^2\omega^2 L^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega LR}$$

となります。複素数の偏角 θ は、アークタンジェント「実数部」分の「虚数部」ですので、

$$\theta=\tan^{-1}\frac{B}{G}=\tan^{-1}\frac{-\dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R}}=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\omega L}\cdot\frac{R}{1}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right)=-\tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$$

となります。最後の部分、タンジェントは奇関数ですので tan(－x)＝－tan(x)です。

絶対値と偏角が出ましたので、アドミッタンス Y を極形式で表しますと、

$$Y=|Y|\cdot e^{j\theta}=\frac{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}{\omega LR}\cdot e^{j\theta}\qquad\qquad \theta=-\tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$$

になります。

(2)インピーダンス Z

今度は、この並列回路のインピーダンス Z を求めます。2 素子で出来た並列回路のインピーダンスは、それぞれのインピーダンスの「和分の積」です。上図の場合、片方は抵抗 R、もう一方はコイルのリアクタンス X＝jωL です。Z、R、X の単位はオーム[Ω]です。

$$Z=\frac{R\cdot j\omega L}{R+j\omega L}=\frac{j\omega LR}{R+j\omega L}\cdot\frac{R-j\omega L}{R-j\omega L}=\frac{\omega^2L^2R}{R^2+\omega^2L^2}+j\frac{\omega LR^2}{R^2+\omega^2L^2}$$

となり実数部、虚数部に分かれました。複素数の絶対値は、「実数部の 2 乗＋虚数部の 2 乗」の平方根ですので、Z の絶対値は、

$$|Z|=\sqrt{\left(\frac{\omega^2L^2R}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2+\left(\frac{\omega LR^2}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\omega^4L^4R^2+\omega^2L^2R^4}{(R^2+\omega^2L^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\omega^2L^2R^2(\omega^2L^2+R^2)}{(R^2+\omega^2L^2)^2}}=\sqrt{\frac{\omega^2L^2R^2}{R^2+\omega^2L^2}}=\frac{\omega LR}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

です。複素数の偏角 θ は、アークタンジェント「実数部」分の「虚数部」ですので、

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\dfrac{\omega LR^2}{R^2+\omega^2L^2}}{\dfrac{\omega^2L^2R}{R^2+\omega^2L^2}}=\tan^{-1}\left(\frac{\omega LR^2}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R^2+\omega^2L^2}{\omega^2L^2R}\right)=\tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$$

となります。絶対値と偏角が出ましたので、インピーダンス Z を極形式で表しますと、

$$Z = |Z| \cdot e^{j\theta} = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{j\theta} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$$

になります。

(3) 並列回路でのアドミッタンスとインピーダンスの比較

並列回路でのアドミッタンスとインピーダンスを比較しますと、

①、アドミッタンスの絶対値は、インピーダンスの絶対値の逆数です。

②、アドミッタンスの偏角は、インピーダンス偏角の逆回転、同角度になります。

偏角は逆回転で同じ角度ですから、第 1 象限のインピーダンスは第 4 象限のアドミッタンスになり、第 4 象限のインピーダンスは第 1 象限のアドミッタンスになります。元のインピーダンスが複素平面右半面であれば、アドミッタンスも複素平面右半面です。

2、直列回路のインピーダンスとアドミッタンス

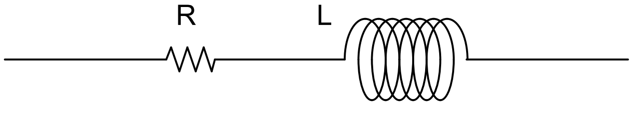
(1)インピーダンス Z

直列回路のインピーダンスは、Z＝R＋jX です。R は抵抗でレジスタンス、X はリアクタンスです。さらに $X = X_L - X_C$ とおき、$X_L = \omega L$ を誘導性リアクタンス、$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ を容量性リアクタンスと呼びます。Z、R、X_L、X_C の単位はオーム[Ω]が使われます。

右図でコイルのリアクタンスは ωL です。

インピーダンス Z は、

$$Z = R + j\omega L$$

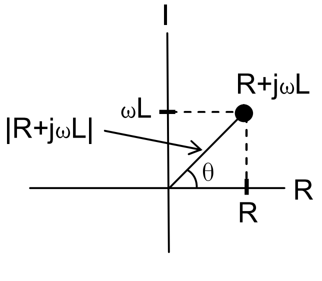


です。Z の絶対値は、

$$|Z| = |R + j\omega L| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

です。正の実軸から反時計式に測った偏角 θ は、

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$



になります。絶対値と偏角が出ましたので、インピーダンス Z を極形式で表しますと、

$$Z = |Z| \cdot e^{j\theta} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j\theta} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}$$

になります。

(2) アドミッタンス Y

　次にインピーダンスの逆数、アドミッタンス Y を求めますと、

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{R + j\omega L} \bullet \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

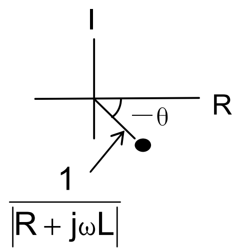
になります。Y の絶対値は、

$$|Y| = \left| \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right| = \sqrt{\left\{ \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{\{R^2 + (\omega L)^2\}^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

となります。これがアドミッタンス Y の絶対値です。インピーダンス Z の絶対値の逆数になります。アドミッタンス Y の偏角 θ は、

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dfrac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}{\dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2}} = \tan^{-1} \frac{-\omega L}{R} = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$



になります。偏角はインピーダンス偏角の逆回転、同角度になります。上図の通りです。

　絶対値と偏角が出ましたので、アドミッタンス Y を極形式で表しますと、

$$Y = |Y| \cdot e^{j\theta} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j\theta} \qquad \theta = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

になります。

(3) 直列回路でのインピーダンスとアドミッタンスの比較

　直列回路でのインピーダンスとアドミッタンスを比較しますと、

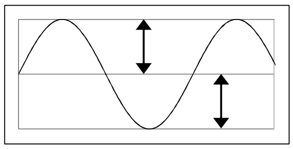
①、インピーダンスの絶対値は、アドミッタンスの絶対値の逆数です。
②、インピーダンスの偏角は、アドミッタンスの偏角の逆回転、同角度になります。

偏角は逆回転で同じ角度ですから、第 1 象限のインピーダンスは第 4 象限のアドミッタンスになり、第 4 象限のインピーダンスは第 1 象限のアドミッタンスになります。元のインピーダンスが複素平面右半面であれば、アドミッタンスも複素平面右半面です。

直列回路でのインピーダンスとアドミッタンスの絶対値および偏角の関係は、並列回路と全く同じです。逆数であり逆回転です。

3、ラプラスの世界でのアドミッタンス Y(s)

(1) s が虚軸上の値の時



「抵抗、コイル、コンデンサーで作られた受動回路の、ラプラスの世界でのアドミッタンスを Y(s)とします。そこに最大値 V の正弦波電圧、$e = V \cdot \sin\omega t = V \cdot \mathrm{Im}(e^{j\omega t})$ を加えた後、定常状態での電流 i を求めて下さい。」

受動回路とは内部に電源を持たない回路のことです。電圧が正弦波交流ですから、交流理論になります。交流理論では s＝jω を行いますから、アドミッタンスは Y(jω)となります。

$e^{j\omega t}$ は複素平面を回転する複素数です。$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ です。遠近感を無くすため片目で上から複素平面を見れば、実軸上を振動しています。実数部の大きさが $\cos\omega t$ になり、$\mathrm{Re}(e^{j\omega t}) = \cos\omega t$ です。同様に横から複素平面を見れば、虚軸上を振動しています。虚数部の大きさが $\sin\omega t$ になり、$\mathrm{Im}(e^{j\omega t}) = \sin\omega t$ です。

Re と Im はそれぞれ複素数の実数部、虚数部を表します。

$e^{j\omega t}$ は複素数ですから、複素数をかければ、その絶対値はかける複素数の絶対値倍され、その偏角にかける複素数の偏角が足されます。$e^{j\omega t}$ に対して計算してから、Re()で実数部を取り出せば $\cos\omega t$ の計算が出来ています。また、Im()で虚数部を取り出せば $\sin\omega t$ の計算が出来ています。

$$
\begin{aligned}
i &= e \cdot Y(j\omega) \\
&= V \cdot \mathrm{Im}(e^{j\omega t}) \cdot |Y(j\omega)| \cdot e^{j\theta} \\
&= V \cdot |Y(j\omega)| \cdot \mathrm{Im}(e^{j\omega t} \cdot e^{j\theta}) \\
&= V \cdot |Y(j\omega)| \cdot \mathrm{Im}(e^{j\omega t + j\theta}) \\
&= I \sin(\omega t + \theta)
\end{aligned}
$$

ただし、$I = V \cdot |Y(j\omega)|$

$$|Y(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\, Y(j\omega) + \mathrm{Im}^2\, Y(j\omega)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\, Y(j\omega)}{\mathrm{Re}\, Y(j\omega)}$$

が答えです。定常状態で最大値 I の電流が流れます。θ はアドミッタンスの偏角です。アドミッタンスの偏角はインピーダンスとは逆回転です。

θ がーの場合は誘導性ですから、電流は電圧より遅れ i＝Isin(ωtーθ)となります。

θ が＋の場合は容量性ですから、電流は電圧より進み i＝Isin(ωt＋θ)となります。

誘導性の時、瞬時電力 p を求めますと、

$$\begin{aligned}
p = e\,i &= V\sin\omega t\cdot I\sin(\omega t-\theta)\\
&= V\cdot I\cdot \sin\omega t\cdot \sin(\omega t-\theta)\\
&= V\cdot I\cdot \sin\omega t(\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\sin\theta)\\
&= V\cdot I\cdot (\sin^2\omega t\cos\theta - \sin\omega t\cos\omega t\sin\theta)\\
&= V\cdot I\cdot \frac{1}{2}(2\sin^2\omega t\cos\theta - 2\sin\omega t\cos\omega t\sin\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot \{(1-\cos 2\omega t)\cos\theta - \sin 2\omega t\sin\theta\}\\
&= \frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot (\cos\theta - \cos 2\omega t\cos\theta - \sin 2\omega t\sin\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot \{\cos\theta - (\cos 2\omega t\cos\theta + \sin 2\omega t\sin\theta)\}\\
&= \frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot \{\cos\theta - \cos(2\omega t-\theta)\}
\end{aligned}$$

になります。加法定理と、$2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta$ 、$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ の公式を使いました。電力は瞬時値 p で表すより、瞬時電力の 1 周期（t 秒）分の平均をとり、平均電力 P で表す方が普通です。P は有効電力、消費電力、単に電力とも呼びます。角周波数 $\omega = 2\pi f$ で、f は周波数ですから、t は $\frac{1}{f}$ 秒になります。また $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ですから、$t = \frac{2\pi}{\omega}$ になりますので、

$$P = \frac{1}{t}\int_0^t p\,dt$$ p の 0 から t までの面積を求め、t で割れば平均が出ます。

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot \{\cos\theta - \cos(2\omega t-\theta)\}dt$$

$\frac{1}{2}\cdot V\cdot I$は定数なので外に出し、

$$= \frac{V\cdot I\cdot\omega}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\{\cos\theta - \cos(2\omega t - \theta)\}dt$$

$$= \frac{V\cdot I\cdot\omega}{4\pi}\left\{\cos\theta\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}dt - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(2\omega t - \theta)dt\right\}$$

$$= \frac{V\cdot I\cdot\omega}{4\pi}\left\{\cos\theta\cdot\left[t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} - \frac{1}{2\omega}\left[\sin(2\omega t - \theta)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\right\}$$

$$= \frac{V\cdot I\cdot\omega}{4\pi}\left[\cos\theta\cdot\frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega}\{\sin(4\pi - \theta) - \sin(-\theta\}\right]$$

$$= \frac{V\cdot I\cdot\omega}{4\pi}\left[\cos\theta\cdot\frac{2\pi}{\omega} - \cancel{\frac{1}{2\omega}\{-\sin\theta + \sin\theta\}}\right]$$

$$= \frac{V\cdot I\cdot\omega}{4\pi}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\cdot\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot\cos\theta$$

となります。1 周期分の平均をとりますと、電圧電流間の位相差が原因で、電源と回路の間を倍の角周波数で行き来している無効電力の項は消滅します。

V も I も最大値です。正弦波交流の実効値は、V も I も最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ですから、

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot V\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot I\cdot\cos\theta$$
$$= V_{RMS}\cdot I_{RMS}\cdot\cos\theta$$

と変形出来ます。平均電力は、電圧の実効値 V_{RMS} × 電流の実効値 I_{RMS} × 力率 cosθ になります。力率は、交流理論でのアドミッタンス Y(jω)の偏角 θ の cos です。cos は偶関数ですから、アドミッタンスの偏角で力率を求めても、インピーダンスの偏角で力率を求めても同じになります。また、誘導性でも容量性でも θ の絶対値が同じなら、cos は同じ値になります。

受動回路の力率 cosθ は、1 から 0 までです。受動回路は電力を消費しますが、電力を供給しません。ですから力率がマイナスになることはありません。マイナスになりますと、受動回路から電源へ電力を供給していることになり、間違っています。受動回路のアドミッタンス Y(jω)の偏角は、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となります。

Y(jω)の偏角θは$-\dfrac{\pi}{2}$で$\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$になり、力率は0になります。コンダクタンス成分ReY(jω)が0で、サセプタンス成分ImY(jω)が誘導性の場合です。

Y(jω)の偏角θは$\dfrac{\pi}{2}$で$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$になり、力率0になります。コンダクタンス成分ReY(jω)が0で、サセプタンス成分ImY(jω)が容量性の場合です。

共にコンダクタンスが無く、サセプタンスだけの回路の場合です。コンダクタンスがある場合の力率は0になりません。必ず電力を消費します。

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$で、

$$\mathrm{Re}\,Y(j\omega)=\left|Y(j\omega)\right|\cos\theta\geqq 0$$

になります。Y(s)の虚軸上の値である、Y(jω)の実部ReY(jω)は負になりません。

(2) sが複素平面右半面上の値の時

「抵抗、コイル、コンデンサーで作られた受動回路の、ラプラスの世界でのアドミッタンスをY(s)とします。そこに、初期最大値Vで振幅が拡大する正弦波電圧$e=V\cdot e^{\sigma t}\sin\omega t$を加えた時、Y(s)に流れる電流iをラプラス変換を使って求めて下さい。」

L( )をカッコ内関数のラプラス変換、L^{-1}( )をカッコ内関数のラプラス逆変換とします。振幅が拡大する正弦波電圧のラプラス変換は、

$$L(V\cdot e^{\sigma t}\sin\omega t)=\frac{V\cdot\omega}{(s-\sigma)^2-\omega^2}$$
$$=\frac{V\cdot\omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$

ですので電流iは、

$$i=Y(s)\bullet\frac{V\cdot\omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}=\frac{A}{s-\sigma-j\omega}+\frac{B}{s-\sigma+j\omega}$$

となります。留数A、Bを求めますと、

$$A=\left[(s-\sigma-j\omega)\bullet\frac{Y(s)\cdot V\cdot\omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}\right]_{s=\sigma+j\omega}$$

$$=\frac{Y(\sigma+j\omega)\cdot V\cdot\omega}{\sigma+j\omega-\sigma+j\omega}=\frac{Y(\sigma+j\omega)\cdot V\cdot\omega}{2j\omega}=\frac{Y(\sigma+j\omega)\cdot V}{2j}$$

$$B=\left[(s-\sigma+j\omega)\bullet\frac{Y(s)\cdot V\cdot\omega}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}\right]_{s=\sigma-j\omega}$$

$$=\frac{Y(\sigma-j\omega)\cdot V\cdot\omega}{\sigma-j\omega-\sigma-j\omega}=\frac{Y(\sigma-j\omega)\cdot V\cdot\omega}{-2j\omega}=\frac{Y(\sigma-j\omega)\cdot V}{-2j}$$

です。

$$\frac{A}{s-\sigma-j\omega}+\frac{B}{s-\sigma+j\omega}=\frac{A}{s-(\sigma+j\omega)}+\frac{B}{s-(\sigma-j\omega)}$$

ですので、ラプラス逆変換をしますと、

$$L^{-1}\left(\frac{\frac{Y(\sigma+j\omega)\cdot V}{2j}}{s-(\sigma+j\omega)}+\frac{\frac{Y(\sigma-j\omega)\cdot V}{-2j}}{s-(\sigma-j\omega)}\right)$$

$$=Y(\sigma+j\omega)\cdot V\cdot\frac{1}{2j}e^{(\sigma+j\omega)t}+Y(\sigma-j\omega)\cdot V\cdot\frac{1}{-2j}e^{(\sigma-j\omega)t}$$

$$=V\cdot\left|Y(\sigma+j\omega)\right|e^{j\theta}\frac{1}{2j}e^{\sigma t+j\omega t}+V\cdot\left|Y(\sigma+j\omega)\right|e^{-j\theta}\frac{1}{-2j}e^{\sigma t-j\omega t}$$

$$=I\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t+j\omega t+j\theta}+I\cdot\frac{1}{-2j}e^{\sigma t-j\omega t-j\theta}$$

$$=I\cdot\frac{1}{2j}e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\theta)}+I\cdot\frac{1}{-2j}e^{\sigma t}e^{-j(\omega t+\theta)}$$

$$=I\cdot e^{\sigma t}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\theta)}-e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j}$$

$$=I\cdot e^{\sigma t}\sin(\omega t+\theta)$$

ただし、$I=V\cdot\left|Y(\sigma+j\omega)\right|$

$$\left|Y(\sigma+j\omega)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}^2\,Y(\sigma+j\omega)+\mathrm{Im}^2\,Y(\sigma+j\omega)}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\,Y(\sigma+j\omega)}{\mathrm{Re}\,Y(\sigma+j\omega)}$$

になります。ラプラスの世界のアドミッタンス Y(s)は、拡大する正弦波電圧が加わった時、s に σ＋jω を代入した Y(σ＋jω)になります。Y(σ＋jω)に流れる電流の大きさは、拡大する正弦波電圧に複素数 Y(σ＋jω)の絶対値を掛けた値になります。電圧の位相と電流の位相は、複素数 Y(σ＋jω)の偏角だけ違います。

　次に、

$$e = Ve^{\sigma} \sin \omega t$$

$$i = I \cdot e^{\sigma} \sin(\omega t - \theta)$$

として電力を求めます。V は電圧の初期最大値、I は電流の初期最大値です。σ（シグマ）＞0 としますので振幅が増大して行く正弦波です。θ は電圧と電流の位相差です。位相差は、負荷である受動回路 Y(σ＋jω)の偏角だけ違います。電圧基準ですので電流が遅れています。電圧が進んでいます。瞬時電力は、

$$\begin{aligned}
e\,i &= Ve^{\sigma t} \sin \omega t \cdot Ie^{\sigma t} \sin(\omega t - \theta) \\
&= V \cdot I \cdot e^{2\sigma t} \sin \omega t \sin(\omega t - \theta) \\
&= V \cdot I \cdot e^{2\sigma t} \sin \omega t(\sin \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \theta) \\
&= V \cdot I \cdot e^{2\sigma t}(\sin^2 \omega t \cos \theta - \sin \omega t \cos \omega t \sin \theta) \\
&= V \cdot I \cdot e^{2\sigma t} \cdot \frac{1}{2}(2 \sin^2 \omega t \cos \theta - 2 \sin \omega t \cos \omega t \sin \theta) \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t} \cdot \{(1 - \cos 2\omega t) \cos \theta - \sin 2\omega t \sin \theta\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t} \cdot \{\cos \theta - (\cos 2\omega t \cos \theta + \sin 2\omega t \sin \theta)\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t} \cdot \{\cos \theta - \cos(2\omega t - \theta)\}
\end{aligned}$$

になります。加法定理と、$2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$、$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ の公式を使いました。したがって、

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t}\{\cos \theta - \mathrm{Re}\, e^{j(2\omega t - \theta)}\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t}\{\cos \theta - \mathrm{Re}\,(e^{j2\omega t} e^{-j\theta})\}
\end{aligned}$$

となります。Re は複素数の実数部です。無限の過去からある時刻 t までの、回路に流れ込んだ電力量（電気エネルギー）を求めますと、

$$\int_{-\infty}^{t} vidt = \int_{-\infty}^{t} \cdot \frac{1}{2} V \cdot I \cdot e^{2\sigma t}\{\cos\theta - \mathrm{Re}\,(e^{j2\omega t}e^{-j\theta})\}dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}\{\cos\theta - \mathrm{Re}\,(e^{j2\omega t}e^{-j\theta})\}dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}\cos\theta - e^{2\sigma t}\,\mathrm{Re}\,(e^{j2\omega t}e^{-j\theta})dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \{\int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}\cos\theta dt - \int_{-\infty}^{t} \mathrm{Re}\,(e^{2\sigma t}e^{j2\omega t}e^{-j\theta})dt\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \left[\cos\theta \int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}dt - \int_{-\infty}^{t} \mathrm{Re}\,\{e^{2(\sigma+j\omega)t}e^{-j\theta}\}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \{\cos\theta \int_{-\infty}^{t} e^{2\sigma t}dt - \mathrm{Re}\,e^{-j\theta}\int_{-\infty}^{t} e^{2(\sigma+j\omega)t}dt\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \left\{\cos\theta \left[\frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma}\right]_{-\infty}^{t} - \mathrm{Re}\left(e^{-j\theta}\left[\frac{e^{2(\sigma+j\omega)t}}{2(\sigma+j\omega)}\right]_{-\infty}^{t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \left[\cos\theta \cdot \frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma} - \mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\,\frac{e^{2(\sigma+j\omega)t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \left[\cos\theta \cdot \frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma} - \mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\,\frac{e^{2\sigma t + j2\omega t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot \left[\cos\theta \cdot \frac{e^{2\sigma t}}{2\sigma} - \mathrm{Re}\left\{e^{-j\theta}\,\frac{e^{2\sigma t}e^{j2\omega t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t}\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma} - \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-j\theta}e^{j2\omega t}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot V \cdot I \cdot e^{2\sigma t}\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma} - \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j(2\omega t-\theta)}}{2(\sigma+j\omega)}\right\}\right]$$

$$\frac{1}{2(\sigma+j\omega)} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{\sigma+j\omega} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}e^{j\varphi}} = \frac{e^{-j\varphi}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}e^{j\varphi}e^{-j\varphi}} = \frac{e^{-j\varphi}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$ ですので、

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot e^{2\sigma t}\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-j\varphi}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}e^{j(2\omega t-\theta)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot e^{2\sigma t}\left[\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j(2\omega t-\theta-\varphi)}}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot e^{2\sigma t}\left\{\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\cos(2\omega t-\theta-\varphi)\right\}$$

となります。中括弧内第 2 項の$\cos(2\omega t-\theta-\varphi)$は変数が実数ですから、＋1 からー1 の値を取り、中括弧内第 2 項は全体として、$\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$から$-\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$までの値を取ります。これは電圧電流間の位相差が原因で、電源と回路の間を倍の角周波数で行き来している無効電力です。中括弧内第 1 項が回路で消費する電力量の部分になります。受動回路では、回路が消費する電力量は絶対にマイナスになりません。マイナスになりますと、受動回路から電源へ電力を供給していることになりますので間違っています。したがって、

$$\frac{1}{2}\cdot V\cdot I\cdot e^{2\sigma t}\left\{\frac{\cos\theta}{2\sigma}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\cos(2\omega t-\theta-\varphi)\right\}\geqq 0$$

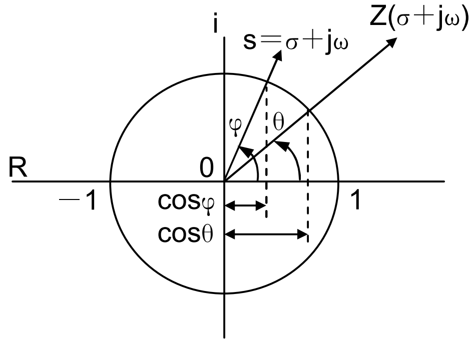
となります。中括弧内は 0 またはプラスでなくてはなりません。

$$\frac{\cos\theta}{2\sigma}\geqq\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

であれば、中括弧内が 0 またはプラスになります。振幅が増大する正弦波は、$\sigma>0$ ですから、両辺に 2σ を掛けても不等号の向きは変わらず、

$$\cos\theta\geqq\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

です。$\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}=\cos\varphi$ ですから、



$$\cos\theta \geqq \cos\varphi$$

となります。上式で$\cos\theta=\cos\varphi$の時は $\theta=\varphi$ ですが、$\cos\theta>\cos\varphi$の時は $\theta<\varphi$ ですので御注意下さい。cos の変数が小さいと cos の値は大きいです。

最初に $\sigma>0$ と決めましたので $s=\sigma+j\omega$ は複素平面の右半面の値です。$-\dfrac{\pi}{2}>\varphi>\dfrac{\pi}{2}$ ですので$\cos\varphi>0$ です。更に、$\cos\theta \geqq \cos\varphi$ ですので$-\dfrac{\pi}{2}>\theta>\dfrac{\pi}{2}$になります。$s=\sigma+j\omega$ が右反面なら、受動回路の $Y(\sigma+j\omega)$も右半面です。

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で、

$$\operatorname{Re} Y(\sigma+j\omega)=\left|Y(\sigma+j\omega)\right|\cos\theta>0$$

になります。Y(s)の複素平面右半面の値、$Y(\sigma+j\omega)$の実部は負になりません。

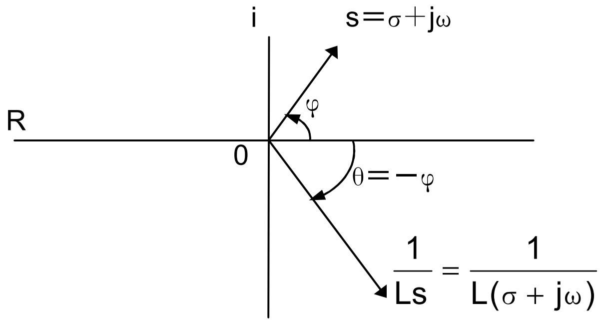
$s=\sigma+j\omega$ が複素平面右半面の時、受動回路の $Y(s)=Y(\sigma+j\omega)$も複素平面右半面になる実例をいくつか掲げます。

例えば L 単独の時、$Y(s)=\dfrac{1}{Ls}$ です。s に $\sigma+j\omega$ を代入しますと、$\dfrac{1}{L(\sigma+j\omega)}=\dfrac{1}{\sigma L+j\omega L}$ です。実数部、虚数部に分けますと、

$$\frac{1}{\sigma L+j\omega L}\cdot\frac{\sigma L-j\omega L}{\sigma L-j\omega L}=\frac{\sigma L}{(\sigma L)^2+(\omega L)^2}-j\frac{\omega L}{(\sigma L)^2+(\omega L)^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{-\dfrac{\omega L}{(\sigma L)^2+(\omega L)^2}}{\dfrac{\sigma L}{(\sigma L)^2+(\omega L)^2}}=\tan^{-1}\frac{-\omega L}{\sigma L}=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$$

になります。一方$\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma}$ です。下図になります。両方とも複素平面右半面です。



例えばＲとＬが直列の時、Y(s)＝$\frac{1}{R+Ls}$です。s に σ+jω を代入しますと、

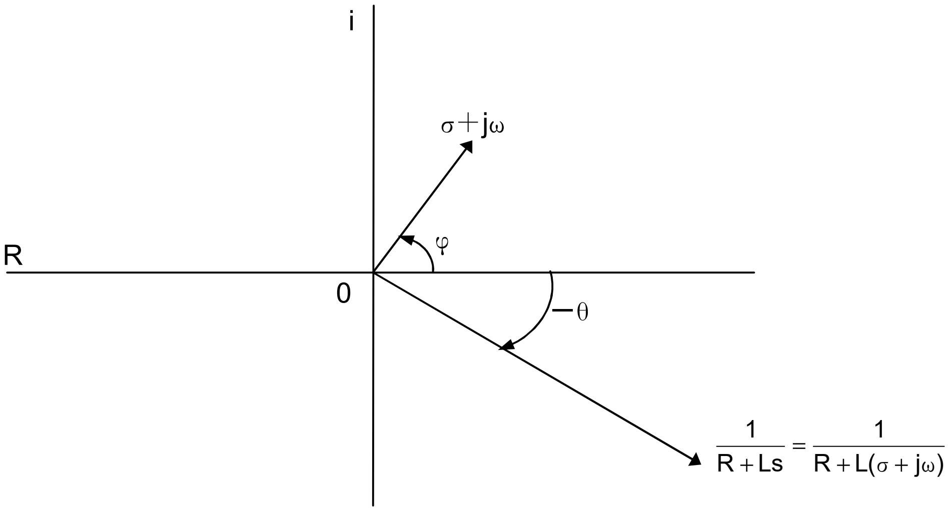
$\frac{1}{R+L(\sigma+j\omega)}=\frac{1}{R+\sigma L+j\omega L}$です。実数部、虚数部に分けますと、

$$\frac{1}{R+\sigma L+j\omega L}=\frac{1}{R+\sigma L+j\omega L}\cdot\frac{R+\sigma L-j\omega L}{R+\sigma L-j\omega L}=\frac{R+\sigma L-j\omega L}{(R+\sigma L)^2+(\omega L)^2}$$
$$=\frac{R+\sigma L}{(R+\sigma L)^2+(\omega L)^2}-j\frac{\omega L}{(R+\sigma L)^2+(\omega L)^2}$$

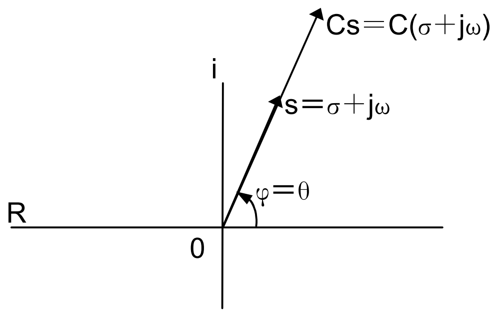
$$\theta=\tan^{-1}\frac{-\frac{\omega L}{(R+\sigma L)^2+(\omega L)^2}}{\frac{R+\sigma L}{(R+\sigma L)^2+(\omega L)^2}}=\tan^{-1}\frac{-\omega L}{R+\sigma L}=-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R+\sigma L}=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\frac{R}{L}+\sigma}$$

になります。

一方$\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$です。θ の $\tan^{-1}$ の分母が大きくなりますので、θ の絶対値は小さくなります。下図になります。両方とも複素平面右半面です。



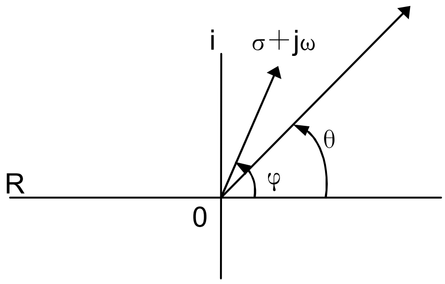
例えばC単独の時、Y(s)＝Csです。sにσ+jωを代入しますと、$C(\sigma+j\omega)=\sigma C+j\omega C$です。$\theta=\tan^{-1}\frac{\omega C}{\sigma C}=\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$になります。一方$\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$です。φとθは同じになります。cosも同じ値になります。下図になります。両方とも複素平面右半面です。



例えばRとCが並列の時、$Y(s)=\frac{1}{R}+Cs$です。sにσ+jωを代入しますと、

$\frac{1}{R}+C(\sigma+j\omega)=\left(\frac{1}{R}+\sigma C\right)+j\omega C$ですから、$\theta=\tan^{-1}\frac{\omega C}{\frac{1}{R}+\sigma C}=\tan^{-1}\frac{\omega}{\frac{1}{CR}+\sigma}$になります。一方$\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}$です。φに比べ$\tan^{-1}$の分母が大きくなりますので、θは小さくなります。両方とも複素平面右半面です。

$$\frac{1}{R} + Cs = \frac{1}{R} + C(\sigma + j\omega)$$



等々です。σ を正の値にしますと、複素数 σ＋jω は複素平面右半面です。受動回路では、cosθ ≧cosφ ですからθ≦φとなり、複素数 Y(σ＋jω)も複素平面右半面になります。

(1)と(2)の結果から、σ が 0 の時も含め、

Re s≧0 なる範囲で Re Y(s)≧0

となります。s が虚軸を含む複素平面右半面の値の時、Y(s) も虚軸を含む複素平面右半面の値であることが分りました。Y(s)の実部は負になりません。サセプタンスだけの回路 B(s)も Y(s)に含まれます。

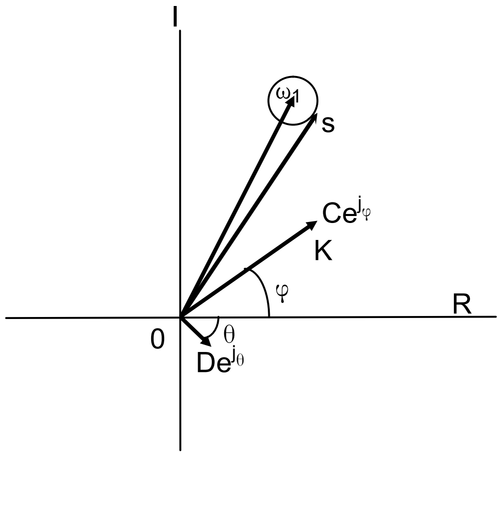
4、虚軸を除く複素平面右半面の極

s が虚軸を含む複素平面右半面上の値の時、Y(s)の実部は負にならないことから、虚軸を除く複素平面右半面にアドミッタンスの極があってはいけないことが分ります。

もし虚軸を除く複素平面右半面に極 ω_1 があった場合、

極 ω_1 のごく近くでは留数を K として、

$$Y(s) \fallingdotseq K \times \frac{1}{s - \omega_1} = \frac{K}{s - \omega_1}$$



と表されます。「虚軸上の留数は正である」の章 1、をご参照下さい。s は複素数です。極 ω_1 付近の複素平面で、s を極小半径で回転しますと、差 s−ω_1 は、

$$s-\omega_1=De^{j\theta}$$

と言う極座標で表されます。留数 K は複素平面上のどこかの値ですので、やはり、

$$K=Ce^{j\varphi}$$

と言う極座標で表されます。したがって、

$$Y(s)\fallingdotseq\frac{K}{s-\omega_1}=\frac{Ce^{j\varphi}}{De^{j\theta}}=\frac{C}{D}e^{j\varphi-j\theta}=\frac{C}{D}e^{j(\varphi-\theta)}=\frac{C}{D}\{\cos(\varphi-\theta)+j\sin(\varphi-\theta)\}$$

となります。指数法則とオイラーの公式を使いました。Y(s)の実数部は、

$$\mathrm{Re}\,Y(s)=\frac{C}{D}\cdot\cos(\varphi-\theta)$$

となります。本章の 3、にあります様に、s が虚軸を含む複素平面の右半面上の値の時、複素数の関数 Y(s)の値も、虚軸を含む複素平面の右半面上である必要があります。Y(s)の実数部は負になってはいけないのでした。

留数の偏角 φ が 0 から 2π までのどのような値を持っているとしても、s の偏角 θ が 0 から 2π まで変化しますと、cos 値の符号は必ず変わります。Y(s)の実数部が負になる領域があります。

φ を変化させた時、θ と $\varphi-\theta$ と cos $(\varphi-\theta)$の関係

φ	θ	$\varphi-\theta$	$\cos(\varphi-\theta)$
0	0	0	1
0	$\pi/2$	$-(\pi/2)$	0
0	π	$-\pi$	-1
0	$3\pi/2$	$-(3\pi/2)$	0
0	2π	-2π	1

φ	θ	φ－θ	cos(φ－θ)
π/2	0	π/2	0
π/2	π/2	0	1
π/2	π	－(π/2)	0
π/2	3π/2	－π	－1
π/2	2π	－(3π/2)	0

φ	θ	φ－θ	cos(φ－θ)
π	0	π	－1
π	π/2	π/2	0
π	π	0	1
π	3π/2	－(π/2)	0
π	2π	－π	－1

φ	θ	φ－θ	cos(φ－θ)
3π/2	0	3π/2	0
3π/2	π/2	π	－1
3π/2	π	－(π/2)	0
3π/2	3π/2	0	1
3π/2	2π	－(π/2)	0

φ	θ	φ－θ	cos(φ－θ)
2π	0	2π	1
2π	π/2	3π/2	0
2π	π	π	－1
2π	3π/2	π/2	0
2π	2π	0	1

これは s の値が複素平面右半面の時に、Y(s)の値が複素平面左半面の値になると言うことですから、受動回路では許されません。

「虚軸上の留数は正である」の章 2、(3)で行いましたが、点 5＋j5 の周りを回っても点 5－j5 の周りを回っても、差の値は同じになります。極が ω_1 の共役の位置にあっても全く同じです。このことから、虚軸を除く複素平面右半面に極があってはいけないことが分ります。

アドミッタンスの極はインピーダンスの零点です。インピーダンスの極が虚軸を除く複素平面右半面にあってはいけないことは「虚軸上の留数は正である」の章 4、で既に説明致し

ましたが、インピーダンスの零点も虚軸を除く複素平面右半面にあってはいけないことになります。またインピーダンスの極はアドミッタンス零点ですから、アドミッタンスの零点も複素平面右半面にあってはいけません。

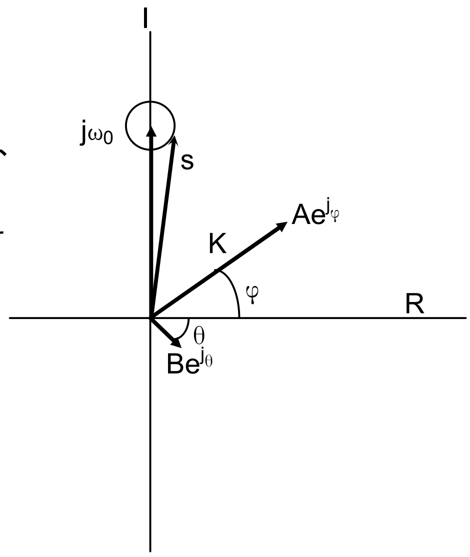
5、虚軸上の極

アドミッタンスの虚軸上の極について次のことが分かります。

(1)虚軸上の極の留数

虚軸上にある極 $j\omega_0$ のごく近くでは、留数を K として、

$$Y(s) \fallingdotseq K\times\frac{1}{s-j\omega_0}=\frac{K}{s-j\omega_0}$$



と表されます。「虚軸上の留数は正である」の章 1、をご参照下さい。s は複素数です。

極 $j\omega_0$ 付近の複素平面で、s を極小半径で回転しますと、差 s－$j\omega_0$ は、

$$s-j\omega_0=Be^{j\theta}$$

と言う極座標で表されます。「虚軸上の留数は正である」の章 2、(2)をご参照下さい。

留数 K は複素平面上のどこかの値ですので、やはり、

$$K=Ae^{j\varphi}$$

と言う極座標で表されます。したがって、

$$Y(s) \fallingdotseq \frac{K}{s-j\omega_0}=\frac{Ae^{j\varphi}}{Be^{j\theta}}=\frac{A}{B}e^{j\varphi-j\theta}=\frac{A}{B}e^{j(\varphi-\theta)}=\frac{A}{B}\{\cos(\varphi-\theta)+j\sin(\varphi-\theta)\}$$

となります。指数法則とオイラーの公式を使いました。

右辺の実数部は、

$$\mathrm{Re}\,Y(s)=\frac{A}{B}\cdot\cos(\varphi-\theta)$$

です。本章の 3、に書きました様に s が虚軸を含む複素平面の右半面上の値の時、複素数の関数 Y(s)の値も、虚軸を含む複素平面の右半面上である必要があります。Y(s)の実数部は負になってはいけません。

複素平面右半面の、$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の時、Y(s)の実数部である $\cos(\varphi-\theta)$ が 0 以上でなければ

なりません。cos $\theta \geqq 0$ になるのは、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ です。$\varphi - \theta$ も、$-\frac{\pi}{2} \leqq (\varphi - \theta) \leqq \frac{\pi}{2}$ である必要があります。φ は 0 でなければなりません。

$$K = Ae^{j0} = A(\cos 0 + j\sin 0) = A$$

となり留数 K は A です。A は複素数の絶対値ですから、正の実数であることが分ります。

φ が 0 の時、θ、$\varphi - \theta$、cos $(\varphi - \theta)$の関係は下表の通りです。

$\varphi = 0$ の時、θ と $\varphi - \theta$ と cos $(\varphi - \theta)$の関係

θ	$\varphi - \theta$	$\cos(\varphi - \theta)$
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	0	1
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

アドミッタンスの極はインピーダンスの零点ですから､虚軸上以外のインピーダンスの零点はありません。またインピーダンスの極はアドミッタンスの零点ですから、アドミッタンスの零点も虚軸上以外にありません。

(2)負の虚数極

「虚軸上の留数は正である」の章 2、(2)で行いましたが、s が点 0＋j5 の周りを回っても点 0－j5 の周りを回っても、差の値は同じになりました。極が$-j\omega_0$ にあっても、差は原点 0 の周りを一回りです。このことから、極$-j\omega_1$ の留数も、正の実数であることが分ります。

虚軸上の共役極の留数の値が同じになるか否かは、「リアクタンス関数の性質」の章 4、にあります。

(3)二位の虚数極

虚数軸上に二位の極があった場合、

$$Y(s) \fallingdotseq \frac{K}{(s-j\omega_1)^2} = \frac{De^{j\varphi}}{(Ee^{j\theta})^2} = \frac{De^{j\varphi}}{E^2e^{j2\theta}} = \frac{D}{E^2}e^{j\varphi-j2\theta} = \frac{D}{E^2}e^{j(\varphi-2\theta)}$$

$$= \frac{D}{E^2}\{\cos(\varphi-2\theta)+j\sin(\varphi-2\theta)\}$$

となります。$(s-j\omega_1)$の偏角 θ が、虚軸を含む複素平面右半面で、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時 Y(s)の実数部も、$\cos(\varphi-2\theta) \geqq 0$ でなければなりません。

$\cos(\varphi-2\theta) \geqq 0$ になる為には、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時、$-\frac{\pi}{2} \leqq (\varphi-2\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$ である必要があります。$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の時、$-\frac{\pi}{2} \leqq (\varphi-2\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$ になる定数 φ はありません。駆動点サセプタンス Y(s) 分母を因数分解しても、二位以上の極の項が無いことを表します。

(4)極が原点 0 の時

「虚軸上の留数は正である」の章 2、(1)(2)で行いましたが、s が原点 0 の周りを回っても、点 0＋j5 の周りを回っても、差の値は同じになりました。差は原点 0 の周りを一回りです。このことから、原点 0 の極の留数も、正の実数であることが分ります。

目次へ戻る