ベアストウ・ヒッチコック法について　　　　　　２０２１年１月２５日　　目次へ戻る

2023.1.24 1.31 2.1 2.3 24.6.10 6.22 10.10 25.6.19 10.2 11.5 11.14 11.19 訂正

1、ベアストウ・ヒッチコック法とは

n 次の多項式 f(x)を、2 次式と(n－2)次の多項式に因数分解し、f(x)＝0 の根（解）を求める方法です。x^n の項に係数 a_0 が付いている場合は、章末の付録 1 をご覧下さい。

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\bullet\bullet\bullet+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n \quad ・・・1-①$$

と言う多項式は、2 次式 x^2+px+q と、(n－2)次の多項式 g(x)に因数分解出来、

$$f(x)=(x^2+px+q)\bullet g(x) \quad ・・・1-②$$

となります。f(x)が x^2+px+q で割り切れた場合、g(x)は f(x)より 2 次低い多項式になり、f(x)の次数を n として、

$$g(x)=x^{n-2}+b_1x^{n-3}+b_2x^{n-4}+b_3x^{n-5}+\bullet\bullet\bullet+b_{n-4}x^2+b_{n-3}x+b_{n-2} \quad ・・・1-③$$

で表されます。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の根（解）を、根（解）の公式で求めることにより、f(x)＝0 の根（解）が 2 つ分ります。g(x)が 3 次式以上の時は g(x)を新しい f(x)として、2 次式による因数分解をくり返します。g(x)が 2 次式以下になって終了し、f(x)＝0 の根（解）を n 個求めることが出来ます。n 個の根（解）を使い、1－①式の f(x)の因数分解が出来ます。（以下、根を使います。）ところが 2 次式 x^2+px+q の p と q の値が分かりません。p と q の値が真の p と真の q の値でなく、いい加減な値の時、1－①式の f(x)を x^2+px+q で割りますと、

$$f(x)=(x^2+px+q)\bullet g(x)+rx+s \quad ・・・1-④$$

の様に、余り r x+s が出ます。余りは必ず 1 次式、または 0 次式（定数）です。余りが 2 次式なら、まだ割れるからです。余りが出る時、1－③式、1－④式から f(x)は、

$$f(x)=(x^2+px+q)\bullet g(x)+rx+s$$

$$=(x^2+px+q)\bullet(x^{n-2}+b_1x^{n-3}+b_2x^{n-4}+b_3x^{n-5}+\bullet\bullet\bullet$$

$$+b_{n-4}x^2+b_{n-3}x+b_{n-2})+rx+s$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^2+px+q)\bullet x^{n-2} + (x^2+px+q)\bullet b_1x^{n-3} + (x^2+px+q)\bullet b_2x^{n-4} \\
&\qquad + (x^2+px+q)\bullet b_3x^{n-5} + \bullet\bullet\bullet + (x^2+px+q)\bullet b_{n-4}x^2 \\
&\qquad\qquad + (x^2+px+q)\bullet b_{n-3}x + (x^2+px+q)\bullet b_{n-2} + rx + s \\
&= x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + b_1x^{n-1} + pb_1x^{n-2} + qb_1x^{n-3} + b_2x^{n-2} + pb_2x^{n-3} + qb_2x^{n-4} \\
&\qquad + b_3x^{n-3} + pb_3x^{n-4} + qb_3x^{n-5} + \bullet\bullet\bullet + b_{n-4}x^4 + pb_{n-4}x^3 + qb_{n-4}x^2 \\
&\qquad\qquad + b_{n-3}x^3 + pb_{n-3}x^2 + qb_{n-3}x + b_{n-2}x^2 + pb_{n-2}x + qb_{n-2} + rx + s \\
&= x^n + (p+b_1)x^{n-1} + (q+pb_1+b_2)x^{n-2} + (qb_1+pb_2+b_3)x^{n-3} + \bullet\bullet\bullet \\
&\qquad\qquad + (qb_{n-4}+pb_{n-3}+b_{n-2})x^2 + (qb_{n-3}+pb_{n-2}+r)x + qb_{n-2} + s
\end{aligned}
$$

と表されます。1－①式 f(x) の各係数a_1～a_nと、このx^2+px+qと g(x)および、余り r x ＋s で表された結果を比較しますと、

$$
\left.
\begin{array}{l}
a_1 = p + b_1 \\
a_2 = q + pb_1 + b_2 \\
\left(
\begin{array}{l}
a_j = qb_{j-2} + pb_{j-1} + b_j \\
\quad j=3,4,\cdot\cdot\cdot n-3,n-2 \\
\quad n \text{ は 1－①式の } n
\end{array}
\right. \\
a_{n-1} = qb_{n-3} + pb_{n-2} + r \\
a_n = qb_{n-2} + s
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\text{1－⑤} \\
a_3 \text{ から } a_{n-2} \text{ は } a_j \text{ の式で表されます。}
\end{array}
$$

になります。移項しますと、1－③式 g(x)の各係数b_1～b_{n-2}および、余り r、s は下式の様に求まります。

$$
\left.
\begin{array}{l}
b_1 = a_1 - p \\
b_2 = a_2 - pb_1 - q \\
\left(
\begin{array}{l}
b_j = a_j - pb_{j-1} - qb_{j-2} \\
\quad j = 3,4,\cdots,n-3,n-2 \\
\quad n \text{ は 1－①式の } n
\end{array}
\right. \\
r = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \\
s = a_n - qb_{n-2}
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\text{1－⑥} \\
b_3 \text{ から } b_{n-2} \text{ は } b_j \text{ の式で表されます。}
\end{array}
$$

1－⑥式中a_1～a_nの値は、1－①式で既知です。b_1にはa_1の値と p の値が必要です。b_2にはa_2の値とb_1の値と q の値も必要です。以下b_3から r までは、同じ添え字の a の値、ひとつ前の b の値と p の値、ふたつ前の b の値と q の値が必要です。s にはa_nとb_{n-2}と q の

値が必要です。後ろの値を求める時、常に前の値が必要です。最終目的は余りの r と s の値ですが、b_1 から順に計算しなければなりません。

g(x)は f(x)より 2 次低い多項式ですので、1－③式の様に、b_{n-2} までの項しか存在しません。一方 f(x)を x^2+px+q と g(x)および、余り rx＋s で表した 1－④式を展開しますと、当然 1－①式の f(x)の x^n から a_n までの項と同数の項が出来ます。1－⑥式で元々の g(x)には無い、b_{n-1} 項と b_n 項を求めて見ます。

1－⑥式において、b_j の式の j に n－1 と n を代入して見ます。

$b_j = a_j - pb_{j-1} - qb_{j-2}$ に $j = n-1$ を代入しますと、

$$b_{n-1} = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}$$

になり 1－⑥式中の $r = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}$ と全く同じです。余りの r は、

$$r = b_{n-1}$$

です。b_{n-1} は余り r そのものですので有用です。

同じく $b_j = a_j - pb_{j-1} - qb_{j-2}$ の式に $j = n$ を代入しますと、

$$b_n = a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2}$$

になります。1－⑥式中の $s = a_n - qb_{n-2}$ の式と比較しますと、余りの s は、

$$s = b_n + pb_{n-1}$$

と表されます。b_n も余り s の算出に有用です。1－⑥式を次の様に修正します

$$\left.\begin{array}{l}
b_1 = a_1 - p \\
b_2 = a_2 - pb_1 - q \\
\left(\begin{array}{l}
b_j = a_j - pb_{j-1} - qb_{j-2} \\
\quad j=3,4,\cdots,n-2 \\
\quad n \text{ は 1－①式の } n \\
b_{n-1} = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \quad = r \\
b_n = a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2} \\
\qquad s = b_n + pb_{n-1}
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \text{1－⑦}$$

b_3 から b_{n-2} は b_j の式で表されます。

b_{n-1} と b_n も b_j の式で表されます。

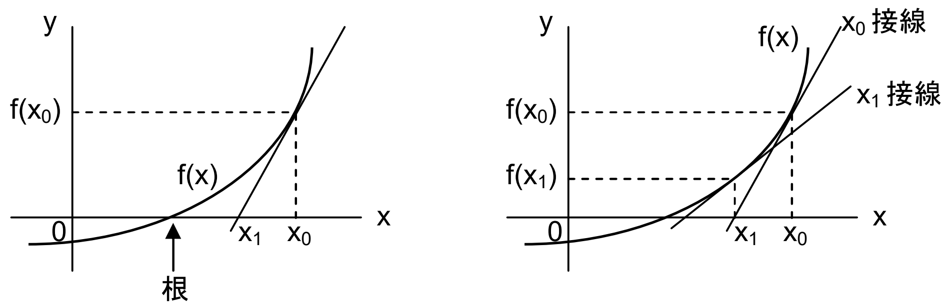
1ー⑦式から分ります様に、余りのｒとｓの式は、どちらもｐとq、2 つの変数による 2 変数関数です。関数ｒと関数ｓを、r(p,q) 、s(p,q)と表せます。この 2 つの値を求めるのが 1ー⑦式の目的です。先ほども書きましたが、後ろの値を求める時、常に前の値が必要です。最終目的はｒとｓの値ですが、b_1から順に計算しなければなりません。例えばｎが 3 の時ｒとｓの算出で使う式は、一番上のb_1、b_2、b_3の式です。

余りを無くす為には、r(p,q)＝0 と s(p,q)＝0 が両方とも成り立つ、ｐの値とｑの値を探す必要があります。ｐの値とｑの値を変化させｒとｓを 0 にすることが出来た時、f(x)は x^2+px+q で割り切れることになります。割った答である g(x)の各係数b_1～b_{n-2}は、求めたｐ、ｑの値を使い 1ー⑦式で求めることが出来ます。

2、ニュートン・ラフソン法

1 変数関数の f(x)＝0 が成り立つｘの値、つまり f(x)＝0 の根を探す方法に、ニュートン・ラフソン法があります。最初にニュートン・ラフソン法の説明をします。その後 2 変数関数に対する拡張方法を提示致します。

ニュートン・ラフソン法では f(x)＝0 の根の値に近い初期値、x_0を適当に決めます。



x_0での f(x)の値、座標{x_0,f(x_0)}で f(x)の接線を引きます。接線がｘ軸と交わる点をx_1とします。（上左図）座標{x_0,f(x_0)}における接線の方程式は、

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

です。「接線の方程式」の導出方法は、章末の付録 2 をご参照下さい。f' (x_0)とは f(x)を微分してからx_0を代入する意味です。f(x_0)地点での接線の傾きです。この接線は座標(x_1,0)を通ります。x＝x_1、y＝0 を接線の方程式に代入して、x_1を表す式に変形しますと、

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}=x_1-x_0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 2-①$$

になります。これをニュートン・ラフソンの公式と言います。上のグラフの例では $f(x_0)$は正、$f'(x_0)$も右肩上がりで正ですので、$f(x_0)/f'(x_0)$は正となり、x_1はx_0よりも小さく、原点側になります。したがってx_1は$f(x)=0$の正しい根に近づきます。

計算で出たx_1を新しいx_0として、同様の計算をくり返します。（上右図）何回もくり返すことにより、x_1を正しい根に限りなく近づけることが出来ます。$f(x_0)$が十分に小さくなった時に止めます。これが、1 変数関数の $f(x)=0$ の根を探すニュートン・ラフソン法です。ところで、

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

と置き、ニュートン・ラフソンの公式に代入しますと

$$x_0 + \Delta x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

になります。さらに変形しますと、

$$f'(x_0)\Delta x = -f(x_0)$$

または、

$$f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 0 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 2-②$$

になります。章末の付録 6 にこの式の説明があります。この方程式に適当に選んだ初期値x_0を代入し、未知数 Δx を求めます。元の x_0 に Δx を加えた新しい x_0 を再び方程式に代入し、新しい Δx を求めます。これをくり返し、Δx を限りなく 0 に近づけることにより、x_0を限りなく $f(x)=0$ の正しい根に近づけることが出来ます。Δx が十分に小さくなった時に止めます。新 x_0 は旧 x_0 より原点側に来るのが普通ですので、Δx はマイナスの値になるのが一般的です。この方法も 1 変数関数の $f(x)=0$ の根を探す、ニュートン・ラフソン法です。

こちらのやり方を 2 変数関数に拡張します。章末の付録 4 に詳しい説明があります。余りの関数において、$r(p,q)=0$ と $s(p,q)=0$ が同時に成り立ち、余りが無くなる p と q の値（r＝0、s＝0 の根）を探す式は、適当に決めた p と q の初期値を p_0 と q_0 として、

$$r(p_0,q_0)+\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=0 \quad ・・・・・2－③$$

$$s(p_0,q_0)+\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=0 \quad ・・・・・2－④$$

となります。上式中、例えば$\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$とは、r(p,q)を p で偏微分してから p_0, q_0 を代入する意味です。r(p,q)と s(p,q)を移項しますと、

$$\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=-r(p_0,q_0) \quad ・・・・・2－⑤$$

$$\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=-s(p_0,q_0) \quad ・・・・・2－⑥$$

になります。1 変数時の微分の所が偏微分 2 つになります。未知数が Δp と Δq の 2 つですので式も 2 つ要り、連立方程式になります。適当に決めた初期値 p_0 と q_0 を代入し、連立方程式を解き Δp と Δq を求めます。p_0 に Δp、q_0 に Δq を加えた値は真の根に近づいているはずです。新しい p_0、q_0 として再び方程式に代入し、新しい Δp と Δq を求めます。これをくり返し Δp と Δq を限りなく 0 に近づけることにより、p_0 と q_0 が r＝0 と s＝0 の正しい根、p と q に限りなく近づきます。Δp と Δq が十分に小さくなった時に止めます。この作業に必要なものは、

・初期値 p_0 と q_0 における余りの関数 r の値 $r(p_0,q_0)$。

・初期値 p_0 と q_0 における余りの関数 s の値 $s(p_0,q_0)$。

・余りの関数 r(p,q)を p で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。

・余りの関数 r(p,q)を q で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。

・余りの関数 s(p,q)を p で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。

・余りの関数 s(p,q)を q で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。

です。

余りの関数 $r(p_0,q_0)$＝r と $s(p_0,q_0)$＝s の値は、1－⑦式の b の値として求めます。既知の a_n の値、p と q に初期値 p_0 と q_0 を使い計算します。1－⑦式で r と s は b の最後の方に出て来ます。何度も申し上げますが、b の計算は後の b に前の b の値が入るので、一番上から計算する必要があります。

$r(p_0,q_0)$＝r の偏微分および $s(p_0,q_0)$＝s の偏微分についても、1－⑦式の b の偏微分をすることになります。次の項で説明致しますが、やはり 1－⑦式を一番上から順に偏微分計算しなければ次の答えが出ません。偏微分の理屈につきましては、章末の付録 3 をご覧下さい。

3、偏微分

偏微分の実際の計算は 6、をご覧下さい。ここでは計算結果だけを提示します。

(1)　b を p で偏微分

$$\frac{\partial b_1}{\partial p} = -1$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial p} = -(b_1 - p)$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial p} = -b_2 + p(b_1 - p) + q$$

$$\frac{\partial b_4}{\partial p} = -b_3 + p\{b_2 - p(b_1 - p) - q\} + q(b_1 - p)$$

$$\frac{\partial b_5}{\partial p} = -b_4 + p[b_3 - p\{b_2 - p(b_1 - p) - q\} - q(b_1 - p)] + q\{b_2 - p(b_1 - p) - q\}$$

以下省略

(2)　b を q で偏微分

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial q} = -1$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial q} = -(b_1 - p)$$

$$\frac{\partial b_4}{\partial q} = -b_2 + p(b_1 - p) + q$$

$$\frac{\partial b_5}{\partial q} = -b_3 + p\{b_2 - p(b_1 - p) - q\} + q(b_1 - p)$$

以下省略

になります。b の q での偏微分は、1 つ若い番号の b の p での偏微分と同じ結果です。つまり、b の添え字を j として、$\frac{\partial b_j}{\partial p} = \frac{\partial b_{j+1}}{\partial q}$ です。

また、式のカッコ内に直前または 2 つ前に計算した偏微分の結果の、符号を反転した式が入っています。

偏微分の結果の符号を初めから反転して、$-\frac{\partial b_j}{\partial p} = -\frac{\partial b_{j+1}}{\partial q} = c_{j-1}$ とおけば、

$$
\left.
\begin{array}{l}
-\frac{\partial b_1}{\partial p} = -\frac{\partial b_2}{\partial q} = c_0 = 1 \\
-\frac{\partial b_2}{\partial p} = -\frac{\partial b_3}{\partial q} = c_1 = b_1 - p \\
-\frac{\partial b_3}{\partial p} = -\frac{\partial b_4}{\partial q} = c_2 = b_2 - pc_1 - q \\
-\frac{\partial b_4}{\partial p} = -\frac{\partial b_5}{\partial q} = c_3 = b_3 - pc_2 - qc_1 \\
-\frac{\partial b_j}{\partial p} = -\frac{\partial b_{j+1}}{\partial q} = c_{j-1} = b_{j-1} - pc_{j-2} - qc_{j-3} \\
\qquad\qquad j=5,\cdots n-2,\ n-1,\ n \\
\qquad\qquad n\text{は}1\text{ー①式の}n \\
-\frac{\partial b_{n-2}}{\partial p} = -\frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = c_{n-3} = b_{n-3} - pc_{n-4} - qc_{n-5} \\
-\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = -\frac{\partial b_n}{\partial q} = c_{n-2} = b_{n-2} - pc_{n-3} - qc_{n-4} \\
-\frac{\partial b_n}{\partial p} = -\frac{\partial b_{n+1}}{\partial q} = c_{n-1} = b_{n-1} - pc_{n-2} - qc_{n-3}
\end{array}
\right\} \text{3ー①}
$$

となります。ベアストウ・ヒッチコック法では、c の番号を 0 から置くのが一般的です。c_0 は、1ー①式の f (x)の n が 3 の時に必要です。

b の偏微分の各値は c を計算し、符号を反転し、番号を調整したものになります。

b_j の p での偏微分 $\frac{\partial b_j}{\partial p}$ は、$-c_{j-1}$ を使用します。

b_j の q での偏微分 $\frac{\partial b_j}{\partial q}$ では $-c_{j-2}$ を使用します。

c も、後の c に前の c の値が入るので、一番上から順に計算していかなければいけません。

4、ベアストウ・ヒッチコック法の計算

準備が出来ましたので実際の計算を行います。、ニュートン・ラフソンの公式を2変数関数に拡張した式を再掲します。

$$r(p_0,q_0)+\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=0$$ ・・・・・4－①（2－③と同じ）

$$s(p_0,q_0)+\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=0$$ ・・・・・4－②（2－④と同じ）

4－①式の左辺第 1 項 $r(p_0,q_0)$は、1－⑦式よりb_{n-1}です。1－⑦式を計算する際に、初期値 p_0、q_0 は入力されます。第 2 項の偏微分は 3－①式より、$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p}=-c_{n-2}$ です。3－①式を計算する際に、初期値 p_0、q_0 は入力されます。第 3 項の偏微分は 3－①式より、$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial q}=-c_{n-3}$ です。1－①式 f(x)の n が 3 の時にc_0が必要になります。3－①式を計算する際に、初期値 p_0、q_0 は入力されます。各値を 4－①式に代入しますと、

$$b_{n-1}+(-c_{n-2})\Delta p+(-c_{n-3})\Delta q=0$$

カッコを外し、

$$b_{n-1}-c_{n-2}\Delta p-c_{n-3}\Delta q=0$$ ・・・・・4－③

になります。次に 4－②式の左辺第 1 項、$s(p_0,q_0)$は、1－⑦式よりb_n+pb_{n-1}です。1－⑦式を計算する際に、初期値 p_0、q_0 は入力されます。

第 2 項は 1－⑦式より、b_n+pb_{n-1}の p での偏微分です。b_n の偏微分は 3－①式より、

$\frac{\partial b_n}{\partial p}=-c_{n-1}$ です。pb_{n-1}は積の偏微分ですから、積の偏微分の公式と、3－①式より、

$$\frac{\partial}{\partial p}(p\cdot b_{n-1})=\frac{\partial p}{\partial p}\cdot b_{n-1}+p\cdot\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p}=b_{n-1}+p\cdot(-c_{n-2})=b_{n-1}-p\cdot c_{n-2}$$

となります。両者を合わせて、$-c_{n-1}+b_{n-1}-p\cdot c_{n-2}$です。計算の際、初期値 p_0、q_0 は入

力されます。第 3 項は$b_n + pb_{n-1}$の q での偏微分です。b_n の偏微分は 3ー①式より、

$\dfrac{\partial b_n}{\partial q} = -c_{n-2}$ です。pb_{n-1} は積の偏微分ですから、積の偏微分の公式と、3ー①式より、

$$\frac{\partial}{\partial q}(p \cdot b_{n-1}) = \frac{\partial p}{\partial q} \cdot b_{n-1} + p \cdot \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = 0 + p \cdot (-c_{n-3}) = -p \cdot c_{n-3}$$

となります。両者を合わせて、$-c_{n-2} - p \cdot c_{n-3}$ です。計算の際、初期値 p_0、q_0 は入力されます。各値を 4ー②式に代入し変形して行きますと、

$$\begin{aligned}
&b_n + pb_{n-1} + (-c_{n-1} + b_{n-1} - p \cdot c_{n-2})\Delta p + (-c_{n-2} - p \cdot c_{n-3})\Delta q = 0 \\
&b_n + pb_{n-1} - c_{n-1}\Delta p + b_{n-1}\Delta p - p \cdot c_{n-2}\Delta p - c_{n-2}\Delta q - p \cdot c_{n-3}\Delta q = 0 \\
&b_n - c_{n-1}\Delta p + b_{n-1}\Delta p - c_{n-2}\Delta q + pb_{n-1} - p \cdot c_{n-2}\Delta p - p \cdot c_{n-3}\Delta q = 0 \\
&b_n - (c_{n-1} - b_{n-1})\Delta p - c_{n-2}\Delta q + p(b_{n-1} - c_{n-2}\Delta p - c_{n-3}\Delta q) = 0
\end{aligned}$$

になります。ここで上から 4 番目の式の左辺第 4 項のカッコ内は、4ー③式の左辺と同じですので、＝0 です。その為 4 番目の式の左辺第 4 項は消滅して、

$$b_n - (c_{n-1} - b_{n-1})\Delta p - c_{n-2}\Delta q = 0 \quad ・・・・・4ー④$$

となります。余りの $s(p_0,q_0)$は$b_n + pb_{n-1}$でしたが、ここでpb_{n-1}が消滅してb_nだけになっています。ご注意下さい。4ー③、4ー④式を再び提示しますと、

$$\begin{aligned}
&b_{n-1} - c_{n-2}\Delta p - c_{n-3}\Delta q = 0 \quad ・・・・・4ー③と同じ \\
&b_n - (c_{n-1} - b_{n-1})\Delta p - c_{n-2}\Delta q = 0 \quad ・・・・・4ー④と同じ
\end{aligned}$$

です。両式とも左辺第 1 項を右辺に移項して、両辺にー1 をかけますと、

$$\begin{aligned}
&c_{n-2}\Delta p + c_{n-3}\Delta q = b_{n-1} \quad ・・・・・4ー⑤ \\
&(c_{n-1} - b_{n-1})\Delta p + c_{n-2}\Delta q = b_n \quad ・・・・・4ー⑥
\end{aligned}$$

になり連立方程式が完成しました。この連立方程式をクラーメル（クラメル、クラメールとも呼ばれます。）の解法で解きますと、（クラーメルの解法は章末の付録 5 をご覧下さい。）

$$\Delta p = \frac{\begin{vmatrix} b_{n-1} & c_{n-3} \\ b_n & c_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{n-2} & c_{n-3} \\ c_{n-1} - b_{n-1} & c_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_n c_{n-3}}{c_{n-2}{}^2 - (c_{n-1} - b_{n-1})c_{n-3}}$$

$$= \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_n c_{n-3}}{D}$$

$$\Delta q = \frac{\begin{vmatrix} c_{n-2} & b_{n-1} \\ c_{n-1} - b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{n-2} & c_{n-3} \\ c_{n-1} - b_{n-1} & c_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{c_{n-2}b_n - (c_{n-1} - b_{n-1})b_{n-1}}{c_{n-2}{}^2 - (c_{n-1} - b_{n-1})c_{n-3}}$$

$$= \frac{c_{n-2}b_n - (c_{n-1} - b_{n-1})b_{n-1}}{D}$$

$$D = c_{n-2}{}^2 - (c_{n-1} - b_{n-1})c_{n-3}$$

になります。分母の行列式は全く同じなので、D として別に計算しています。

最初に決めた p_0 と q_0 にこの Δp、Δq を加え、新しい p_0、q_0 とします。新しい p_0、q_0 を用いて同じ計算を行います。Δp、Δq が十分に小さくなるまでくり返します。

5、計算手順

(1)　p と q の初期値 p_0、q_0（例えば 1 桁の整数）を決めます。

(2)　1ー⑦式により $b_1 \sim b_n$ を求めます。

(3)　3ー①式により $c_0 \sim c_{n-1}$ を求めます。

(4)　クラーメルの解法により Δp、Δq を求めます。

(5)　Δp、Δq が、あらかじめ決めておいた値（例えば 0.00001）より小さい場合は(9)へ飛びます。

(6)　p_0＋Δp、q_0＋Δq を新しい初期値 p_0、q_0 にします。

(7)　決められた回数（例えば 50 回）、計算を行っても Δp、Δq が小さくならない場合は(1)へ戻ります。収束しない場合ですので、p と q の初期値 p_0、q_0 を違う値にしてやり直します。

(8)　(2)へ飛びます。

(9)　$x^2 + px + q = 0$ の根（解）を $\dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ で計算します。これにより、f(x)＝0 の根の内の 2 つが分ります。

(10)　この p と q の値から 1ー⑦式により $b_1 \sim b_{n-2}$ を求めれば、g(x)（1ー③式）が決まり

ます。g(x)の n が 3 以上ならば再び(1)または(2)へ飛びます。

6、偏微分の計算

1－①式の a_n は完全な定数で、p も q も入っていません。一方、1－⑦式の b_n の中身は a_n と pb_{n-1} と qb_{n-2} ですから、b_n を偏微分する場合、b_n の中身を全部さらけ出してから p や q で偏微分を行わなければなりません。1－⑦式の b_1 から順番に偏微分して行きます。

(1) b を p で偏微分

①$b_1 = a_1 - p$ を p で偏微分します。

$$\frac{\partial b_1}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(a_1 - p)$$
$$= -1$$

です。

②$b_2 = a_2 - pb_1 - q$ を p で偏微分します。1－⑦式により $b_1 = a_1 - p$ ですから、b_2 式中の b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_2}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(a_2 - pb_1 - q)$$
$$= \frac{\partial}{\partial p}\{a_2 - p(a_1 - p) - q\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial p}(a_2 - pa_1 + p^2 - q)$$
$$= -a_1 + 2p$$

になります。1－⑤式の $a_1 = p + b_1$ を代入し、

$$= -(p + b_1) + 2p$$
$$= -b_1 + p$$
$$= -(b_1 - p)$$

となります。

③$b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$ を p で偏微分します。1－⑦式により $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ であり、$b_1 = a_1 - p$ ですから、b_3 式中の b_2、b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_3}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(a_3 - pb_2 - qb_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}[a_3 - p\{a_2 - p(a_1 - p) - q\} - q(a_1 - p)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\{a_3 - p(a_2 - pa_1 + p^2 - q) - qa_1 + pq\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}(a_3 - pa_2 + p^2a_1 - p^3 + pq - qa_1 + pq)$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}(a_3 - pa_2 + p^2a_1 - p^3 + 2pq - qa_1)$$

$$=-a_2 + 2pa_1 - 3p^2 + 2q$$

になります。1－⑤式の $a_2 = b_2 + pb_1 + q$ 、$a_1 = b_1 + p$ を代入し、

$$=-(b_2 + pb_1 + q) + 2p(b_1 + p) - 3p^2 + 2q$$

$$=-b_2 - pb_1 - q + 2pb_1 + 2p^2 - 3p^2 + 2q$$

$$=-b_2 + pb_1 - p^2 + q$$

$$=-b_2 + p(b_1 - p) + q$$

となります。

④$b_4 = a_4 - pb_3 - qb_2$ を p で偏微分します。

1－⑦式により $b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$、$b_2 = a_2 - pb_1 - q$ 、$b_1 = a_1 - p$ ですから、b_4 式中の b_3、b_2、b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_4}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(a_4 - pb_3 - qb_2)$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}[a_4 - p\{a_3 - p(a_2 - p(a_1 - p) - q) - q(a_1 - p)\} - q\{a_2 - p(a_1 - p) - q\}]$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}\{a_4 - p(a_3 - pa_2 + p^2a_1 - p^3 + 2pq - qa_1) - q(a_2 - pa_1 + p^2 - q)\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}(a_4 - pa_3 + p^2a_2 - p^3a_1 + p^4 - 2p^2q + pqa_1 - qa_2 + pqa_1 - p^2q + q^2)$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}(a_4 - pa_3 + p^2a_2 - p^3a_1 + p^4 - 3p^2q + 2pqa_1 - qa_2 + q^2)$$

$$=-a_3+2pa_2-3p^2a_1+4p^3-6pq+2qa_1$$

です。1－⑤式の $a_3=b_3+pb_2+qb_1$、$a_2=b_2+pb_1+q$、$a_1=b_1+p$ を代入し、

$$=-(b_3+pb_2+qb_1)+2p(b_2+pb_1+q)-3p^2(b_1+p)+4p^3-6pq+2q(b_1+p)$$

$$=-b_3-pb_2-qb_1+2pb_2+2p^2b_1+2pq-3p^2b_1-3p^3+4p^3-6pq+2qb_1+2pq$$

$$=-b_3+pb_2-p^2b_1+p^3-pq+qb_1-pq$$

$$=-b_3+p(b_2-pb_1+p^2-q)+q(b_1-p)$$

$$=-b_3+p\{b_2-p(b_1-p)-q\}+q(b_1-p)$$

となります。

⑤$b_5=a_5-pb_4-qb_3$ を p で偏微分します。

1－⑦式により $b_4=a_4-pb_3-qb_2$、$b_3=a_3-pb_2-qb_1$、$b_2=a_2-pb_1-q$、$b_1=a_1-p$ ですから、b_5 式中の b_4、b_3、b_2、b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_5}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}(a_5-pb_4-qb_3)$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}(a_5-p(a_4-p(a_3-p(a_2-p(a_1-p)-q)-q(a_1-p))-q(a_2-p(a_1-p)-q))$$

$$-q(a_3-p(a_2-p(a_1-p)-q)-q(a_1-p))$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}(a_5-pa_4+p^2a_3-p^3a_2+p^4a_1-p^5+2p^3q-3p^2qa_1+2pqa_2+2p^3q-2pq^2$$

$$-qa_3+q^2a_1-pq^2)$$

$$=-a_4+2pa_3-3p^2a_2+4p^3a_1-5p^4+6p^2q-6pqa_1+2qa_2+6p^2q-2q^2-q^2$$

です。1－⑤式の $a_4=b_4+pb_3+qb_2$、$a_3=b_3+pb_2+qb_1$、$a_2=b_2+pb_1+q$、$a_1=b_1+p$ を代入し、

$$=-(b_4+pb_3+qb_2)+2p(b_3+pb_2+qb_1)-3p^2(b_2+pb_1+q)+4p^3(b_1+p)$$
$$-5p^4+6p^2q-6pq(b_1+p)+2q(b_2+pb_1+q)+6p^2q-2q^2-q^2$$
$$=-b_4-pb_3-qb_2+2pb_3+2p^2b_2+2pqb_1-3p^2b_2-3p^3b_1-3p^2q+4p^3b_1+4p^4$$
$$-5p^4+6p^2q-6pqb_1-6p^2q+2qb_2+2pqb_1+2q^2+6p^2q-2q^2-q^2$$
$$=-b_4+pb_3-p^2b_2+p^3b_1-p^4+p^2q-pqb_1+p^2q+qb_2-pqb_1+p^2q-q^2$$
$$=-b_4+p(b_3-pb_2+p^2b_1-p^3+pq-qb_1+pq)+q(b_2-pb_1+p^2-q)$$
$$=-b_4+p\{b_3-p(b_2-pb_1+p^2-q)-q(b_1-p)\}+q\{b_2-p(b_1-p)-q\}$$
$$=-b_4+p[b_3-p\{b_2-p(b_1-p)-q\}-q(b_1-p)]+q\{b_2-p(b_1-p)-q\}$$

となります。

この先の p での偏微分の計算は省略致します。

(2) b を q で偏微分

b_1 から順番に q で偏微分して行きます。

①$b_1=a_1-p$ を q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_1}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}(a_1-p)$$
$$=0$$

です。

②$b_2=a_2-pb_1-q$ を q で偏微分します。1－⑦式により $b_1=a_1-p$ ですから、b_2 式中の b_1 に代入し q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_2}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}(a_2-pb_1-q)$$
$$=\frac{\partial}{\partial q}\{a_2-p(a_1-p)-q\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial q}(a_2-pa_1+p^2-q)$$
$$=-1$$

です。

③$b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$を q で偏微分します。1−⑦式により$b_2 = a_2 - pb_1 - q$であり、$b_1 = a_1 - p$ですから、b_3式中の b_2、b_1に代入し q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_3}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(a_3 - pb_2 - qb_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}[a_3 - p\{a_2 - p(a_1 - p) - q\} - q(a_1 - p)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\{a_3 - p(a_2 - a_1p + p^2 - q) - a_1q + pq\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}(a_3 - pa_2 + p^2a_1 - p^3 + pq - qa_1 + pq)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}(a_3 - pa_2 + p^2a_1 - p^3 + 2pq - qa_1)$$

$$= 2p - a_1$$

です。偏微分後 1－⑤式の$a_1 = b_1 + p$を代入し、

$$= 2p - (b_1 + p)$$

$$= 2p - b_1 - p$$

$$= -b_1 + p$$
$$= -(b_1 - p)$$

です。

④$b_4 = a_4 - pb_3 - qb_2$を q で偏微分します。

1−⑦式により$b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$、$b_2 = a_2 - pb_1 - q$、$b_1 = a_1 - p$ですから、b_4 式中の b_3、b_2、b_1に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_4}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(a_4 - pb_3 - qb_2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}[a_4 - p\{a_3 - p(a_2 - p(a_1 - p) - q) - q(a_1 - p)\} - q\{a_2 - p(a_1 - p) - q\}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\{a_4 - p(a_3 - pa_2 + a_1p^2 - p^3 + 2pq - a_1q) - q(a_2 - a_1p + p^2 - q)\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial q}(a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-2p^2q+pqa_1-qa_2+pqa_1-p^2q+q^2)$$

$$=\frac{\partial}{\partial q}(a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-3p^2q+2pqa_1-qa_2+q^2)$$

$$=-3p^2+2pa_1-a_2+2q$$

です。偏微分後1－⑤式の $a_2=b_2+pb_1+q$ 、$a_1=b_1+p$ を代入し、

$$=-3p^2+2p(b_1+p)-(b_2+pb_1+q)+2q$$

$$=-3p^2+2pb_1+2p^2-b_2-pb_1-q+2q$$

$$=-p^2+pb_1-b_2+q$$

$$=-b_2+p(b_1-p)+q$$

です。

⑤ $b_5=a_5-pb_4-qb_3$ を q で偏微分します。

1－⑦式により $b_4=a_4-pb_3-qb_2$ 、$b_3=a_3-pb_2-qb_1$ 、$b_2=a_2-pb_1-q$ 、$b_1=a_1-p$ ですから、b_5 式中の b_4、b_3、b_2、b_1 に代入し q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_5}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}(a_5-pb_4-qb_3)$$

$$=\frac{\partial}{\partial q}(a_5-p(a_4-p(a_3-p(a_2-p(a_1-p)-q)-q(a_1-p))-q(a_2-p(a_1-p)-q))$$
$$-q(a_3-p(a_2-p(a_1-p)-q)-q(a_1-p))$$

$$=\frac{\partial}{\partial q}(a_5-pa_4+p^2a_3-p^3a_2+p^4a_1-p^5+2p^3q-3p^2qa_1+2pqa_2+2p^3q-2pq^2$$
$$-qa_3+q^2a_1-pq^2)$$

$$= 2p^3 - 3p^2a_1 + 2pa_2 + 2p^3 - 4pq - a_3 + 2qa_1 - 2pq$$

です。1－⑤式の$a_3 = b_3 + pb_2 + qb_1$、$a_2 = b_2 + pb_1 + q$、$a_1 = b_1 + p$を代入し、

$$= 2p^3 - 3p^2(b_1 + p) + 2p(b_2 + pb_1 + q) + 2p^3 - 4pq$$
$$- (b_3 + pb_2 + qb_1) + 2q(b_1 + p) - 2pq$$

$$= 2p^3 - 3p^2b_1 - 3p^3 + 2pb_2 + 2p^2b_1 + 2pq + 2p^3 - 4pq$$
$$- b_3 - pb_2 - qb_1 + 2qb_1 + 2pq - 2pq$$

$$= -b_3 + pb_2 - p^2b_1 + p^3 - pq + qb_1 - pq$$

$$= -b_3 + p(b_2 - pb_1 + p^2 - q) + q(b_1 - p)$$

$$= -b_3 + p\{b_2 - p(b_1 - p) - q\} + q(b_1 - p)$$

となります。

この先のqでの偏微分の計算は省略致します。

付録1、x^nの項に係数a_0が付いている場合

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \bullet\bullet\bullet + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

の場合は、

$$f(x) = a_0\left(x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \frac{a_3}{a_0}x^{n-3} + \bullet\bullet\bullet + \frac{a_{n-2}}{a_0}x^2 + \frac{a_{n-1}x}{a_0} + \frac{a_n}{a_0}\right)$$

の様にa_0を前に出します。ベアストウ・ヒッチコック法と2次式の根（解）の公式により、カッコ内に出来た式の＝0の根（解）を全て求めます。因数定理により、その根（解）でカッコ内に出来た式の因数分解が出来ますから、因数分解後再びa_0を頭に付けます。

$$f(x) = a_0(x - \alpha)(x - \beta)(x - \delta)(x - \varepsilon)\bullet\bullet\bullet(x - \varphi)(x - \gamma)(x - \eta)$$

付録2、接線の方程式の導出

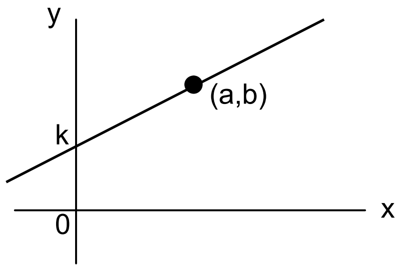
傾きがmで、原点からk持ち上がった直線の方程式は、

$$y = mx + k$$

です。この直線が点(a,b)を通るとします。上式に代入し、

$$b = ma + k$$

が成り立ちます。この式から k の値が決まり、



$$k = b - ma$$

です。最初の式に代入して、

$$y = mx + b - ma$$

となりますが、良い形ではないので、

$$y - b = m(x - a)$$

と変形します。

付録 3、偏微分について

2 変数の関数、例えば変数 x と変数 y の関数 f(x,y)を x で偏微分する場合、y を定数と見なして x で普通に微分すれば良いです。

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

の時、この関数を x で偏微分しますと、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x + y + 2$$

になります。また y で偏微分する場合は、x を定数と見なして y で普通に微分すれば良いです。同じく、

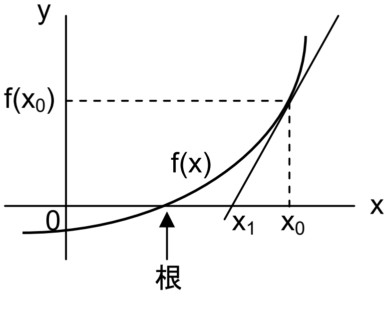
$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

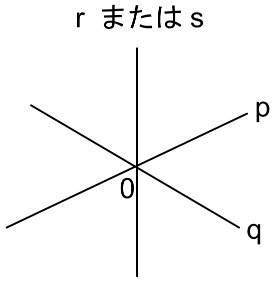
の時、この関数を y で偏微分しますと、

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x - 2y + 1$$

になります。

付録 4、ニュートン・ラフソン法の 2 変数関数への拡張





ニュートン・ラフソン法では、適当に決めた x_0 地点での f(x)の微分値を求め、その傾きで

接線を引き x 軸との交点 x_1 を求めました。上左図です。x_1 地点は f(x)＝0 の根に近づくのでした。ニュートン・ラフソンの公式を変形した 2ー②式、$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=0$ により、

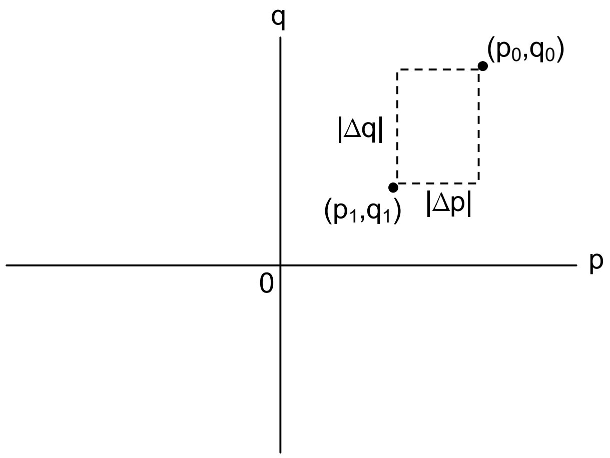
x_1 地点から微分値 $f'(x_0)$ の勾配で登って行くと、x_1 と x_0 の差の $|\Delta x|$ 行ったところで $f(x_0)$に到達出来ることが分ります。

ベアストウ・ヒッチコック法で、余りの r または余りの s の値は、p と q による 2 変数関数でした。上右図の 3 次元の座標になります。

ニュートン・ラフソンの公式 2ー②式を 2 変数関数用に拡張したものが、2ー③式の、

$$r(p_0,q_0)+\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=0$$

です。1 変数の時と同様に、(p_0,q_0)地点から$|\Delta p|$および$|\Delta q|$離れた地点を(p_1,q_1)とします。そこは r(p,q)＝0 の根に近づいた地点です。高さは 0 です。そこから、ニュートン・ラフソン法で行ったと同じ様に $r(p_0,q_0)$に登ってみます。

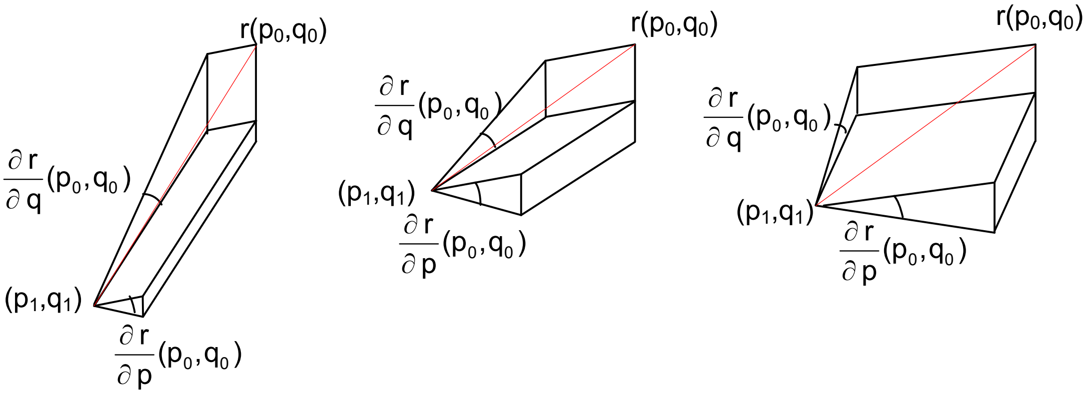


この時の座標を真上から見たのが上の図です。(p_1,q_1)地点の高さは 0 ですが、(p_0,q_0)地点には、$r(p_0,q_0)$と言う高さがあります。(p_1,q_1)から $r(p_0,q_0)$地点に登る勾配には、$r(p_0,q_0)$の偏微分値 $\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$ と $\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)$ を使います。この 2 つは、r(p,q)を p または q で偏微分してから p_0, q_0 を代入したものです。

$|\Delta p|$を登る時には p で偏微分した勾配の値、$\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$ を使います。$|\Delta q|$を登る時には q で偏微分した勾配の値、$\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)$ を使います。$r(p_0,q_0)$地点に到達するには、(p_1,q_1)と

$r(p_0,q_0)$の間を斜めに登って行くのですが、その斜めの動きの中の p 方向の動きが$|\Delta p|$であり、q 方向の動きが$|\Delta q|$です。

p 方向の（勾配×距離）と q 方向の（勾配×距離）の和が、$r(p_0,q_0)$地点に来れば到達成功です。条件はこれだけですから、様々な登り方があります。$|\Delta p|$を短くして$|\Delta q|$を長くしたり、$|\Delta p|$を長くして$|\Delta q|$を短くしたりなど無数の経路があります。1 変数のニュートン・ラフソン法では、x_1 地点からの到達ルートは 1 つだけでしたが、2 変数の場合、(p_1,q_1)地点からの到達ルートは無数にあることになります。これでは(p_1,q_1)地点が定まらず、大変困ります。その例が下の図です。到達ルートは(p_1,q_1)と $r(p_0,q_0)$を結んだ線（赤色）になります。$r(p_0,q_0)$の高さは同じですが、経路の取り方は色々あり、(p_1,q_1)地点もバラバラです。



解決策として、もう 1 つの 2 変数関数 s を用います。2ー④式の、

$$s(p_0,q_0)+\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=0$$

です。この式も 2ー③式と同じで、この式だけでは(p_1,q_1)地点が定まりません。こちらにも無数の(p_1,q_1)の候補があります。そこで、2 つの式を連立させます。2ー③、2ー④式を移項した 2ー⑤、2ー⑥式の連立方程式、

$$\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=-r(p_0,q_0)$$
$$\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)\Delta p+\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)\Delta q=-s(p_0,q_0)$$

になります。この連立方程式を解くことにより、無数にある Δp と Δq の候補値がそれぞれ 1 つに定まります。p_0 に Δp を加えますと p_1 になります。q_0 に Δq を加えますと q_1 になります。r と s で同一の(p_1,q_1)地点が出来ます。

(p_1,q_1)地点から$\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$の勾配で Δp 進み 、更に$\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)$の勾配で Δq 進みますと、$r(p_0,q_0)$ に到達出来ます。(p_1,q_1)地点から$\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)$の勾配で Δp 進み 、更に$\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)$の勾配で Δq 進みますと、$s(p_0,q_0)$に到達出来ます。

この様にして最終的な r(p,q)＝0 および s(p,q)＝0 の根、真の p と真の q に近づいた同一の(p_1,q_1)地点が決定されます。この p_1、q_1 を新しい p_0、q_0 として、新たな Δp、Δq を求めて行きます。ニュートン・ラフソン法の 2 変数関数への拡張です。

付録 5、クラーメル（クラメル）（クラメール）の解法

連立 1 次方程式、

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \cdots ①$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \cdots ②$$

を解きます。(①×b_2)ー(②×b_1)を行いますと、

$$\begin{array}{rl} & a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -) & a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \\ \hline & a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1 \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

になります。

(①×ーa_2)ー(②×ーa_1) を行いますと、

$$\begin{array}{rl} & -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ -) & -a_1a_2x - a_1b_2y = -a_1c_2 \\ \hline & -a_2b_1y + a_1b_2y = -a_2c_1 + a_1c_2 \end{array}$$

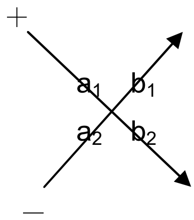
$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

になります。

行列式の計算を次の様に決めます。左上から右下へ掛けた値から、左下から右上へ掛けた

値を引き、これを$\left|\quad\right|$の値と決めます。



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

行列式で解く連立 1 次方程式は、次の様になります。

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{D}$$

x の行列式の分母は、連立 1 次方程式の x と y の係数をそのまま入れます。x の行列式の分子は、x の係数の代わりに右辺の値 c_1、c_2 を入れます。y の係数はそのまま入れます。

y の行列式の分母も、連立 1 次方程式の x と y の係数をそのまま入れます。y の行列式の分子は、x の係数はそのまま入れ、y の係数の代わりに右辺の値 c_1、c_2 を入れます。

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{D}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

分母の行列式は全く同じなので、D として別に計算しても良いです。この方法をクラーメル（クラメル）（クラメール）の解法と呼びます。

付録 6、$f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$ について

f(x)の x_0 地点での接線の傾きが f' (x_0)です。傾きとは $\dfrac{y}{x}$ のことですから、傾きに x 方向の値 Δx を掛けますと、

$$f'(x_0) \cdot \Delta x = \frac{y}{x} \cdot \Delta x = \Delta y$$

になり、傾きに比例した y 方向の値 Δy が出ます。f(x)の x_0 地点での値 f (x_0)と Δy の値とで、

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = f(x_0) + \Delta y = 0$$

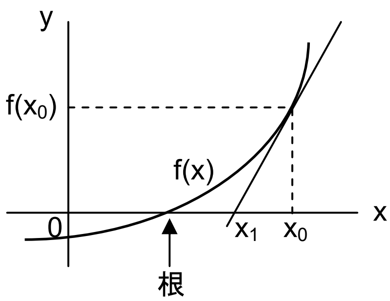
になる Δx を求めます。f(x)の x_0 地点での値 f (x_0)と絶対値が同じで、符号が逆の Δy になる

Δx を探します。x_0 の値に Δx の値を足しますと、

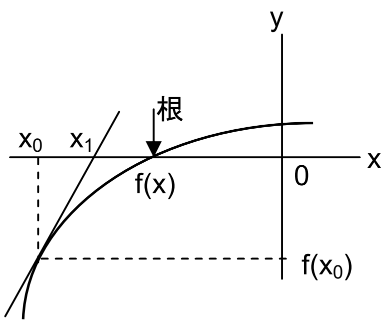
$$x_0 + \Delta x = x_1$$

で x_1 になります。

f(x_0)が正で、傾きも正（右肩上がり）の時、Δx は－で出ますので、x_1 は根の値に近づきます。

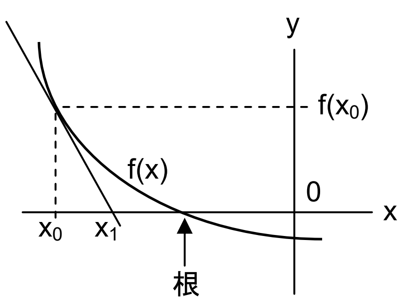


f(x_0)が負で、傾きが正（右肩上がり）の時、Δx は＋で出ますので、x_1 は根の値に近づきます

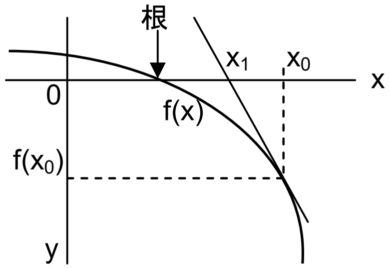


f(x_1)

f(x_0)が正で、傾きが負（右肩下がり）の時、Δx は＋で出ますので、x_1 は根の値に近づきます。



$f(x_0)$が負で、傾きも負（右肩下がり）の時、Δx は－で出ますので、x_1 は根の値に近づきます



目次へ戻る