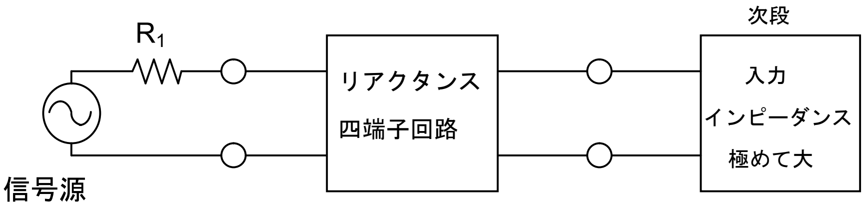
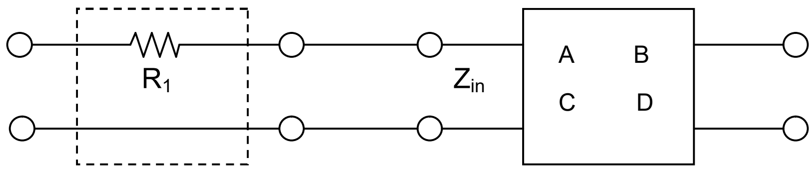
はしご型 LC フィルターの設計　　　　　　２０１３年４月２３日　　　　目次へ戻る

2020.11.19　2022.9.7　2026.2.19 改訂

1、R－∞型フィルターの設計



信号源の内部抵抗が R_1、次段の入力インピーダンスが極めて大きいので、リアクタンス四端子回路の出力は、開放と見なせる場合のフィルターです。R－∞型と呼びます。下図のようにリアクタンス四端子回路の手前に、R_1 の四端子回路がつながっていると考えます。



R_1 の四端子回路の四端子定数は、「四端子回路について」の章の 2、例題 1 で求めた四端子定数のインピーダンス Z が、純抵抗 R_1 になった場合ですから、

$$\begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

です。したがって、全体の四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+R_1C & B+R_1D \\ C & D \end{bmatrix}$$

となります。

全体の四端子定数の A の位置にある、$A+R_1C$ が $\frac{V_1}{V_2}$ を表しています。

A、B、C、D が、ラプラスの世界のリアクタンスで表わされている場合は、$\frac{V_1}{V_2}$ を s の世界で表わしたものとなります。s の世界で表した $\frac{V_2}{V_1}$ が伝達関数ですから、その逆数になり

ます。ただし、A の位置の値が $\frac{V_1}{V_2}$ を表すのは I_2＝0 の時で、出力が開放とみなされる場合だけです。「四端子回路について」の章の 2、(1) A の求め方をご参照下さい。

同じく「四端子回路について」の章 6、(3)で調べた通り、リアクタンス四端子回路のみでは、A の位置に偶関数しか出ません。

R_1 の持つ四端子定数を掛け合わせることで、A の位置に A＋R_1C つまり偶関数＋R_1×奇関数の式が出るようになります。R_1 が 1Ω の場合 A＋C です。

全体の四端子定数の A の位置の値が伝達関数の逆数になっていれば、全体の四端子回路は目的のフィルターになります。目的の値を A の位置に出す方法を考えます。

リアクタンス四端子回路だけの、入力インピーダンス Z_{in} を求めます。R_1 を含めない、R_1 の右側から右を見たインピーダンスです。リアクタンスだけの回路ですから、入力リアクタンス X_{in} と呼んだ方が良いと思います。

X_{in} は「四端子回路について」の章 4、で求めた入力インピーダンスで、R_2 を∞に大きくした場合ですから、

$$X_{in} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{A + \frac{B}{R_2}}{C + \frac{D}{R_2}} = \frac{A}{C}$$

となります。分子分母に $\frac{1}{R_2}$ を掛け、R_2 を無限大にしました。

入力リアクタンスは四端子定数、C 分の A です。「四端子回路について」の章 6、(3)で検討したように、リアクタンスだけの四端子回路の場合、A は偶関数 C は奇関数です。

したがって、

(1)伝達関数の逆数を偶関数部分と奇関数部分にばらし、

(2)入力リアクタンスが、$\frac{\text{偶関数部分}}{\text{奇関数部分}}$ になるようなリアクタンス四端子回路を作れば、

(3)R_1 が 1Ω の時、R_1 を含めた全体の四端子定数の、A の位置の値が伝達関数の逆数になり、

目的のフィルターになります。その後、周波数スケーリングで実周波数に持って来ます。さらに素子値スケーリングを行い、素子値を実用的な範囲にまとめます。スケーリングの章及びはしご型 LC フィルターのスケーリングの章をご参照下さい。

例題 1ー(1)

R－∞型で 3 次バタワースフィルターを設計して下さい。伝達関数は $\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ です。

答

伝達関数の逆数を求めますと、s^3+2s^2+2s+1となります。式の中の偶関数部分は、$2s^2+1$です。奇関数部分は、s^3+2s です。

したがって、はしご回路の入力リアクタンスを$\dfrac{2s^2+1}{s^3+2s}$と決めます。

入力リアクタンスを連分数にします。分子を分母で割って行きます。分子の次数が分母より小さい場合は逆数分の１に直してから割って行きます。連分数は、

$$\frac{2s^2+1}{s^3+2s}=\frac{1}{\dfrac{s^3+2s}{2s^2+1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{\frac{3}{2}s}{2s^2+1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}s+\dfrac{1}{\frac{3}{2}s}}}$$

となります。上の計算の解説を行います。$\dfrac{2s^2+1}{s^3+2s}$は分子の次数が分母より小さいので、$\dfrac{1}{\dfrac{s^3+2s}{2s^2+1}}$に直しました。次にこの分数の分母の$\dfrac{s^3+2s}{2s^2+1}$の割り算を行います。

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \frac{1}{2}s \\
2s^2+1\,\big) & s^3+2s \\
 & s^3+\frac{1}{2}s \\ \hline
 & \frac{3}{2}s
\end{array}$$

答 $\dfrac{1}{2}s$余り $\dfrac{3}{2}s$となりました。$\dfrac{s^3+2s}{2s^2+1}$は、$\dfrac{1}{2}s+\dfrac{\frac{3}{2}s}{2s^2+1}$です。ここで出て来た$\dfrac{\frac{3}{2}s}{2s^2+1}$は、再び分子の次数が分母より小さいので、$\dfrac{1}{\dfrac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}}$に直します。この分数の分母の$\dfrac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}$の割り算を行います。

$$\begin{array}{rl} & \frac{4}{3}s \\ \frac{3}{2}s \big) & \overline{2s^2+1} \\ & 2s^2 \\ \hline & \quad\quad 1 \end{array}$$

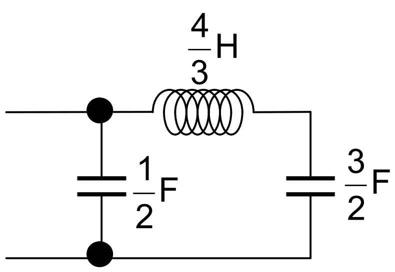
答 $\frac{4}{3}$s余り 1 となりました。$\dfrac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}$ は、$\frac{4}{3}s+\dfrac{1}{\frac{3}{2}s}$ です。したがって全部をまとめると、

$$\frac{2s^2+1}{s^3+2s}=\frac{1}{\dfrac{s^3+2s}{2s^2+1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{\frac{3}{2}s}{2s^2+1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}s+\dfrac{1}{\frac{3}{2}s}}}$$

となります。さらに最後を、

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{2}s}}+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}s+\dfrac{1}{\frac{3}{2}s}}}$$

と変形します。入力リアクタンスは、$\dfrac{1}{\frac{1}{2}s}$ のリアクタンスと、$\frac{4}{3}s+\dfrac{1}{\frac{3}{2}s}$ のリアクタンスが並列接続された合成リアクタンスである事が分ります。つまり $\frac{1}{2}$F のコンデンサと並列に、$\frac{4}{3}$H のコイルと $\frac{3}{2}$F のコンデンサの直列回路が入ったものになります。回路は、



となります。

検算

　上図の四端子定数は、コンデンサ、コイル、コンデンサの順に四端子回路をΠ(パイ)型接続したと考え、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{4s}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{4s}{3} \\ \frac{s}{2} & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2s^2 & \frac{4s}{3} \\ \frac{s}{2}+s^3+\frac{3s}{2} & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2s^2+1 & \frac{4s}{3} \\ s^3+2s & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}$$

となります。A の位置に伝達関数逆数の偶関数部分、C の位置に同じく奇関数部分が出ています。R_1 の 1Ω がついた時の総合的な四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2s^2+1 & \frac{4s}{3} \\ s^3+2s & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}$$

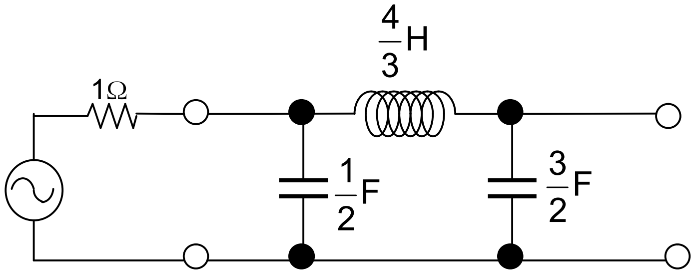
$$= \begin{bmatrix} 2s^2+1+s^3+2s & \frac{4s}{3}+\frac{2s^2}{3}+1 \\ s^3+2s & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^3+2s^2+2s+1 & \frac{2s^2}{3}+\frac{4s}{3}+1 \\ s^3+2s & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}$$

となります。総合的な四端子定数の A の位置の値は、伝達関数の逆数と一致しています。

したがって、出力は、$\frac{3}{2}$Fのコンデンサ両端から取ることになります。すでに書きました通り、出力電流は取り出せません。出力は電圧だけを取り出します。

最終的な回路図は下図の通りです。



この回路を実際の周波数、実用的な素子値に持っていくスケーリングの例は、次章「はしご型 LC フィルターのスケーリング」の 1、をご覧下さい。

例題 1ー(2)

R−∞型で通過域の許容うねり 3dB、3 次チェビシェフフィルターを設計して下さい。伝達関数は、

$$\frac{0.29862}{s+0.29862}\bullet\frac{0.83917}{s^2+0.29862s+0.83917}$$
$$=\frac{0.25059}{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}$$

です。分子は角周波数 0 つまり s=0 で利得を 1 にする為の係数です。

答

伝達関数の逆数を求めますと、

$$\frac{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}{0.25059}$$
$$=3.99058s^3+2.38334s^2+3.70462s+1$$

になります。

式の中の偶関数部分は、$2.38334s^2+1$です。奇関数部分は、$3.99058s^3+3.70462s$です。

したがって、はしご回路の入力リアクタンスを$\frac{2.38334s^2+1}{3.99058s^3+3.70462s}$と決めます。

入力リアクタンスを連分数にします。分子を分母で割って行きます。分子の次数が分母より小さい場合は、逆数分の１に直してから割って行きます。連分数は、

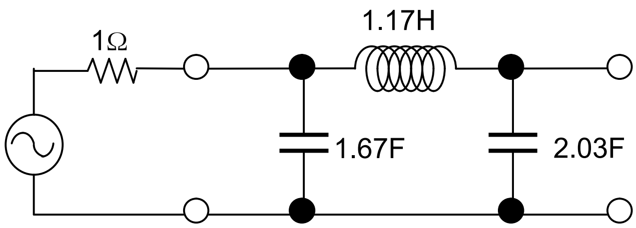
$$\frac{2.38334s^2+1}{3.99058s^3+3.70462s}=\frac{1}{\dfrac{3.99058s^3+3.70462s}{2.38334s^2+1}}=\frac{1}{1.67436s+\dfrac{2.03026s}{2.38334s^2+1}}$$

$$=\frac{1}{1.67436s+\dfrac{1}{\dfrac{2.38334s^2+1}{2.03026s}}}=\frac{1}{1.67436s+\dfrac{1}{1.17391s+\dfrac{1}{2.03026s}}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{1.67436s}}+\dfrac{1}{1.17391s+\dfrac{1}{2.03026s}}}$$

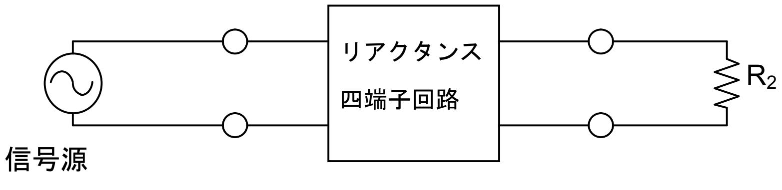
となります。入力リアクタンスは、$\dfrac{1}{1.67s}$のリアクタンスと、$1.17s+\dfrac{1}{2.03s}$のリアクタンスが並列接続されている、合成リアクタンスである事が分ります。つまり 1.67F のコンデンサと並列に、1.17H のコイルと 2.03F のコンデンサの直列回路が入ったものになります。

回路は、



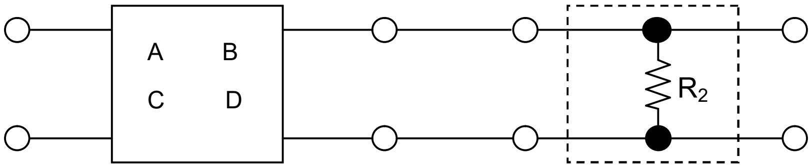
です。

2、0ーR 型フィルターの設計



信号源の内部抵抗が 0、フィルターの負荷を R_2 とした場合のフィルターです。R_2 が負荷抵抗ですから、R_2 より右側は高インピーダンス回路がつながっています。

0－R 型と呼びます。下図のようにリアクタンス四端子回路の後ろに、R_2 の四端子回路がつながっていると考えます。



R_2 の四端子回路の四端子定数は、「四端子回路について」の章の 2、例題 2 で求めた四端子定数のインピーダンス Z が、純抵抗 R_2 になった場合ですから、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

です。信号源の右から右を見た全体の四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+\dfrac{B}{R_2} & B \\ C+\dfrac{D}{R_2} & D \end{bmatrix}$$

となります。全体の四端子定数の A の位置にある $A+\dfrac{B}{R_2}$ が、この時の $\dfrac{V_1}{V_2}$ を表しています。

A、B、C、D が、ラプラスの世界のリアクタンスで表わされている場合は、$\dfrac{V_1}{V_2}$ を s の世界で表わしたものとなります。s の世界で表わした $\dfrac{V_2}{V_1}$ が伝達関数ですから、その逆数になります。ただし、A の位置の値が $\dfrac{V_1}{V_2}$ を表すのは、I_2＝0 の時です。R_2 より右側は、開放とみなされる高インピーダンスでなければいけません。「四端子回路について」の章の 2、(1) A の求め方をご参照下さい。

同じく「四端子回路について」の章 6、(3)で調べた通り、リアクタンス四端子回路のみでは、A の位置に偶関数しか出ません。

R_2の持つ四端子定数を掛け合わせることで、Aの位置に$A+\frac{B}{R_2}$つまり偶関数＋奇関数÷R_2の式が出るようになります。R_2が1Ωの場合、A＋Bです。

全体の四端子定数の A の位置の値が伝達関数の逆数になっていれば、全体の四端子回路は目的のフィルターになります。目的の値を A の位置に出す方法を考えます。

R_2の左から左を見た場合の出力インピーダンス、Z_{out}を求めます。リアクタンスだけの回路ですから、出力リアクタンスX_{out}と呼んだ方が良いと思います。

X_{out}は「四端子回路について」の章5、で求めた出力インピーダンスで、R_1を0にした場合ですから、

$$X_{out}=\left[\frac{DR_1+B}{CR_1+A}\right]_{R_1=0}=\frac{B}{A}$$

となります。この時の A と B は、リアクタンスだけの四端子回路の A と B です。「四端子回路について」の章6、(3)で検討したように、A は偶関数、B は奇関数です。

したがって、

(1)伝達関数の逆数を偶関数部分と奇関数部分にばらし、

(2)出力リアクタンスが、$\dfrac{\text{奇関数部分}}{\text{偶関数部分}}$になるようなリアクタンス四端子回路を作れば、

(3)R_2が1Ωの時、R_2を含めた全体の四端子定数の A の位置の値が伝達関数の逆数になり、

目的のフィルターになります。その後、周波数スケーリングで実周波数に持って来ます。さらに素子値スケーリングを行い、素子値を実用的な範囲にまとめます。スケーリングの章及びはしご型 LC フィルタのスケーリングの章をご参照下さい。

例題2ー(1)、

0ーR 型で3次バタワースフィルターを設計して下さい。伝達関数は$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$です。

答

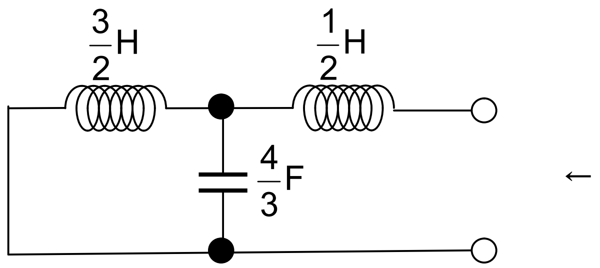
伝達関数の逆数を求めます。s^3+2s^2+2s+1となります。この式の中の偶関数部分は、$2s^2+1$です。奇関数部分は、s^3+2sです。

したがって、はしご回路の出力リアクタンスを$\frac{s^3+2s}{2s^2+1}$と決めます。

この式を連分数にします。分子を分母で割って行きます。分子の次数が分母より小さい場合は逆数分の1に直してから割って行きます。連分数は、

$$\frac{s^3+2s}{2s^2+1}=\frac{1}{2}s+\frac{\frac{3}{2}s}{2s^2+1}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{\frac{3}{2}s}}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}s}}+\frac{1}{\frac{3}{2}s}}$$

となります。このリアクタンスは、出力リアクタンスとして右から左を見ているものです。回路も右から左へ作ります。$\frac{1}{2}s$のリアクタンスが有り、その後ろに$\frac{1}{\frac{4}{3}s}$と$\frac{3}{2}s$のリアクタンスの並列回路が接続されている事が分ります。つまり$\frac{1}{2}$Hのコイルの後に、$\frac{4}{3}$Fコンデンサと、$\frac{3}{2}$Hコイルの並列回路が入ったものになります。回路は、



となります。R_1＝0 ですので入力は短絡されています。

検算

　上図のリアクタンスだけの四端子定数は左から、コイル、コンデンサ、コイルの順に四端子回路を T(ティー)型接続したと考え、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3s}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4s}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+2s^2 & \frac{3s}{2} \\ \frac{4s}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 1+2s^2 & \frac{s}{2}+s^3+\frac{3s}{2} \\ \frac{4s}{3} & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 2s^2+1 & s^3+2s \\ \frac{4s}{3} & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}
$$

となります。A の位置に伝達関数逆数の偶関数部分、B の位置に同じく奇関数部分が出ています。R_2 の 1Ω がついた時の総合的な四端子定数は、

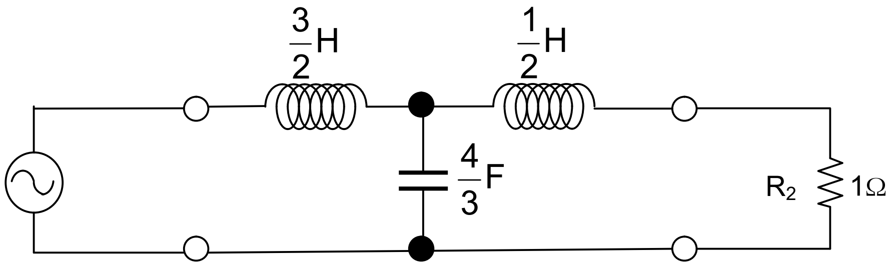
$$
\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2s^2+1 & s^3+2s \\ \frac{4s}{3} & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 2s^2+1+s^3+2s & s^3+2s \\ \frac{4s}{3}+\frac{2s^2}{3}+1 & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} s^3+2s^2+2s+1 & s^3+2s \\ \frac{2s^2}{3}+\frac{4s}{3}+1 & \frac{2s^2}{3}+1 \end{bmatrix}
$$

となります。総合的な四端子定数の A の位置の値は、伝達関数の逆数と一致しています。

最終的な回路は下図になります。信号源の内部抵抗は 0 です。



例題 2ー(2)

0ーR 型で通過域の許容うねり 3dB、3 次チェビシェフフィルターを設計して下さい。

伝達関数は、

$$
\frac{0.29862}{s+0.29862}\bullet\frac{0.83917}{s^2+0.29862s+0.83917}
$$

$$=\frac{0.25059}{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}$$

です。分子は角周波数 0 つまり s＝0 で利得を 1 にする為の係数です。

答

伝達関数の逆数を求めますと、

$$\frac{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}{0.25059}$$
$$=3.99058s^3+2.38334s^2+3.70462s+1$$

になります。

式の中の偶関数部分は、$2.38334s^2+1$です。

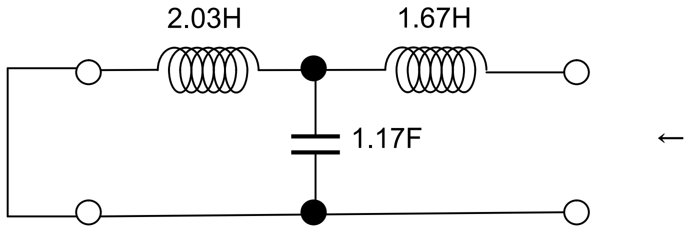
奇関数部分は、$3.99058s^3+3.70462s$ です。

したがって、はしご回路の出力リアクタンスを$\dfrac{3.99058s^3+3.70462s}{2.38334s^2+1}$と決めます。

出力リアクタンスを連分数にします。分子を分母で割って行きます。分子の次数が分母より小さい場合は逆数分の 1 に直してから割って行きます。したがって連分数は、

$$\frac{3.99058s^3+3.70462s}{2.38334s^2+1}=1.67436s+\frac{2.03026s}{2.38334s^2+1}$$
$$=1.67436s+\frac{1}{\dfrac{2.38334s^2+1}{2.03026s}}=1.67436s+\frac{1}{1.17391s+\dfrac{1}{2.03026s}}$$
$$=1.67436s+\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{1.17391s}}+\dfrac{1}{2.03026s}}$$

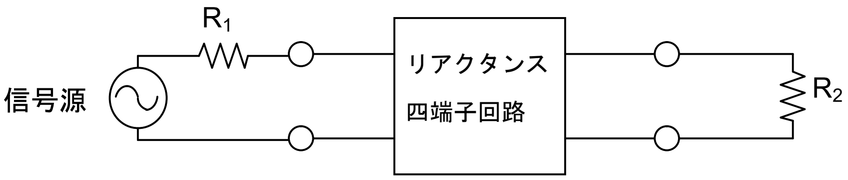
です。このリアクタンスは、出力リアクタンスとして右から左を見ているものです。回路も右から左へ作ります。1.67s のリアクタンスが有り、その後ろに$\dfrac{1}{1.17s}$と 2.03s のリアクタンスの並列回路が接続されている事が分ります。つまり 1.67H のコイルの後に、1.17F コンデンサと、2.03H コイルの並列回路が入ったものになります。回路図は、



となります。R_1＝0 ですので、入力は短絡されています。

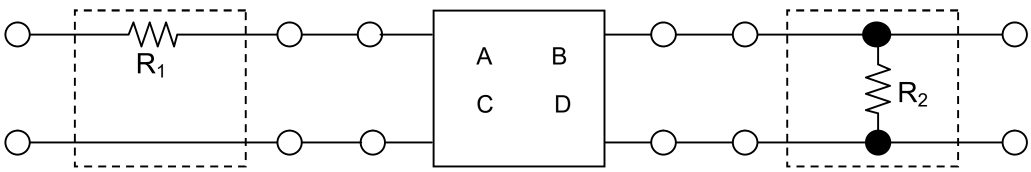
この回路を実際の周波数、実用的な素子値に持っていくスケーリングの例は、次章「はしご型 LC フィルターのスケーリング」の 2、をご覧下さい。

3、R－R 型フィルターの設計



信号源の内部抵抗を R_1、フィルターの負荷を R_2 とした場合のフィルターです。R_2 が負荷抵抗ですから、R_2 より右側は高インピーダンス回路がつながっています。

下図のように、リアクタンス四端子回路の手前に R_1 の四端子回路が、後ろに R_2 の四端子回路がつながっていると考えます。



この回路の全体の四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} A + R_1C & B + R_1D \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A + R_1C + \dfrac{B + R_1D}{R_2} & B + R_1D \\ C + \dfrac{D}{R_2} & D \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A + \dfrac{1}{R_2}B + R_1C + \dfrac{R_1}{R_2}D & B + R_1D \\ C + \dfrac{D}{R_2} & D \end{bmatrix}
$$

です。全体の四端子定数の A の位置にある、

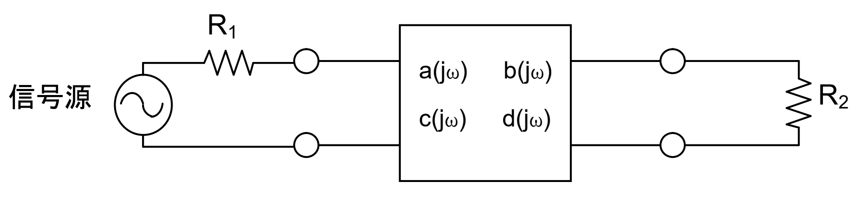
$$
A + \frac{1}{R_2}B + R_1C + \frac{R_1}{R_2}D \quad \cdot\cdot\cdot ①
$$

が、この時の $\dfrac{V_1}{V_2}$ を表します。ただし、A の位置の値が $\dfrac{V_1}{V_2}$ を表すのは、$I_2=0$ の時です。R_2 より右側は、開放とみなされるほど高インピーダンスでなければいけません。「四端子回路について」の章の 2、(1) A の求め方をご参照下さい。

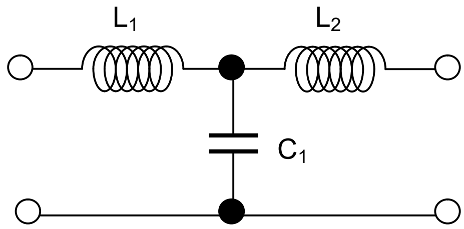
全体の四端子定数、A の位置の値は、A、B、C、D 総がらみです。R－∞型、0－R 型のように簡単ではありません。

①式と、「R_1 R_2 を付け加え利得の変化した伝達関数」の逆数が一致するように、リアクタンス四端子回路（四角形の中）のみの四端子定数 A、B、C、D を決めれば、R－R 型フィルタ用のリアクタンス四端子回路が出来ます。

A、B、C、D はリアクタンス四端子定数であり、ラプラスの世界での s の付くリアクタンスですから、s＝jω をおこなって、交流理論の世界のリアクタンスに移行することが出来ます。次のような四端子回路を考え、最後に再び s の世界に戻すことにします。



実際の回路で s＝jω を行った場合の四端子定数を求めますと、



$$\begin{bmatrix} a(j\omega) & b(j\omega) \\ c(j\omega) & d(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\omega^2 L_1 C_1 & j\omega L_1 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\omega^2 L_1 C_1 & j\omega L_2 - j\omega^3 L_1 L_2 C_1 + j\omega L_1 \\ j\omega C_1 & -\omega^2 L_2 C_1 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega^2 L_1 C_1 + 1 & j(-\omega^3 L_1 L_2 C_1 + \omega L_1 + \omega L_2) \\ j\omega C_1 & -\omega^2 L_2 C_1 + 1 \end{bmatrix}$$

になります。「四端子回路について」の章の 6、(3)で述べましたが、リアクタンスだけの四端子回路では、A と D は s の偶関数、B と C は s の奇関数です。A と D に s＝jω を行うと j が消えます。B と C に s＝jω を行うと j が残ります。つまり、

A→a(ω)、B→jb(ω)、C→jc(ω)、D→d(ω)

になります。これを①式に代入しますと、

$$\frac{V_1}{V_2} = a(\omega) + \frac{R_1}{R_2} d(\omega) + j\{\frac{b(\omega)}{R_2} + R_1 c(\omega)\}$$

になります。「R_1 R_2 を付け加え利得の変化した伝達関数」を逆数 $\frac{V_1}{V_2}$ にして、同じく s＝jω を行いますと、

$$\frac{V_1}{V_2} = g(\omega) + ju(\omega)$$

になります。伝達関数逆数の偶関数部分、つまり 0 乗を含む s の偶数乗部分は、j 無しの式になります。伝達関数逆数の奇関数部分、つまり s の奇数乗部分は、j 有りの式になります。

上の 2 つの式を同じにするために、

$$g(\omega)=a(\omega)+\frac{R_1}{R_2}d(\omega)\ \cdot\cdot\cdot ②$$

$$u(\omega)=\frac{b(\omega)}{R_2}+R_1c(\omega)\ \cdot\cdot\cdot ③$$

と置きます。リアクタンス四端子回路では次の式も成り立ちます。

$$a(\omega)d(\omega)+b(\omega)c(\omega)=1\ \cdot\cdot\cdot ④$$

ラプラスの世界の s の四端子定数、および s＝jω を行った交流回路の四端子定数の場合は、AD－BC＝1 が成り立ちます。「四端子回路について」の章の 1、と 7、をご参照下さい。

s＝jω を行った後、j をはがして b(ω)×c(ω)を行いますと j×j＝－1 が無くなる為、足し算で成り立ちます。先程リアクタンス四端子回路で s＝jω を行った後で求めた四端子定数でお試し下さい。

(1) d(ω)の計算

②式の $\frac{R_1}{R_2}d(\omega)$ を移項します。

$$a(\omega)=g(\omega)-\frac{R_1}{R_2}d(\omega)\ \cdot\cdot\cdot ⑤$$

この⑤式を④式に代入しますと、

$$\{g(\omega)-\frac{R_1}{R_2}d(\omega)\}d(\omega)+b(\omega)c(\omega)=1$$

$$g(\omega)d(\omega)-\frac{R_1}{R_2}d^2(\omega)+b(\omega)c(\omega)=1$$

になります。左辺を全部右辺に移項しますと、

$$\frac{R_1}{R_2}d^2(\omega)-g(\omega)d(\omega)+1-b(\omega)c(\omega)=0$$

になります。これは d(ω)の 2 次方程式ですので、

$$d(\omega)=\frac{g(\omega)\pm\sqrt{g^2(\omega)-4\frac{R_1}{R_2}\{1-b(\omega)c(\omega)\}}}{2\frac{R_1}{R_2}}=\frac{g(\omega)\pm P(\omega)}{2\frac{R_1}{R_2}} \quad ・・・⑥$$

となります。d(ω)を求める式が出来ました。ここで、

$$P(\omega)=\sqrt{g^2(\omega)-4\frac{R_1}{R_2}\{1-b(\omega)c(\omega)\}}$$

とします。⑥式の d(ω)は偶関数であり g(ω)も偶関数ですので、P(ω)も偶関数でなければなりません。偶関数＋偶関数＝偶関数、偶関数－偶関数＝偶関数、偶関数÷偶関数＝偶関数、定数＝偶関数だからです。

　また、リアクタンス四端子回路の四端子定数は、四則演算のみで作られています。したがって d(ω)は有理関数（ルートが付かない式）ですから、P(ω)も有理関数でなければなりません。ルートの中は、

$$P^2(\omega)=g^2(\omega)-4\frac{R_1}{R_2}\{1-b(\omega)c(\omega)\} \quad ・・・⑦$$

のように、有理関数 P(ω)の 2 乗の形で表されるはずです。次の(2)で使うので、ここで⑦式の加工を行っておきます。④式より $1-b(\omega)c(\omega)=a(\omega)d(\omega)$ ですから、⑦式は、

$$P^2(\omega)=g^2(\omega)-\frac{4R_1}{R_2}a(\omega)d(\omega)$$

$$\frac{4R_1}{R_2}a(\omega)d(\omega)=g^2(\omega)-P^2(\omega)$$

$$a(\omega)d(\omega)=\frac{R_2}{4R_1}\{g^2(\omega)-P^2(\omega)\} \quad ・・・⑧$$

(2) c(ω)の計算

　次に③式の両辺に R_2 を掛け移項しますと、

$$R_2u(\omega)=b(\omega)+R_1R_2c(\omega)$$

$$b(\omega)=R_2u(\omega)-R_1R_2c(\omega)$$

になります。この b(ω)を④式の$a(\omega)d(\omega)+b(\omega)c(\omega)=1$に代入し、

$$a(\omega)d(\omega)+\{R_2u(\omega)-R_1R_2c(\omega)\}c(\omega)=1$$
$$a(\omega)d(\omega)+R_2u(\omega)c(\omega)-R_1R_2c^2(\omega)=1$$

左辺を全部右辺に移項しますと、

$$R_1R_2c^2(\omega)-R_2u(\omega)c(\omega)-a(\omega)d(\omega)+1=0 \quad ・・・⑨$$

になります。先程計算しておきました⑧式を⑨式に代入しますと、

$$R_1R_2c^2(\omega)-R_2u(\omega)c(\omega)-\frac{R_2}{4R_1}\{g^2(\omega)-P^2(\omega)\}+1=0$$
$$R_1R_2c^2(\omega)-R_2u(\omega)c(\omega)+\frac{R_2}{4R_1}\{P^2(\omega)-g^2(\omega)+\frac{4R_1}{R_2}\}=0$$

になります。両辺に$\frac{1}{R_2}$を掛けますと、

$$R_1c^2(\omega)-u(\omega)c(\omega)+\frac{1}{4R_1}\{P^2(\omega)-g^2(\omega)+\frac{4R_1}{R_2}\}=0$$

になります。これは c(ω)の 2 次方程式なので、

$$c(\omega)=\frac{u(\omega)\pm\sqrt{u^2(\omega)-\{P^2(\omega)-g^2(\omega)+\frac{4R_1}{R_2}\}}}{2R_1}=\frac{u(\omega)\pm Q(\omega)}{2R_1} \quad ・・・⑩$$

となり c(ω)を求める式が出来ました。ここで、

$$Q(\omega)=\sqrt{u^2(\omega)-\{P^2(\omega)-g^2(\omega)+\frac{4R_1}{R_2}\}}$$

とします。⑩式の c(ω)は奇関数であり、u(ω)も奇関数ですので、Q(ω)も奇関数でなければなりません。奇関数＋奇関数＝奇関数、奇関数－奇関数＝奇関数、奇関数÷偶関数＝奇関数、

定数＝偶関数だからです。

c(ω)も d(ω)と同様に、四則演算のみで作られているリアクタンス四端子回路の四端子定数ですから、有理関数（ルートが付かない式）です。Q(ω)も有理関数でなければなりません。

ルートの中は、

$$Q^2(\omega) = u^2(\omega) - \{P^2(\omega) - g^2(\omega) + \frac{4R_1}{R_2}\}$$

$$= u^2(\omega) - P^2(\omega) + g^2(\omega) - \frac{4R_1}{R_2}$$

$$= u^2(\omega) + g^2(\omega) - P^2(\omega) - \frac{4R_1}{R_2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑪$$

のように有理関数 Q(ω)の 2 乗の形で表されるはずです。

(3) $P^2(\omega)+Q^2(\omega)$の計算

⑪式の $P^2(\omega)$を移項して、

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = g^2(\omega) + u^2(\omega) - \frac{4R_1}{R_2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑫$$

となり、$P^2(\omega)+Q^2(\omega)$を求める式が出来ます。$P^2(\omega)$を⑦式で求めようとしても、これから求めようとする b(ω)、c(ω)が入っているので求めることが出来ません。$Q^2(\omega)$を⑪式で求めようとしても、その $P^2(\omega)$が入っているので求めることが出来ません。$P^2(\omega)$と $Q^2(\omega)$は、$P^2(\omega)+Q^2(\omega)$という和の形でしか求めることが出来ません。

「R_1 R_2 を付け加え利得の変化した伝達関数」を、逆数 $\frac{V_1}{V_2}$ にして s＝jω を行ったものが、g(ω)＋ju(ω)でした。（15 ページ）

⑫式の $g^2(\omega)+u^2(\omega)$は、実数部の 2 乗＋虚数部の 2 乗で、複素数の絶対値の 2 乗を表わしています。複素数の絶対値の 2 乗は、複素数とその共役（きょうやく）を掛け合わせても求まるのでした。

g(ω)＋ju(ω)の共役は g(ω)－ju(ω)です。「R_1 R_2 を付け加え利得の変化した伝達関数」の逆数に s＝－jω を行えば、g(ω)－ju(ω)になります。

{ g(ω)＋ju(ω) }×{ g(ω)－ju(ω) }を行えば、$g^2(\omega)+u^2(\omega)$が求まります。

「R_1 R_2 を付け加え利得の変化した伝達関数」の逆数に、s＝jω と s＝－jω を代入し、掛け合わせ、周波数伝達関数の逆数の絶対値の 2 乗を求め、そこから $\frac{4R_1}{R_2}$ を引きます。

その式を「偶関数の 2 乗＋奇関数の 2 乗」に作り直すことによって、偶関数の 2 乗部分は $P^2(\omega)$、奇関数の 2 乗部分は $Q^2(\omega)$となり、その平方根が $P(\omega)$ 、$Q(\omega)$となります。

(4) a(ω)、b(ω)、c(ω)、d(ω)を求める

探求した P(ω)により、⑥式の計算を行い d(ω)を求めます。

$$d(\omega) = \frac{g(\omega) \pm P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}}$$

d(ω)の結果を⑤式に代入すれば、a(ω)が求まります。

$$a(\omega) = g(\omega) - \frac{R_1}{R_2} d(\omega)$$

$$a(\omega) = g(\omega) - \frac{R_1}{R_2} \bullet \frac{g(\omega) \pm P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}}$$

$$a(\omega) = g(\omega) - \frac{g(\omega) \pm P(\omega)}{2}$$

$$a(\omega) = \frac{2g(\omega)}{2} - \frac{g(\omega) \pm P(\omega)}{2}$$

$$a(\omega) = \frac{2g(\omega) - \{ g(\omega) \pm P(\omega) \}}{2}$$

$$a(\omega) = \frac{2g(\omega) - g(\omega) \mp P(\omega)}{2}$$

$$a(\omega) = \frac{g(\omega) \mp P(\omega)}{2}$$

探求した Q(ω)により、⑩式の計算を行い c(ω)を求めます。

$$c(\omega) = \frac{u(\omega) \pm Q(\omega)}{2R_1}$$

c(ω)の結果を⑧式に代入すれば、b(ω)が求まります。

$$b(\omega) = R_2 u(\omega) - R_1 R_2 c(\omega)$$

$$b(\omega)=R_2\{u(\omega)-R_1c(\omega)\}$$

$$b(\omega)=R_2\{u(\omega)-R_1\frac{u(\omega)\pm Q(\omega)}{2R_1}\}$$

$$b(\omega)=R_2\{u(\omega)-\frac{u(\omega)\pm Q(\omega)}{2}\}$$

$$b(\omega)=R_2\{\frac{2u(\omega)}{2}-\frac{u(\omega)\pm Q(\omega)}{2}\}$$

$$b(\omega)=R_2\frac{2u(\omega)-\{u(\omega)\pm Q(\omega)\}}{2}$$

$$b(\omega)=R_2\frac{2u(\omega)-u(\omega)\mp Q(\omega)}{2}$$

$$b(\omega)=R_2\frac{u(\omega)\mp Q(\omega)}{2}$$

したがって、求めるリアクタンス四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega)\mp P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega)\mp Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega)\pm Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega)\pm P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}\quad\cdots⑬$$

になります。計算過程から a(ω)と d(ω)は複号同順です。a(ω)でーの符号を使用したら、d(ω)では＋の符号を使います。a(ω)で＋の符号を使用したら、d(ω)ではーの符号を使います。同じく jb(ω)と jc(ω)も複号同順です。a(ω)、d(ω)、jb(ω)、jc(ω)の順で、ー＋ー＋、＋ー＋ー、＋ーー＋、ー＋＋ーの 4 種類の解があります。

実際の計算では、⑬式ではー＋ー＋だけを使い、P(ω) Q(ω)は平方根の為それぞれ±がありますので、P(ω)＝＋P(ω) 、Q(ω)＝＋Q(ω) を代入する場合と、P(ω)＝ーP(ω) 、Q(ω)＝ーQ(ω)を代入する場合だけで済ましています。（次ページからの例題をご参照下さい。）

この実現方法を PQ 法と呼んでいます。宮田房近氏が 1941 年に発表されました。

求めたリアクタンス四端子定数は、s＝jω を行った交流理論の世界のものです。最後に、$\omega=\frac{s}{j}=-js$ で a(ω)、jb(ω)、jc(ω)、d(ω)をラプラスの世界のリアクタンス A、B、C、D に戻します。こうして、R―R 型フィルター用のリアクタンス四端子定数（四角形の中身）が出来ます。

(4) 回路の決定

四端子定数が分ると回路を決めることが出来ます。R_2 が接続された状態で、R_1 の右から右を見たインピーダンスは、四端子定数を使って、

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{(AR_2+B)I_2}{(CR_2+D)I_2}=\frac{AR_2+B}{CR_2+D}$$

と表わされます。「四端子回路について」の章 4、をご参照下さい。この入力インピーダンスを連分数に直し、はしご回路を構成します。

その後、周波数スケーリングで実周波数に持って来ます。さらに素子値スケーリングを行い、素子値を実用的な範囲にまとめます。スケーリング関係は、スケーリングの章及びはしご型 LC フィルタのスケーリングの章をご参照下さい。

例題 3ー(1)

R−R 型で 3 次バタワースフィルターを設計して下さい。伝達関数は $\dfrac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$ です。

R_1＝1Ω、R_2＝1Ω、$\dfrac{R_1}{R_2}=1$ です。

答

R_1ーR_2 回路の $\dfrac{R_1}{R_2}=1$ では、角周波数 0 において必然的に $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{1}{2}$ の減衰が起こります。

したがって伝達関数にこの値を掛け、「R_1 R_2 を付け加え利得の変化した伝達関数」は、$\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$ です。伝達関数の逆数は、$2(s^3+2s^2+2s+1)$となります。s に $j\omega$ を代入しますと。

$$\left[2(s^3+2s^2+2s+1)\right]_{s=j\omega}=2(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4(j\omega)+2$$

$$=-2j\omega^3-4\omega^2+4j\omega+2$$

$$=-4\omega^2+2+j(-2\omega^3+4\omega)$$

になり $g(\omega)=-4\omega^2+2$ と $u(\omega)=-2\omega^3+4\omega$ が分ります。さらに s にー$j\omega$ を代入しますと、

$$\left[2(s^3+2s^2+2s+1)\right]_{s=-j\omega}=2(-j\omega)^3+4(-j\omega)^2+4(-j\omega)+2$$

$$= 2j\omega^3 - 4\omega^2 - 4j\omega + 2$$
$$= -4\omega^2 + 2 - j(-2\omega^3 + 4\omega)$$

になります。両者を掛け合わせることにより、周波数伝達関数の逆数の絶対値の 2 乗を求めますと、

$$\{-4\omega^2 + 2 + j(-2\omega^3 + 4\omega)\}\{-4\omega^2 + 2 - j(-2\omega^3 + 4\omega)\}$$
$$= (-4\omega^2 + 2)^2 + (-2\omega^3 + 4\omega)^2$$
$$= 16\omega^4 - 16\omega^2 + 4 + 4\omega^6 - 16\omega^4 + 16\omega^2$$
$$= 4\omega^6 + 4$$

になります。$P^2(\omega)$+$Q^2(\omega)$は、ここから $\frac{4R_1}{R_2} = 4$ を引いたものですから、

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = 4\omega^6 + 4 - 4 = 4\omega^6$$

となります。この $P^2(\omega) + Q^2(\omega) = 4\omega^6$ を分析しますと、

(1) 偶関数の 2 乗は無いので $P^2(\omega)=0$ となります。

(2) 奇関数の 2 乗が有り、$Q^2(\omega)=4\omega^6$ となります。

(3) 2 乗をはずして $P(\omega)=0$、$Q(\omega)=\pm 2\omega^3$ が求まります。

したがって、$P(\omega)=0$、$Q(\omega)=+2\omega^3$、$R_1=R_2=1\Omega$ のとき、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega) - P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega) - Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega) + Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega) + P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4\omega^2 + 2}{2} & j\dfrac{-2\omega^3 + 4\omega - 2\omega^3}{2} \\ j\dfrac{-2\omega^3 + 4\omega + 2\omega^3}{2} & \dfrac{-4\omega^2 + 2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\omega^2 + 1 & j(-2\omega^3 + 2\omega) \\ j2\omega & -2\omega^2 + 1 \end{bmatrix}$$

となります。$\omega = \frac{s}{j} = -js$ で $a(\omega)$、$jb(\omega)$、$jc(\omega)$、$d(\omega)$を、ラプラスの世界のリアクタンス A、B、C、D に移しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\omega^2+1 & j(-2\omega^3+2\omega) \\ j2\omega & -2\omega^2+1 \end{bmatrix}_{\omega=-js}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(-js)^2+1 & j\{-2(-js)^3+2(-js)\} \\ j2(-js) & -2(-js)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2s^2+1 & 2s^3+2s \\ 2s & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

になります。R_2が接続された状態で、R_1の右から右を見た入力インピーダンスを求める式、

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(AR_2+B)I_2}{(CR_2+D)I_2} = \frac{AR_2+B}{CR_2+D}$$

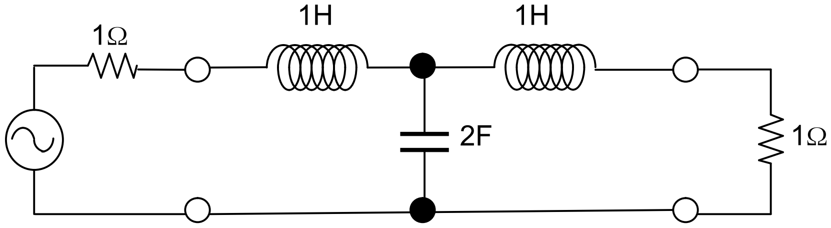
に代入し、さらに入力インピーダンスを連分数に直しますと、

$$Z_{in} = \frac{2s^2+1+2s^3+2s}{2s+2s^2+1} = \frac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1} = s + \frac{s+1}{2s+2s^2+1}$$

$$= s + \cfrac{1}{\cfrac{2s^2+2s+1}{s+1}} = s + \cfrac{1}{2s+\cfrac{1}{s+1}} = s + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{2s}}+\cfrac{1}{s+1}}$$

になります。s のリアクタンスが有り、その後ろにに$\frac{1}{2s}$のリアクタンスと s+1 のリアクタンスが並列接続されている事が分ります。

つまり 1H のコイルの後に、2F のコンデンサと並列に、1H のコイルと 1Ω の抵抗 R_2の直列回路が入ったものになります。R_1も含めた総合的な回路図は、



となります。出力は 1Ω の両端から電圧で取り出します。電流は取り出せません。

$P(\omega)=0$、$Q(\omega)=-2\omega^3$、$R_1=R_2=1\Omega$ のときは、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega)-P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega)-Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega)+Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega)+P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4\omega^2+2}{2} & j\dfrac{-2\omega^3+4\omega+2\omega^3}{2} \\ j\dfrac{-2\omega^3+4\omega-2\omega^3}{2} & \dfrac{-4\omega^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\omega^2+1 & j2\omega \\ j(-2\omega^3+2\omega) & -2\omega^2+1 \end{bmatrix}$$

になります。$\omega = \dfrac{s}{j} = -js$ で a(ω)、jb(ω)、jc(ω)、d(ω)を、ラプラスの世界のリアクタンス A、B、C、D に移しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\omega^2+1 & j2\omega \\ j(-2\omega^3+2\omega) & -2\omega^2+1 \end{bmatrix}_{\omega=-js}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(-js)^2+1 & j2(-js) \\ j\{-2(-js)^3+2(-js)\} & -2(-js)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2s^2+1 & 2s \\ 2s^3+2s & 2s^2+1 \end{bmatrix}$$

となります。R_2 が接続された状態で、R_1 の右から右を見た入力インピーダンスを求める式、

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(AR_2+B)I_2}{(CR_2+D)I_2} = \frac{AR_2+B}{CR_2+D}$$

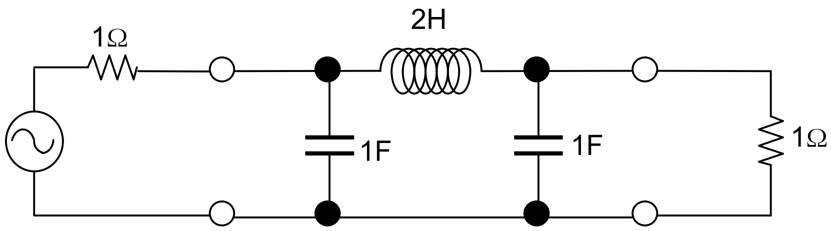
に代入し、さらに入力インピーダンスを連分数に直しますと、

$$Z_{in} = \frac{2s^2+1+2s}{2s^3+2s+2s^2+1} = \frac{2s^2+2s+1}{2s^3+2s^2+2s+1} = \frac{1}{\dfrac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}}$$

$$= \frac{1}{s + \frac{s+1}{2s + 2s^2 + 1}} = \frac{1}{s + \frac{1}{\frac{2s+2s^2+1}{s+1}}} = \frac{1}{s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{s}} + \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{s}} + \frac{1}{1}}}}$$

になります。$\frac{1}{s}$のリアクタンスと、$\frac{1}{s}$と 1Ω の並列が 2s と直列になったものが、並列で入る事が分ります。

つまり 1F のコンデンサが並列に入り、2H コイルが入った後に、1F コンデンサと R_2が並列に入ったものになります。R_1も含めた総合的な回路図は、



となります。

例題 3ー(2)

R－R 型で通過域の許容うねり 3dB、3 次チェビシェフフィルターを設計して下さい。

伝達関数は、

$$\frac{0.29862}{s + 0.29862} \bullet \frac{0.83917}{s^2 + 0.29862s + 0.83917}$$

$$= \frac{0.25059}{s^3 + 0.59724s^2 + 0.92834s + 0.25059}$$

です。分子は角周波数 0 つまり s＝0 で利得を 1 にする為の係数です。

R_1＝1Ω、R_2＝1Ω、$\frac{R_1}{R_2} = 1$です。

答

R_1ーR_2回路の$\frac{R_1}{R_2} = 1$では、角周波数 0 において必然的に$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$の減衰が起こります。

この値を掛け、「R_1 R_2を付け加え利得の変化した伝達関数」は、

$\frac{1}{2}\bullet\frac{0.25059}{s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059}$ です。伝達関数の逆数を求めますと、

$$\frac{2(s^3+0.59724s^2+0.92834s+0.25059)}{0.25059}$$
$$=2(3.99058s^3+2.38334s^2+3.70462s+1)$$

となります。伝達関数の逆数の s に jω を代入しますと、

$$\left[2(3.99058\ s^3+2.38334\ s^2+3.70462\ s+1)\right]_{s=j\omega}$$
$$=7.98116(j\omega)^3+4.76668(j\omega)^2+7.40924(j\omega)+2$$
$$=-7.98116\,j\omega^3-4.76668\,\omega^2+7.40924\,j\omega+2$$
$$=-4.76668\,\omega^2+2+j(-7.98116\,\omega^3+7.40924\,\omega)$$

になり、$g(\omega)=-4.76668\,\omega^2+2$ と $u(\omega)=-7.98116\ \omega^3+7.40924\ \omega$ が分ります。

さらに s に－jω を代入しますと、

$$\left[2(3.99058\ s^3+2.38334\ s^2+3.70462\ s+1)\right]_{s=-j\omega}$$
$$=7.98116(-j\omega)^3+4.76668(-j\omega)^2+7.40924(-j\omega)+2$$
$$=7.98116\,j\omega^3-4.76668\,\omega^2-7.40924\,j\omega+2$$
$$=-4.76668\omega^2+2-j(-7.98116\omega^3+7.40924\omega)$$

になります。両者を掛け合わせることにより周波数伝達関数の逆数の絶対値の 2 乗を求めますと、

$$\{-4.76668\ \omega^2+2+j(-7.98116\ \omega^3+7.40924\ \omega)\}$$
$$\bullet\{-4.76668\omega^2+2-j(-7.98116\omega^3+7.40924\omega)\}$$

$$= (-4.76668\omega^2 + 2)^2 + (-7.98116\omega^3 + 7.40924\omega)^2$$

$$= 22.72124\omega^4 - 19.06672\omega^2 + 4 + 63.69891\omega^6 - 118.26866\omega^4 + 54.89684\omega^2$$
$$= 63.69891\omega^6 - 95.54742\omega^4 + 35.83012\omega^2 + 4$$

になりました。$P^2(\omega)$+$Q^2(\omega)$は、ここから$\dfrac{4R_1}{R_2} = 4$を引いたものですから、

$$\begin{aligned} P^2(\omega) + Q^2(\omega) &= 63.69891\omega^6 - 95.54742\omega^4 + 35.83012\omega^2 + 4 - 4 \\ &= 63.69891\omega^6 - 95.54742\omega^4 + 35.83012\omega^2 \\ &= (7.98116\omega^3 - 5.98583\omega)^2 \end{aligned}$$

となります。$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = (7.98116\omega^3 - 5.98583\omega)^2$ を分析しますと、

(1) 偶関数の 2 乗は、$P^2 = 0$ となります。
(2) 奇関数の 2 乗は、$Q^2 = (7.98116\omega^3 - 5.98583\omega)^2$ となります。
(3) 2 乗をはずして $P(\omega)$＝0、$Q = \pm(7.98116\omega^3 - 5.98583\omega)$ が求まります。

したがって、$P(\omega)$＝0、$Q = +(7.98116\omega^3 - 5.98583\omega)$、$R_1$＝$R_2$＝1Ω のとき、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega) - P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega) - Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega) + Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega) + P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4.76668\omega^2 + 2}{2} & j\dfrac{-7.98116\omega^3 + 7.40924\omega - (7.98116\omega^3 - 5.98583\omega)}{2} \\ j\dfrac{-7.98116\omega^3 + 7.40924\omega + 7.98116\omega^3 - 5.98583\omega}{2} & \dfrac{-4.76668\omega^2 + 2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4.76668\omega^2 + 2}{2} & j\dfrac{-15.96232\omega^3 + 13.39507\omega}{2} \\ j\dfrac{1.42341\omega}{2} & \dfrac{-4.76668\omega^2 + 2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.38334\omega^2 + 1 & j(-7.98116\omega^3 + 6.69754\omega) \\ j0.71171\omega & -2.38334\omega^2 + 1 \end{bmatrix}$$

となります。$\omega = \frac{s}{j} - js$ で a(ω)、jb(ω)、jc(ω)、d(ω)を、ラプラスの世界のリアクタンス A、B、C、D に移しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.38334\ \omega^2 + 1 & j(-7.98116\ \omega^3 + 6.69754\ \omega) \\ j0.71171\ \omega & -2.38334\ \omega^2 + 1 \end{bmatrix}_{\omega = -js}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.38334\ (-js)^2 + 1 & j\{-7.98116\ (-js)^3 + 6.69754\ (-js)\} \\ j0.71171(-js) & -2.38334\ (-js)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.38334\ s^2 + 1 & 7.98116s^3 + 6.69754\ s \\ 0.71171\ s & 2.38334\ s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

になります。R_2が接続された状態で、R_1の右から右を見た入力インピーダンスを求める式、

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(AR_2 + B)I_2}{(CR_2 + D)I_2} = \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D}$$

に代入し、さらに入力インピーダンスを連分数に直しますと、

$$Z_{in} = \frac{2.38334\ s^2 + 1 + 7.98116s^3 + s}{0.71171\ s + 2.38334\ s^2 + 1} = \frac{7.98116\ s^3 + 2.38334\ s^2 + 6.69754\ s + 1}{2.38334\ s^2 + 0.71171\ s + 1}$$

$$= 3.34873\ s + \frac{3.34881\ s + 1}{2.38334\ s^2 + 0.71171\ s + 1}$$

$$= 3.34873\ s + \frac{1}{\dfrac{2.38334\ s^2 + 0.71171\ s + 1}{3.34881\ s + 1}}$$

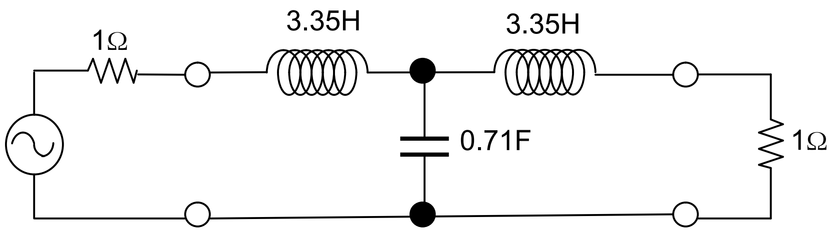
$$= 3.34873\ s + \frac{1}{0.71170\ s + \dfrac{1}{3.34881\ s + 1}}$$

$$= 3.34873\ s + \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{0.71170\ s}} + \dfrac{1}{3.34881\ s + 1}}$$

になります。3.35s のリアクタンスが有り、その後ろにに$\frac{1}{0.71s}$のリアクタンスと 3.35s＋1 のリアクタンスが並列接続されている事が分ります。

つまり 3.35H のコイルの後に、0.71F のコンデンサと並列に、3.35H のコイルと 1Ω の抵抗 R_2 の直列回路が入ったものになります。

R_1 も含めた総合的な回路図は、



となります。

$P(\omega)=0$、$Q=-(7.98116\ \omega^3-5.98583\ \omega)$、$R_1=R_2=1\Omega$ のときは、

$$\begin{bmatrix} a(\omega) & jb(\omega) \\ jc(\omega) & d(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g(\omega)-P(\omega)}{2} & jR_2\dfrac{u(\omega)-Q(\omega)}{2} \\ j\dfrac{u(\omega)+Q(\omega)}{2R_1} & \dfrac{g(\omega)+P(\omega)}{2\dfrac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4.76668\ \omega^2+2}{2} & j\dfrac{-7.98116\ \omega^3+7.40924\ \omega-(-7.98116\ \omega^3+5.98583\ \omega)}{2} \\ j\dfrac{-7.98116\ \omega^3+7.40924\ \omega-(7.98116\ \omega^3-5.98583\ \omega)}{2} & \dfrac{-4.76668\ \omega^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-4.76668\ \omega^2+2}{2} & j\dfrac{1.42341\ \omega}{2} \\ j\dfrac{-15.96232\ \omega^3+13.39507\ \omega}{2} & \dfrac{-4.76668\ \omega^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.38334\ \omega^2+1 & j0.71171\ \omega \\ j(-7.98116\ \omega^3+6.69754\ \omega) & -2.38334\ \omega^2+1 \end{bmatrix}$$

となります。$\omega=\dfrac{s}{j}=-js$ で $a(\omega)$、$jb(\omega)$、$jc(\omega)$、$d(\omega)$を、ラプラスの世界のリアクタンス A、B、C、D に移しますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.38334\ \omega^2+1 & j0.71171\ \omega \\ j(-7.98116\ \omega^3+6.69754\ \omega) & -2.38334\ \omega^2+1 \end{bmatrix}_{\omega=-js}$$

$$=\begin{bmatrix} -2.38334(-js)^2+1 & j0.71171(-js) \\ j\{-7.98116(-js)^3+6.69754(-js)\} & -2.38334(-js)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2.38334s^2+1 & 0.71171s \\ 7.98116s^3+6.69754s & 2.38334s^2+1 \end{bmatrix}$$

になります。R_2が接続された状態で、R_1の右から右を見た入力インピーダンスを求める式、

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{(AR_2+B)I_2}{(CR_2+D)I_2}=\frac{AR_2+B}{CR_2+D}$$

に代入し、さらに入力インピーダンスを連分数に直しますと、

$$Z_{in}=\frac{2.38334s^2+1+0.71171s}{7.98116s^3+6.69754s+2.38334s^2+1}$$

$$=\frac{2.38334s^2+0.71171s+1}{7.98116s^3+2.38334s^2+6.69754s+1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{7.98116s^3+2.38334s^2+6.69754s+1}{2.38334s^2+0.71171s+1}}$$

$$=\frac{1}{3.34873s+\dfrac{3.34881s+1}{2.38334s^2+0.71171s+1}}$$

$$=\frac{1}{3.34873s+\dfrac{1}{\dfrac{2.38334s^2+0.71171s+1}{3.34881s+1}}}$$

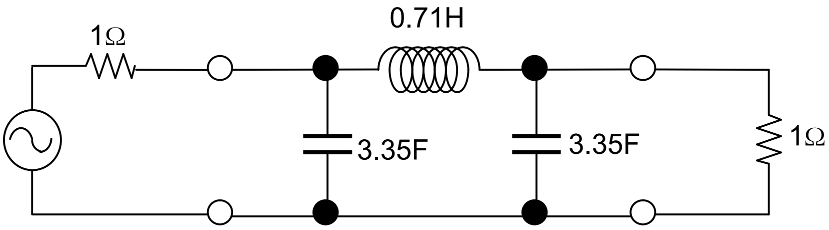
$$=\frac{1}{3.34873s+\dfrac{1}{0.71170s+\dfrac{1}{3.34881s+1}}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{3.34873s}}+\dfrac{1}{0.71170s+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{3.34881s}}+\dfrac{1}{1}}}}$$

になります。$\dfrac{1}{3.35s}$のリアクタンスと、$\dfrac{1}{3.35s}$と1Ωの並列が0.71sと直列になったもの

が、並列で入る事が分ります。

つまり 3.35F のコンデンサが並列に入り、0.71H コイルが入った後に、3.35F コンデンサと R_2 が並列に入ったものになります。R_1 も含めた総合的な回路図は、



となります。出力は 1Ω の両端から電圧で取り出します。電流は取り出せません。

例題 3ー(1)、例題 3ー(2)では両方とも P(ω)が 0 でしたが、0 では無い場合の例は「3 次ベッセル LC フィルターの設計」の章をご覧下さい。

目次へ戻る