R－R 型フィルターでのＰ、Ｑの求め方　　　　　２０１３年５月２２日　　　目次へ戻る

R－R 型 LC フィルターを設計する際に必要な P、Q の求め方について、バタワースとチェビシェフについてまとめました。「はしご型 LC フィルターの設計」の章、R－R 型の項をご参照下さい。

1、周波数伝達関数から伝達関数を作る時

伝達関数を作る際、2 乗 ω 特を用意します。ω 特とは、周波数伝達関数の絶対値のことです。2 乗 ω 特とは、それを 2 乗したものです。

2 乗 ω 特の分母は、元関数の 2 乗＋1 です。元関数は奇関数または偶関数ですから、奇関数の 2 乗＋1、または偶関数の 2 乗＋1 になります。

奇関数の 2 乗および偶関数の 2 乗は偶関数です。偶関数に 1 を足しても偶関数ですから、2 乗 ω 特の分母は偶関数です。

この分母を、＝0 と置き因数分解します。出てきた ω の根を j 倍し、複素数平面で反時計回りに 90 度回転させます。複素数平面左半面の根のみを取り出し、s の根とします。この因数が伝達関数の分母になります。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい。

因数分解の過程において、奇関数の 2 乗＋1 または偶関数の 2 乗＋1 で、足した 1 が変化し、伝達関数を再び 2 乗 ω 特に戻した時、1 ではなくなる場合があります。

例えば、$(x+b)(x+c)=0$、つまり $x^2+(b+c)x+bc=0$ と言う方程式は、両辺に 0 以外の a という数をかけても割っても、$x=-b$ と $x=-c$ で成立しますので、このことが起きます。

2、伝達関数を周波数伝達関数の絶対値に戻す時

伝達関数を再び ω 特、つまり周波数伝達関数の絶対値に戻すには、$s=j\omega$ と $s=-j\omega$ を代入し、かけて、平方根にすれば良いのでした。

周波数伝達関数の絶対値とは利得のことです。角周波数 0 での利得も、$s=j0$ と $s=-j0$ を代入し、かけて、平方根にすれば良いのですが、s を 0 にした伝達関数の値と等しくなります。例えば 4 次バタワースフィルターの伝達関数は、

$$\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}$$

です。$s=j0$ を代入しますと、

$$\left[\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}\right]_{s=j0}=\frac{1}{1}=1$$

になります。$s=-j0$ を代入しますと、

$$\left[\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}\right]_{s=-j0}=\frac{1}{1}=1$$

になります。両方をかけ、平方根にしますと、

$$\sqrt{1\times 1}=1$$

になります。一方、s を 0 にした伝達関数の値は、

$$\left[\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}\right]_{s=0}=\frac{1}{1}=1$$

となり、伝達関数に s＝j0 と s＝－j0 を代入し、かけて、平方根にする場合と、伝達関数の s に 0 を代入する場合とで、答えは同じです。

因数分解の過程で、2 乗 ω 特の分母、つまり奇関数の 2 乗＋1 または偶関数の 2 乗＋1 の足した筈の 1 が変化している場合、伝達関数の分子に 1 が載っていては、角周波数 0 での利得が 1 になりません。

例えば 3 次チェビシェフフィルターで、通過域最大減衰量 1[dB]の伝達関数は、

$$\frac{0.4913}{s^3+0.9884s^2+1.2384s+0.4913}$$

です。分母の定数項が 0.4913 になっているので、分子に 0.4913 を載せ、角周波数 0 での利得を 1 にしています。

3、バタワースフィルターの P、Q

(1)偶数次

バタワースフィルターの場合は、伝達関数分母の定数項が必ず 1 になりますので、分子に 1 が載っています。2 次バタワースフィルターの伝達関数は、

$$\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

です。s＝jω と s＝－jω を代入し、かけますと、分母は偶関数の 2 乗＋1 になる筈です。また、この伝達関数は分母の定数項と分子がともに 1 ですから、角周波数 0 での利得が 1 になります。

R－R 型 LC フィルターで R_1＝R_2 の場合、この伝達関数には抵抗による電圧降下の値、$\frac{1}{2}$ がかかります。伝達関数は、

$$\frac{1}{2(s^2+\sqrt{2}s+1)}$$

となります。この伝達関数に、周波数伝達の絶対値の 2 乗を求める計算、つまり s＝jω と s＝－jω を代入し、かけるを行いますと、

$$\frac{1}{4\omega^4+4}$$

になります。伝達関数分母に 2 がかかっていた為、分母は偶関数の 2 乗の 4 倍＋4 となります。4 を引くと残りは偶関数の 2 乗の 4 倍です。これと同じ値になる「偶関数の 2 乗」、つまり P^2 を求めるのは容易です。$P^2=4\omega^4=(2\omega^2)^2$ であり、P は $2\omega^2$ です。

(2)奇数次

3 次バタワースフィルターの伝達関数は、

$$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

です。s＝jω と s＝－jω を代入し、かけますと分母は奇関数の 2 乗＋1 になる筈です。また、この伝達関数は分母の定数項と分子がともに 1 ですから、角周波数 0 での利得が 1 になります。

R－R 型 LC フィルターで $R_1=R_2$ の場合、この伝達関数には抵抗による電圧降下の値、$\frac{1}{2}$ がかかります。伝達関数は、

$$\frac{1}{2(s^3+2s^2+2s+1)}$$

となります。この伝達関数に周波数伝達関数の絶対値の 2 乗を求める計算、つまり s＝jω と s＝－jω を代入し、かけるを行いますと、

$$\frac{1}{4\omega^6+4}$$

になります。伝達関数分母に 2 がかかっていた為、分母は奇関数の 2 乗の 4 倍＋4 となります。4 を引くと残りは奇関数の 2 乗の 4 倍です。これと同じ値になる「奇関数の 2 乗」、つまり Q^2 を求めるのは容易です。$Q^2=4\omega^6=(2\omega^3)^2$ であり、Q は $2\omega^3$ です。

(3)バタワースフィルターでの P、Q の求め方

以上の結果から、バタワースフィルターでの P^2 または Q^2 は n を次数として、

$$4\omega^{2n}=(2\omega^{n})^2$$

となることが分ります。したがって P または Q は、

$$2\omega^{n}$$

です。n が偶数の場合は P 、n が奇数の場合は Q です。

4、チェビシェフフィルターの P、Q

(1) 奇数次

チェビシェフフィルターの場合は、元関数の 2 乗＋1 を因数分解する過程で、分母の定数項が 1 ではなくなります。奇数次のチェビシェフフィルターの場合、伝達関数分子に分母の定数項と同じ数を載せ、角周波数 0 での利得を 1 にしています。

通過域の許容減衰量 3dB、3 次チェビシェフフィルターの伝達関数は、

$$\frac{0.29862}{s+0.29862}\bullet\frac{0.83917}{s^2+0.29862s+0.83917}$$

$$=\frac{0.25059}{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}$$

です。角周波数 0 で利得が 1 になる様に、分子に分母の定数項を載せました。

分子分母に $\frac{1}{0.25059}$ をかけますと、

$$=\frac{1}{3.9906s^3+2.3833s^2+3.7046s+1}$$

になります。この形の伝達関数に s＝jω と s＝－jω を代入し、かけますと、分母は奇関数の 2 乗＋1 になる筈です。

R－R 型 LC フィルターで R_1＝R_2 の場合、この伝達関数には抵抗による電圧降下の値、$\frac{1}{2}$ がかかります。伝達関数は、

$$\frac{1}{2(3.9906s^3+2.3833s^2+3.7046s+1)}$$

となります。この伝達関数に、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗を求める計算、つまり s＝jω と s＝－jω を代入し、かけるを行いますと、

$$\frac{1}{63.6990\omega^6-95.5474\omega^4+35.8301\omega^2+4}$$

になります。伝達関数分母に 2 がかかっていた為、分母は奇関数の 2 乗の 4 倍＋4 になります。4 を引くと残りは奇関数の 2 乗の 4 倍で、

$$63.6990\omega^6 - 95.5474\omega^4 + 35.8301\omega^2$$

となります。これと同じ値になる「奇関数の 2 乗」、つまり Q^2 を求める為、上式を因数分解しますと、

$$63.6990\,\omega^6 - 95.5474\omega^4 + 35.8301\,\omega^2 = (\sqrt{63.6990}\,\omega^3 - \sqrt{35.8301}\,\omega)^2$$

になり、これが Q^2 です。Q は 2 乗を外し、

$$\sqrt{63.6990}\,\omega^3 - \sqrt{35.8301}\,\omega$$

となります。3 次チェビシェフフィルターでは因数分解が容易ですが、次数が増えた場合は因数分解が難しくなります。

2 乗する前の奇関数、つまり元関数は多項式でも表せました。「チェビシェフフィルター」の章、4 をご参照下さい。

奇数次チェビシェフフィルターの元関数多項式は、

$$y_1 = b\omega$$
$$y_3 = b(4\omega^3 - 3\omega)$$
$$y_5 = b(16\,\omega^5 - 20\,\omega^3 + 5\omega)$$
$$y_7 = b(64\,\omega^7 - 112\,\omega^5 + 56\,\omega^3 - 7\,\omega)$$
$$y_9 = b(256\,\omega^9 - 576\,\omega^7 + 432\,\omega^5 - 120\,\omega^3 + 9\omega)$$

・
・
・

です。この元関数が 2 乗する前の奇関数そのものです。2 乗したときに「奇関数の 2 乗の 4 倍」にするためには、この奇関数を事前に 2 倍しておけば良いです。2 乗したときに 4 倍になります。

式中の b の値は次の様にして求めます。

普通、チェビシェフフィルターにおいて通過域における減衰の最大許容値を外れるのは、正規化角周波数 1 の場所で起こります。正規化角周波数 1 の場所での減衰量は、2 乗 ω 特の式、

$$\frac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2 + 1}$$

の ω に 1 を代入し、

$$\frac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}1)\}^2+1}=\frac{1}{b^2(\cos 0)^2+1}=\frac{1}{b^2+1}$$

となります。2 乗しない、ただの ω 特、つまり周波数伝達関数の絶対値は、この平方根で、

$$\sqrt{\frac{1}{b^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

となります。したがって通過域の許容減衰の最大値、つまり dB 表示の A_P を表す式は、

$$A_P=-20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}=-20\log_{10}(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}=-20\bullet-\frac{1}{2}\log_{10}(1+b^2)=10\log_{10}(1+b^2)$$

となります。これを b について解きますと、

$$\log_{10}(1+b^2)=\frac{A_P}{10}$$

$$1+b^2=10^{\frac{A_P}{10}}$$

$$b^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

になります。b は負の値になりませんので、

$$b=\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

です。したがって、奇数次チェビシェフフィルターの Q は、n を次数として、

$$Q_n=2y_n \qquad y_n\text{ 中の b は}\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

になります。y_n は元関数の多項式です。この方法は因数分解の必要が無く簡単です。

先程の、通過域の許容うねり 3dB、3 次チェビシェフフィルターの Q をこの方法で求めますと、b は、

$$\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}=\sqrt{10^{\frac{3}{10}}-1}≒0.9976$$

ですから、

Q＝2×0.9976(4ω^3－3ω)

$$=7.9808\omega^3-5.9856\omega$$
$$\fallingdotseq\sqrt{63.6990}\,\omega^3-\sqrt{35.8301}\,\omega$$

となります。

(2)偶数次

偶数次のチェビシェフフィルターは、角周波数 0 で通過域許容減衰量マックスの状態からスタートしなくてはいけません。

一方、低域通過フィルターで使うリアクタンス回路は、角周波数 0 で入出力間は筒抜けです。角周波数 0 で減衰はありません。

R_1 と R_2 の値をわざと違えて、角周波数 0 での減衰量を作らなければなりません。入力の R_1 を大きく、出力の R_2 を小さくして、角周波数 0 での減衰量を作ったとします。

チェビシェフフィルターですから、通過域の途中で減衰無しの地点があるはずです。ところが、そこで減衰無しにならず通過域の許容減衰量マックス状態と同じになります。偶数次のチェビシェフフィルターを、LC フィルターの R−R 型で作るのは難しいです。

偶数次のチェビシェフフィルターを、LC フィルターで作る場合、縮退と言う技術を使います。最初に現れる減衰無しの角周波数を角周波数 0 に移動し、無理やり減衰無しの状態からスタートさせます。

面倒な縮退をするより、次数をひとつ増やし、奇数次のフィルターにする方が良いそうです。（実用アナログ・フィルタ設計法 159 ページ）

目次へ戻る