双曲線関数について　　　　　　　　　　　　　　2022年10月16日　　目次へ戻る

2023.4.12　2023.4.24　訂正

実数変数の双曲線関数および双曲線関数合成公式の説明です。

(1) 直角双曲線

直角双曲線の方程式は、（何が直角なのかは、直ぐにあります。）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1\cdots①$$

です。両辺に a^2 を掛け、

$$x^2-y^2=a^2$$

移項しますと、

$$y^2=x^2-a^2$$

$$y=\pm\sqrt{x^2-a^2}\cdots②$$

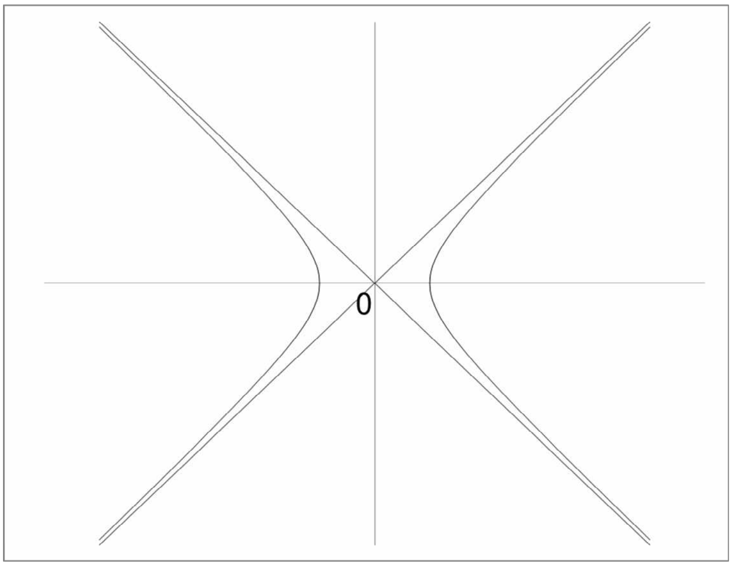
になり、x と y の関係式が出来ます。x も a も 2 乗しているので両者が負の時も y の値は同じです。y 軸で線対称になります。$x^2 \geqq a^2$ であり、y の値が虚数にならないとします。

ーa＜x＜＋a の、根号内が負になってしまう時の y 値は無いと考えて下さい。②式で x の値がはなはだしく大きくなった時、a^2 の値は無視出来、②式は近似的に、

$$y=\pm\sqrt{x^2}=\pm x$$

となります。これは原点を通る 45 度の右上がり、右下がりの 2 本の直線です。双曲線は x→＋∞または x→ー∞の極限で、この直線に一致します。2 本の直線は双曲線の漸近線です。2 本の漸近線が直交しますので、この様な双曲線を直角双曲線と呼びます。実数値に限って描いた双曲線と、y＝±x の漸近線グラフを図 1 に示します。

図 1



②式で x＝±a の時 y＝0 になり、そこが双曲線の先端です。（図２参照）a は原点から双曲線の先端までの、x 軸方向の距離となります。a の値により双曲線が左右に動きます。すると、ある x 地点から双曲線までの距離である y の値が変化します。x 値と y 値が指定された時、それに合った a 値を求めることが出来ます。例えば x の時 y になる双曲線は、x と y を①式に代入し、

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

両辺に a^2 を掛け、

$$x^2-y^2=a^2$$

$$a=\pm\sqrt{x^2-y^2}$$

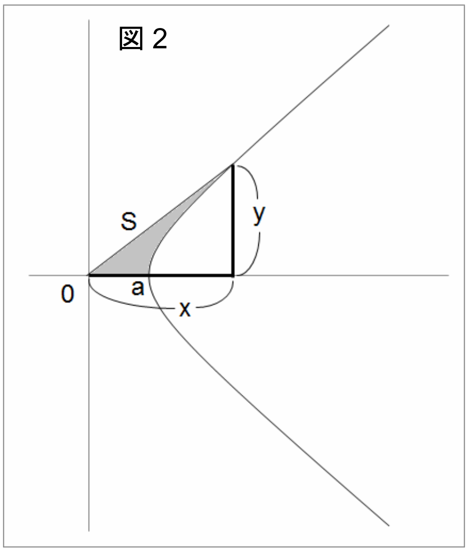
です。①式において a＝0 は無効であり、かつ a が虚数にならない様に x^2＞y^2 で考えます。

(2) 双曲線関数の定義

まず、図２の灰色部分の面積 S を求めます。S は x を底辺、y を高さとする三角形の面積から、双曲線の正の y 値 $\sqrt{x^2-a^2}$ を x＝a から x＝x まで積分した値を引いた面積であり、

$$S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y-\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}dx$$

です。



公式集により不定積分は、

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

ですので、a から x までの定積分は、

$$\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}dx=\left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]_a^x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e(x+\sqrt{x^2-a^2})-\left\{\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{a^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e(a+\sqrt{a^2-a^2})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e(x+\sqrt{x^2-a^2})-\left\{\frac{1}{2}\cdot a\cdot 0-\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e(a+0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e a$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \{ \mathrm{Log}_e (x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \mathrm{Log}_e a \}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

となります。途中、$\mathrm{Log}_e B - \mathrm{Log}_e A = \mathrm{Log}_e \left(\frac{B}{A} \right)$ を使いました。上式の第 1 項、$\sqrt{x^2 - a^2}$ を正の y に直しますと、

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

になります。上の式は a から x まで、双曲線の正の y 値を定積分した結果です。この結果を面積 S の式に代入しますと、

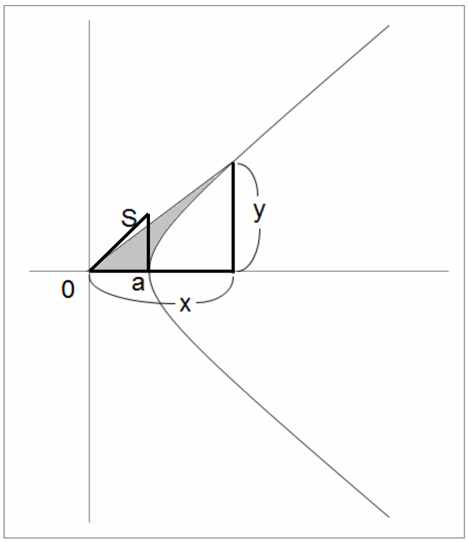
$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$$

$$= \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$$

図 3



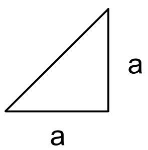
です。ここで括弧内の $x^2 - a^2 \geqq 0$ および $a > 0$ です（後述）ので、

$$= \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} \right)$$

$$= \frac{a^2}{2} \mathrm{Log}_e \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

と変形出来ます。y が負の場合は、面積 S は x 軸より下側になり、負の値になります。

次に、この式の両辺を $\frac{2}{a^2}$ 倍します。



原点から a までを
底辺とする
直角二等辺三角形

これは底辺および高さを a とする三角形の面積、$\frac{a^2}{2}$（図 3）で両辺を割ることと同じです。原点から a までを底辺とする直角二等辺三角形の面積 $\frac{a^2}{2}$ と、面積 S とを比較することになります。

$$S\cdot\frac{2}{a^2}=\frac{a^2}{2}\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\cdot\frac{2}{a^2}$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

です。$S\cdot\frac{2}{a^2}$ を φ（ファイ）と置けば、φ は面積 S が、直角二等辺三角形の面積 $\frac{a^2}{2}$ の何倍かを表す比になります。

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\quad\cdot\cdot\cdot③$$

です。φ は角度では無く面積の比です。関数電卓の角度のモードが、ディグリーでもラディアンでもグラードでも、双曲線関数の値は同じであることが証拠です。

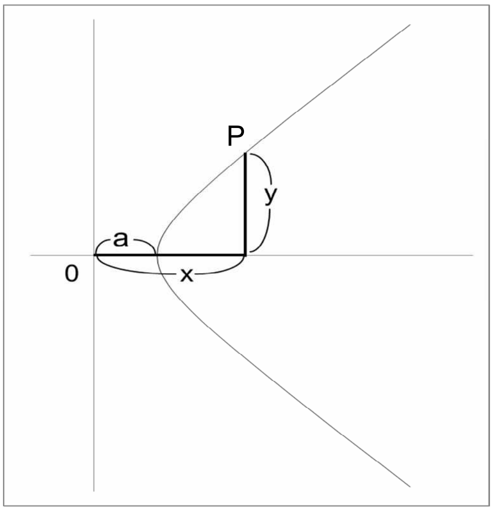
この φ は明らかに $\frac{x}{a}$ の関数ですが、逆に $\frac{x}{a}$ が φ の関数であると考えます。図 4 の P 点が動くことにより、S や φ が変化し、それにより $\frac{x}{a}$ が決定されると考えます。

$$\frac{x}{a}=\cosh\varphi\quad\cdot\cdot\cdot④$$

と書き、$\frac{x}{a}$ を φ の双曲線余弦 cosh と呼ぶことにしました。④式において cosh の変数に使う文字は自由です。本章では φ(ファイ)にしました。

$$x=a\cdot\cosh\varphi$$

図 4



です。cosh の正式な読み方はハイパボリックコサインです。Hyperbolic とは「双曲線的な」「双曲線の」と言う意味です。③式において、$\frac{x}{a}<1$ ですと $\frac{x^2}{a^2}-1<0$ となり、Log の真数

である括弧内が複素数になります。$\frac{x}{a}<1$ に対応する実数の φ は無いです。$\frac{x}{a}=\cosh\varphi$ の値は実数変数において 1 より小さくなりません。x は正と決めます。a も正とします。図 4 のグラフでは原点から左側の、x や a が負の部分は描きません。

図 4 で双曲線上の P 点が下に動き、x 軸上にある時 $\frac{x}{a}=\cosh\varphi=1$ で変数 $\varphi=0$ です。x 軸より下を動く時、φ はーφ となりますが、$\cosh(-\varphi)$ の値は $\cosh\varphi$ の時と同じ $\frac{x}{a}$ であり再び 1 以上になります。つまり cosh は偶関数であり、

$$\cosh(-\varphi)=\cosh\varphi$$

です。cosh は、同じ値になる変数が、φ とーφ の 2 つある二価の関数です。ーφ について以下の計算をしますと、

$$-\varphi=-\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$=0-\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e 1-\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{1}{\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}\right)\quad\cdots\quad \mathrm{Log}_e B-\mathrm{Log}_e A=\mathrm{Log}_e\left(\frac{B}{A}\right)\text{を使用}$$

$$=\mathrm{Log}_e\left\{\frac{\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\left(\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)}\right\}\cdots\text{分子分母×同じもの}$$

$$=\mathrm{Log}_e\left\{\frac{\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}+\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}\right\}$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

になりますので、変数 φ と－φ の 2 つは、

$$\pm\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

となります。括弧内が複素数になる為、 $\frac{x}{a}<1$ に対応する実数の－φ は、やはり無いです。

次に③式の、

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

は別の形で書くことが出来ます。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$ ・・・①式と同じ

を移項しますと、

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{a^2}+1$$

になります。先程書きましたが、x と a は正の値しか取らないと決めましたので、両辺を平方根にしますと、

$$\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}$$

になります。③式の $\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$ に、この $\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}$ を代入しますと、

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)=\mathrm{Log}_e\left(\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}\right)^2-1}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}+\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1-1}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}+\sqrt{\frac{y^2}{a^2}}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{y}{a}+\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}\right)\quad\cdot\cdot\cdot ⑤$$

となります。$\frac{y}{a}$は正の時も負の時もあります。cosh の時と同様に考えますと、$\frac{y}{a}$も φ の関数であると考え、

$$\frac{y}{a}=\sinh\varphi$$

と定義します。$\frac{y}{a}$を φ の双曲線正弦 sinh と呼びます。

$$y=a\cdot\sinh\varphi$$

です。sinh の正式な読み方はハイパボリックサインです。⑤式において$\frac{y}{a}$が正負どんな値でも、$\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}$は$\left|\frac{y}{a}\right|$より必ず大きくなります。⑤式括弧内は$\frac{y}{a}$の全ての実数値に対して正になり、その対数も実数の範囲で全て存在します。実数の全ての$\frac{y}{a}$において φ が存在しますので、その sinh 値があることになります。図 4 で双曲線上の P 点が x 軸上にある時、$\frac{y}{a}=\sinh\varphi=0$です。x 軸より下を動く時、変数 φ は－φ となります。y の値も反転し$\frac{-y}{a}$が $\sinh(-\varphi)$ の値になります。

sinh は奇関数ですので、

$$\frac{-y}{a}=\sinh(-\varphi)=-\sinh\varphi$$

$$-y=-a\cdot\sinh\varphi$$

です。

三角関数と同様に双曲線正接 tanh は、

$$\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}=\frac{\frac{y}{a}}{\frac{x}{a}}=\frac{y}{a}\cdot\frac{a}{x}=\frac{y}{x}=\tanh\varphi$$

で定義されます。tanh の正式な読み方はハイパボリックタンジェントです。図 4 で双曲線上の P 点が x 軸上にある時、$\frac{y}{x}=\tanh\varphi=0$です。x 軸より下を動く時、変数 φ は－φ とな

ります。x の値は正のままですが、y の値は反転し $\frac{-y}{x}$ が $\tanh(-\varphi)$ の値になります。

つまり tanh は奇関数ですので、

$$\frac{-y}{x}=\tanh(-\varphi)=-\tanh\varphi$$

になります。

(3)逆双曲線関数の定義

$$\frac{x}{a}=\cosh\varphi$$

ですが、

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

になります。φ を $\frac{x}{a}$ の値で表しましたので、

$$=\cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

です。$\cosh^{-1}$ は、coshφ の φ を求める逆双曲線余弦、アークハイパボリックコサインです。
(2)で述べましたが、cosh は偶関数ですので cosh(ーφ)＝coshφ です。

次に、

$$\frac{y}{a}=\sinh\varphi$$

ですが、

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{y^2}{a^2}+\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}\right)$$

になります。φ を $\frac{y}{a}$ の値で表しましたので、

$$=\sinh^{-1}\frac{y}{a}$$

と言えます。(2)で述べましたが $\sinh^{-1}\frac{y}{a}$ は奇関数ですから、$\sinh^{-1}\frac{-y}{a}$ は $-\sinh^{-1}\frac{y}{a}$ になります。$\sinh^{-1}$ は sinhφ の φ を求める逆双曲線正弦、アークハイパボリックサインです。

次に、

$$\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}=\frac{\frac{y}{a}}{\frac{x}{a}}=\frac{y}{a}\cdot\frac{a}{x}=\frac{y}{x}=\tanh\varphi$$

③式の φ を次の様に変形します。

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

②式により $\sqrt{x^2-a^2}=y$ に直し、

$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}\right)=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\mathrm{Log}_e\frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}}$$

$$=\mathrm{Log}_e\sqrt{\frac{(x+y)(x+y)}{(x+y)(x-y)}}=\mathrm{Log}_e\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\frac{x+y}{x-y}$$

です。Log_e の変数の分子分母に $\frac{1}{x}$ を掛けますと、

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\frac{\frac{1}{x}(x+y)}{\frac{1}{x}(x-y)}=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

です。$\frac{y}{x}$ を w と置きますと、

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\frac{1+w}{1-w}$$

になります。対数関数の真数の範囲は正ですから、$\frac{1+w}{1-w}>0$ でなくてはなりません。分子は$-1<w$ で正です。分母は $w<1$ で正です。すなわち$-1<w<1$ です。これは図 1 の漸近線が、原点を通る 45 度の右上がり、右下がりの 2 本の直線になることからも明らかです。

双曲線は2本の漸近線の内側にありますから、傾き$\frac{y}{x}$は＋1より小さく、－1より大きくなります。登りの傾きも下りの傾きも、45度よりもゆるくなります。

$$=\tanh^{-1} w$$

$$=\tanh^{-1}\frac{y}{x}$$

です。yが負の場合、上記計算は正のyで計算し、最後に－を付けて下さい。(2)で述べましたが$\tanh^{-1}\frac{y}{x}$は奇関数ですから、$\tanh^{-1}\frac{-y}{x}$は$-\tanh^{-1}\frac{y}{x}$になります。$\tanh^{-1}$は $\tanh\varphi$ のφを求める逆双曲線正接、アークハイパボリックタンジェントです。

(4)その他の重要定義

①式、$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$に、$\frac{x}{a}=\cosh\varphi$、$\frac{y}{a}=\sinh\varphi$を代入しますと

$$\cosh^2\varphi-\sinh^2\varphi=1$$

になります。

(5)指数関数での定義

(3)で紹介致しましたが、$\frac{x}{a}=\cosh\varphi$の時、

$$\varphi=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

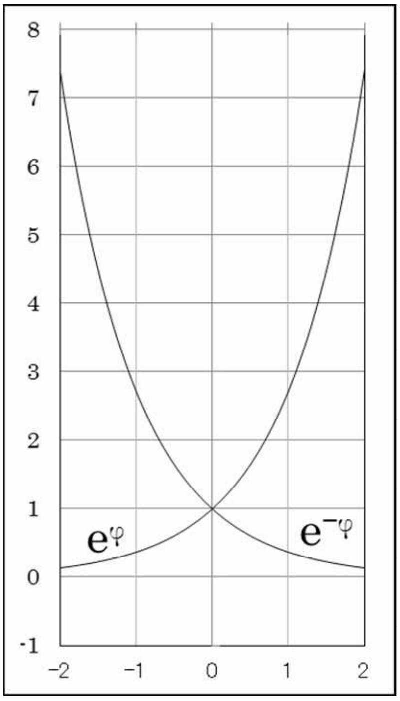
$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right)$$

$$=\mathrm{Log}_e\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

になります。$\frac{x}{a}=u$と置きますと、

$$=\mathrm{Log}_e(u+\sqrt{u^2-1})$$

e^{φ}と$e^{-\varphi}$のグラフ



です。対数関数、$\varphi = \mathrm{Log}_e(u + \sqrt{u^2 - 1})$ とは、底 e を φ 乗すると $u + \sqrt{u^2 - 1}$ になることを表しています。この関係を指数関数に直しますと、

$$e^{\varphi} = u + \sqrt{u^2 - 1}$$

になります。両辺に $\dfrac{1}{e^{\varphi}(u + \sqrt{u^2 - 1})}$ を掛けますと、

$$e^{\varphi} \cdot \frac{1}{e^{\varphi}(u + \sqrt{u^2 - 1})} = u + \sqrt{u^2 - 1} \cdot \frac{1}{e^{\varphi}(u + \sqrt{u^2 - 1})}$$

$$\frac{1}{e^{\varphi}} = \frac{1}{(u + \sqrt{u^2 - 1})}$$

になります。右辺の分子分母に $u - \sqrt{u^2 - 1}$ を掛けますと、

$$= \frac{u - \sqrt{u^2 - 1}}{(u + \sqrt{u^2 - 1})(u - \sqrt{u^2 - 1})}$$

$$= \frac{u - \sqrt{u^2 - 1}}{u^2 - u\sqrt{u^2 - 1} + u\sqrt{u^2 - 1} - (\sqrt{u^2 - 1})^2}$$

$$= \frac{u - \sqrt{u^2 - 1}}{u^2 - (u^2 - 1)}$$

$$= u - \sqrt{u^2 - 1}$$

になります。したがって、

$$e^{-\varphi} = u - \sqrt{u^2 - 1}$$

です。e^{φ} と $e^{-\varphi}$ の和を求めますと、

$$e^{\varphi} + e^{-\varphi} = u + \sqrt{u^2 - 1} + u - \sqrt{u^2 - 1}$$

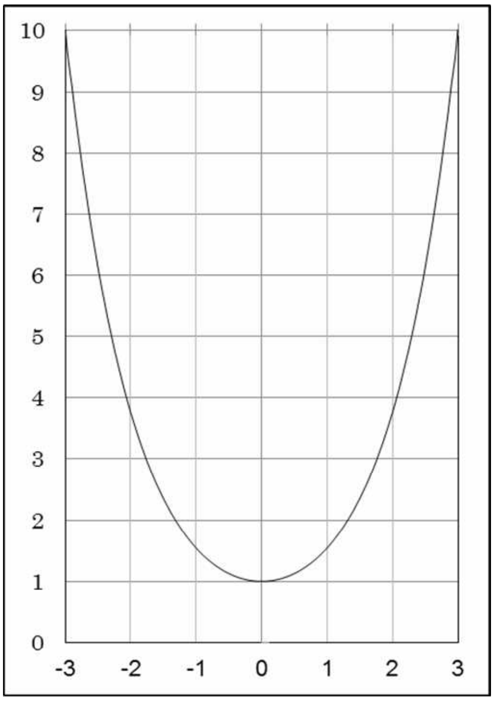
$$= 2u$$

です。両辺を 2 で割りますと、

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = u$$

となり、$u = \dfrac{x}{a} = \cosh\varphi$ ですから、

$\cosh\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$ のグラフ



$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \quad ・・・⑥$$

と定義されました。前ページのグラフで分ります様に、e^{φ} と $e^{-\varphi}$ は、φ が実数の範囲で値が負になることのない関数です。右上のグラフで分ります様に、2 つの値の和の半分である $\cosh\varphi$ では、φ が実数の範囲で値が 1 よりも小さくなることの無い偶関数です。

(3) で紹介致しましたが、$\dfrac{y}{a} = \sinh\varphi$ の時、

$$\varphi = \mathrm{Log}_e\left(\frac{y}{a} + \frac{\sqrt{y^2+a^2}}{a}\right)$$

$$= \mathrm{Log}_e\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2+a^2}{a^2}}\right)$$

$$= \mathrm{Log}_e\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2}+1}\right)$$

になります。$\dfrac{y}{a} = v$ と置きますと、

$$= \mathrm{Log}_e(v+\sqrt{v^2+1})$$

です。この式は底 e を φ 乗しますと、$v+\sqrt{v^2+1}$ になることを表しています。この関係を指数関数に直しますと、

$$e^{\varphi} = v+\sqrt{v^2+1}$$

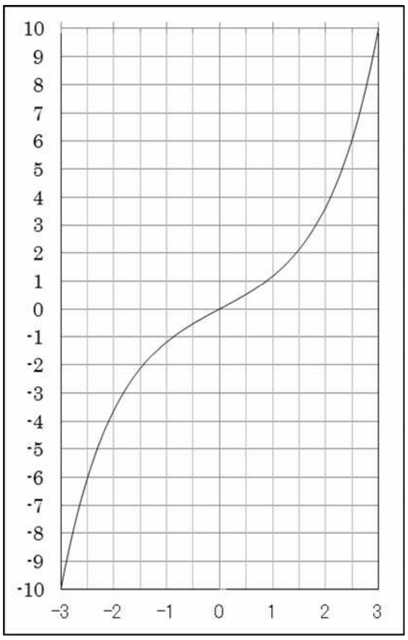
です。両辺に $\dfrac{1}{e^{\varphi}(v+\sqrt{v^2-1})}$ を掛けますと、

$$e^{\varphi}\cdot\frac{1}{e^{\varphi}(v+\sqrt{v^2-1})} = v+\sqrt{v^2-1}\cdot\frac{1}{e^{\varphi}(v+\sqrt{v^2-1})}$$

$$\frac{1}{e^{\varphi}} = \frac{1}{v+\sqrt{v^2+1}}$$

です。右辺の分子分母に $v-\sqrt{v^2+1}$ を掛けますと、

$\sinh\varphi = \dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$ のグラフ



$$= \frac{v - \sqrt{v^2+1}}{(v+\sqrt{v^2+1})(v-\sqrt{v^2+1})}$$

$$= \frac{v - \sqrt{v^2+1}}{v^2 - v\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{v^2+1} - (\sqrt{v^2+1})^2}$$

$$= \frac{v - \sqrt{v^2+1}}{v^2 - (v^2+1)}$$

$$= -(v - \sqrt{v^2+1})$$

になります。従って、

$$e^{-\varphi} = -(v - \sqrt{v^2+1})$$

$$= -v + \sqrt{v^2+1}$$

です。e^{φ} から $e^{-\varphi}$ を引きますと、

$$e^{\varphi} - e^{-\varphi} = v + \sqrt{v^2+1} - (-v + \sqrt{v^2+1})$$

$$= v + \sqrt{v^2+1} + v - \sqrt{v^2+1}$$

$$= 2v$$

です。両辺を 2 で割りますと、

$$\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = v$$

です。$v = \frac{y}{a} = \sinh\varphi$ ですから、

$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \quad ・・・⑦$$

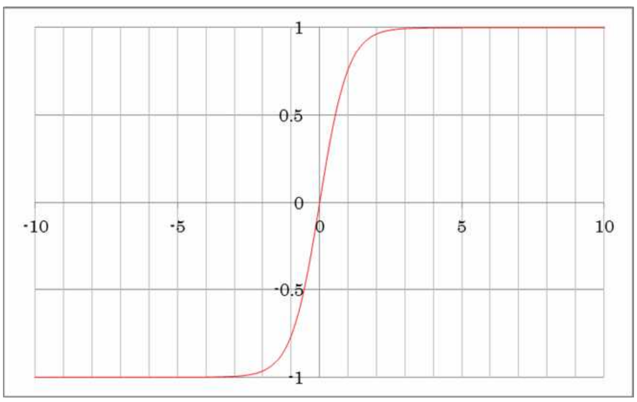
と定義される奇関数になります。

tanhφ は、

$$\tanh\varphi = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}$$

$$= \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \div \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

$\tanh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}$ のグラフ



$$=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\cdot\frac{2}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}$$

$$=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}} \quad ・・・⑧$$

となります。

分母が偶関数、分子が奇関数です。この場合、全体として奇関数になります。分母を f(x)、分子を g(x)として、x にーx を代入しますと、$\frac{g(-x)}{f(-x)}=\frac{-g(x)}{f(x)}$になります。x を代入した時とーx を代入した時とでは、全体の符号が反転するからです。

式⑥、⑦、⑧は双曲線関数の解析的定義とされます。ここでは φ は単なる変数に過ぎず、双曲線関数は既知の指数関数の組み合わせとして表されています。まとめますと双曲線関数の指数関数表示は次の様になります。

$$\left.\begin{aligned}\cosh\varphi &= \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\\ \sinh\varphi &= \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\\ \tanh\varphi &== \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}\end{aligned}\right\} \quad ・・・⑨$$

⑨を知っていれば(4)の定義も簡単に導き出せ、

$$\begin{aligned}\cosh^2\varphi-\sinh^2\varphi &= \left(\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right)^2\\
&= \frac{(e^{\varphi}+e^{-\varphi})^2}{4}-\frac{(e^{\varphi}-e^{-\varphi})^2}{4}\\
&= \frac{e^{2\varphi}+2e^{\varphi}e^{-\varphi}+e^{-2\varphi}}{4}-\frac{e^{2\varphi}-2e^{\varphi}e^{-\varphi}+e^{-2\varphi}}{4}\\
&= \frac{e^{2\varphi}+2+e^{-2\varphi}-e^{2\varphi}+2-e^{-2\varphi}}{4}\\
&= \frac{4}{4}\\
&= 1\end{aligned}$$

になります。現在、(2)で述べた幾何学的定義はほとんど使われず、⑨の解析学的定理が多く使われています。11 ページのグラフで示しました様に、⑨の定義でも coshφ は φ が実数の範囲で常に 1 以上の値しか取りません。図 4 で左側の象限を省略した理由です。

(6)双曲線関数の加法定理

ここからは双曲線関数の変数にθ（シータ）も使います。

$$\sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$\sinh\varphi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

$$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh\varphi=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}$$

とします。$\sinh\theta\cdot\cosh\varphi$ を計算しますと、

$$\begin{aligned}\sinh\theta\cdot\cosh\varphi&=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\cdot\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\\&=\frac{1}{4}(e^{\theta}-e^{-\theta})(e^{\varphi}+e^{-\varphi})\\&=\frac{1}{4}(e^{\theta}e^{\varphi}+e^{\theta}e^{-\varphi}-e^{-\theta}e^{\varphi}-e^{-\theta}e^{-\varphi})\\&=\frac{1}{4}(e^{\theta+\varphi}+e^{\theta-\varphi}-e^{-\theta+\varphi}-e^{-\theta-\varphi})\\&=\frac{1}{4}\left\{e^{\theta+\varphi}+e^{\theta-\varphi}-e^{-(\theta-\varphi)}-e^{-(\theta+\varphi)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\theta+\varphi}-e^{-(\theta+\varphi)}}{2}+\frac{e^{\theta-\varphi}-e^{-(\theta-\varphi)}}{2}\right)\end{aligned}$$

になりますが、指数法則により、

$$\frac{e^{\theta+\varphi}-e^{-(\theta+\varphi)}}{2}=\sinh(\theta+\varphi)$$

$$\frac{e^{\theta-\varphi}-e^{-(\theta-\varphi)}}{2}=\sinh(\theta-\varphi)$$

ですので $\sinh\theta\cdot\cosh\varphi$ は $\sinh(\theta+\varphi)$ と $\sinh(\theta-\varphi)$ の組み合わせで表されます。同様に $\cosh\theta\cdot\sinh\varphi$、$\cosh\theta\cdot\cosh\varphi$、$\sinh\theta\cdot\sinh\varphi$ も計算しますと、結果として、

$$2\sinh\theta\cdot\cosh\varphi=\sinh(\theta+\varphi)+\sinh(\theta-\varphi)$$

$$2\cosh\theta\cdot\sinh\varphi=\sinh(\theta+\varphi)-\sinh(\theta-\varphi)$$

$$2\cosh\theta\cdot\cosh\varphi=\cosh(\theta+\varphi)+\cosh(\theta-\varphi)$$
$$2\sinh\theta\cdot\sinh\varphi=\cosh(\theta+\varphi)-\cosh(\theta-\varphi)$$

が得られます。前 2 つの式の和をとりますと、

$$\sinh(\theta+\varphi)=\sinh\theta\cdot\cosh\varphi+\cosh\theta\cdot\sinh\varphi$$

になります。前 2 つの式の差をとりますと、

$$\sinh(\theta-\varphi)=\sinh\theta\cdot\cosh\varphi-\cosh\theta\cdot\sinh\varphi$$

になります。後ろ 2 つの式の和をとりますと、

$$\cosh(\theta+\varphi)=\cosh\theta\cdot\cosh\varphi+\sinh\theta\cdot\sinh\varphi$$

になります。後ろ 2 つの式の差をとりますと、

$$\cosh(\theta-\varphi)=\cosh\theta\cdot\cosh\varphi-\sinh\theta\cdot\sinh\varphi$$

になります。これらが双曲線関数の加法定理です。

(7)双曲線関数の合成公式

$$A\sinh\theta-B\cosh\theta \quad ・・・⑩$$

という式があったとします。この式に加法定理を適用し、1 つの項にまとめることを考えます。⑩式は左に $\sinh\theta$、右に $\cosh\theta$ が有り、左マイナス右ですから、加法定理の

$$\sinh(\theta-\varphi)=\sinh\theta\cdot\cosh\varphi-\cosh\theta\cdot\sinh\varphi$$

を使います。⑩式の A を $\cosh\varphi$、B を $\sinh\varphi$ で表すことが出来れば $\sinh(\theta-\varphi)$ でまとめることが出来ます。指定された x 値の時、指定された y 値を双曲線上にのせるのが a の役目でした。（2 ページ参照）⑩式の場合、x が A の時、y を B にするのが a です。

$$a=\sqrt{x^2-y^2}$$

でしたので、

$$a=\sqrt{A^2-B^2}$$

となります。a は正の実数です。（5 ページ参照）A^2＞B^2 でなければいけません。

$$\frac{x}{a}=\cosh\varphi$$
$$x=a\cdot\cosh\varphi$$

ですので、

$$A=\sqrt{A^2-B^2}\cdot\cosh\varphi$$

となります。

$$\frac{y}{a} = \sinh\varphi$$

$$y = a \cdot \sinh\varphi$$

ですので、

$$B = \sqrt{A^2 - B^2} \cdot \sinh\varphi$$

となります。φ を求めるには、

$$\varphi = \tanh^{-1}\frac{y}{x}$$

を使います。x＝A、y＝B ですので、

$$\varphi = \tanh^{-1}\frac{B}{A}$$

です。

全部の値を⑩式に代入しますと、

$$\begin{aligned} A\sinh\theta - B\cosh\theta &= \sqrt{A^2 - B^2}\cosh\varphi \cdot \sinh\theta - \sqrt{A^2 - B^2}\sinh\varphi \cdot \cosh\theta \\ &= \sqrt{A^2 - B^2}(\cosh\varphi \cdot \sinh\theta - \sinh\varphi \cdot \cosh\theta) \\ &= \sqrt{A^2 - B^2}(\sinh\theta \cdot \cosh\varphi - \cosh\theta \cdot \sinh\varphi) \\ &= \sqrt{A^2 - B^2}\sinh(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \tanh^{-1}\frac{B}{A} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\frac{1+\frac{B}{A}}{1-\frac{B}{A}} \end{aligned}$$

になります。

この変形が許されるには $A^2 > B^2$ でなければいけません。「LCR 直列回路の場合(1) 2 実根の場合」の章 19 ページの式の場合、

$$\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}\right)^2$$

$$=\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{4L^2}\left(R^2-\frac{4L}{C}\right)$$

$$=\frac{R^2}{4L^2}-\frac{R^2}{4L^2}+\frac{1}{LC}$$

$$=\frac{1}{LC}$$

となりＬもＣも正、$\frac{1}{LC}$も正ですので大丈夫です。これが双曲線関数の合成公式です。

目次へ戻る